

Oscillations

Yury Holubeu *

November 23, 2025

This note is not intended for distribution. Oscillations are discussed in detail. Links below show the contents of solved problems, and the contents of a summary of other topics.

Contents

1	Preface and main motivation	6
I	—— Typical Oscillations in a Nutshell ——	7
2	Basic Models and Methods of Oscillation Theory	7
2.1	Typical Models in a Nutshell	7
2.1.1	Which Method to Chose?	7
2.1.2	Linear Oscillator, Resonance	7
2.1.3	Nonlinear Oscillator: General Properties	13
2.1.4	Anharmonicity, Duffing Equation	15
2.1.5	Nonlinear Resonance (????)	17
2.1.6	Simplest Systems of Equations and Maps	18
2.1.7	Parametric Oscillations, Hill's Equation, Adiabatic Method	19
2.1.8	Parametric Resonance and the Mathieu Equation (!)	22
2.1.9	Kapitza Oscillator, Oscillations of Parameters	23
2.1.10	Coupled Oscillations, Beating	24
2.1.11	Self-Oscillations, Van der Pol Equation	28
2.1.12	Synchronization of Oscillations, Kuramoto Model and Arnold Tongues	32
2.2	Typical Mathematics for Oscillations	36
2.2.1	General Formalism for Oscillations	36
2.2.2	Evaluation of Integrals for Oscillations	37
2.2.3	Bifurcations (!!?!?!?!?)	37
2.2.4	Stability Analysis: Basic Methods	37
2.3	Other Well-Known Oscillatory Systems and Methods	37
2.3.1	Stochastic Resonance	37
2.3.2	Quantum Oscillations	38
2.3.3	Perturbation Methods: Essence by Naifeh (!!!!!!!?)	38
II	Basic Theory of Oscillations	39
3	Typical Oscillations	39
3.0.1	Basic Examples of Oscillations	39
3.0.2	Nonlinear Oscillator. Non-Isochronism: Basic Methods	44
3.0.3	Nonlinear Oscillator. Non-Isochronism: Basic Effects	53
3.0.4	Chaos in Oscilations: Basic Concepts	60
3.0.5	Linear Oscillator	60
3.0.6	P.4. Coupled Oscillations	73
3.0.7	P.5. Осцилятор Дуффинга. Ангармонизм	87
3.0.8	P.6. Duffing Oscillator. Anharmonicity	95
3.0.9	P.7. Осцилятор Матье. Параметрический резонанс	107
3.0.10	Kapitza Oscillator. Motion in a Rapidly Varying Field: Basics	118
3.0.11	Kapitza Oscillator: Other Model and Approaches	119
3.0.12	Motion in a Rapidly Varying Field: Other Model and Approaches	119
3.0.13	P.9. Nonlinear Resonance	119

*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

3.0.14	P.10 Van der Pol Oscillator, Self-Oscillations	128
3.0.15	P.11. Synchronization of Oscillations	135
3.0.16	P.12 Stochastic Resonance	146
3.0.17	P.13. Quantum Oscillations (!?!?!?)	147

III Problems 148

4	Типичные задачи	148
4.1	Description of Typical Oscillations (???)	148
4.1.1	Problems about Linear Oscillator	148
4.1.2	Problems about Nonlinear Oscillator	149
4.1.3	Problems about Coupled Oscillations	151
4.1.4	Problems about Duffing the Oscillator, Anharmonicity	152
4.1.5	Problems about the Hill Oscillator, an Adiabatic Invariant	153
4.1.6	Problems about the Mathieu Oscillator. Parametric Resonance	155
4.1.7	Problems about Nonlinear Resonance	156
4.1.8	Problems about Oscillation Synchronization	157
4.1.9	10 Problems About Van Der Pol Oscillators and Self - Oscillations	158
4.2	Questions for Testing Knowledge	161
4.2.1	Questions to Test Basic Knowledge	161
4.2.2	Determining the Type of the Equation	161
4.2.3	Questions to test knowledge of details	162
4.3	Tasks about Physical Applications (???)	162
4.3.1	Other Pukhov Tasks	162
4.4	Other Problems	162
4.4.1	Other Problems 1	162
4.4.2	Other Problems 2	169
4.4.3	Other Problems 3	174
4.4.4	Other Problems 4	180
4.4.5	Other Oscillation Exercises from Pukhov	181
4.4.6	Other Oscillation Exercises from Pukhov 2	186
4.4.7	Exercises from Naife 1	189
4.4.8	Exercises from Naife 2	191
4.4.9	Exercises from Naife 3	193
4.4.10	Exercises from Naife 4	197

IV — Special Oscillations in a Nutshell — 200

5	О других методах, отдельных моделях колебаний и приложениях	200
5.1	Methods from Bogoliubov, Mitropolsky (?????)	200
5.2	Numerical Methods for Oscillations (???)	200
6	Applications	200
6.1	Oscillations in Dynamical Systems	200
6.2	Oscillations in Classical Mechanics	200
6.3	Other Oscillations in Physics	200
6.3.1	On reaction diffusion model	200
6.3.2	Oscillations in Chemistry	203
6.3.3	Oscillations in Biology	203
6.3.4	Oscillations in Astronomy	203
6.4	Other Applications	204
6.4.1	Sociology (???)	204

6.4.2	Ecology (???)	204
6.4.3	Combats (???)	204

V Special Methods and Applications 206

7 Some Philosophical and General Statements 206

7.0.1	General Statements about Nature from Oscillations	206
7.1	Special Effects	207
7.1.1	Chladni figures	207

8 Other Applications 207

8.1	Sociology (???)	207
8.1.1	Population of Earth	207
8.2	Ecology (???)	207
8.2.1	Predators and Preys	207
8.3	Combats (???)	207

9 Perturbation Methods by Nayfeh 208

9.0.1	Preface	208
9.1	1 Introduction	209
9.1.1	1.1. Parameter Perturbations	209
9.1.2	1.2. Coordinate Perturbations	212
9.1.3	1.3. Order Symbols and Gauge Functions	214
9.1.4	1.4. Asymptotic Expansions and Sequences	216
9.1.5	1.5. Convergent Versus Asymptotic Series	221
9.1.6	1.6. Nonuniform Expansions	222
9.1.7	1.7. Elementary Operations on Asymptotic Expansions	224
9.2	2 Straightforward Expansions and Sources of Nonuniformity	227
9.2.1	2.1. Infinite Domains	228
9.2.2	2.2. A Small Parameter Multiplying the Highest Derivative	234
9.2.3	2.3. Type Change of a Partial Differential Equation	240
9.2.4	2.4. The Presence of Singularities	244
9.2.5	2.5. The Role of Coordinate Systems	250
9.2.6	Exercises	252
9.3	3 The Method of Strained Coordinates	255
9.3.1	3.1. The Method of Strained Parameters	256
9.3.2	3.2. Lighthill's Technique	274
9.3.3	3.3. Temple's Technique	289
9.3.4	3.4. Renormalization Technique	290
9.3.5	3.5. Limitations of the Method of Strained Coordinates	293
9.3.6	Exercises	296
9.4	4 The Methods of Matched and Composite Asymptotic Expansions	301
9.4.1	4.1. The Method of Matched Asymptotic Expansions	302
9.4.2	4.2. The Method of Composite Expansions	330
9.4.3	Exercises	338
9.5	5 Variation of Parameters and Methods of Averaging	341
9.5.1	5.1. Variation of Parameters	341
9.5.2	5.2. The Method of Averaging	346
9.5.3	5.3. Struble's Technique	352
9.5.4	5.4. The Krylov-bogoliubov-mitropolski Technique	354
9.5.5	5.5. The Method of Averaging by Using Canonical Variables	359
9.5.6	5.6. Von Zeipel's Procedure	368
9.5.7	5.7. Averaging by Using the Lie Series and Transforms	377

9.5.8	5.8. Averaging by Using Lagrangians	392
9.5.9	Exercises	398
9.6	6 The Method of Multiple Scales	402
9.6.1	6.1. Description of the Method	402
9.6.2	6.2. Applications of the Derivative-expansion Method	415
9.6.3	6.2. Applications of the Derivative-expansion Method 249	420
9.6.4	6.3. The Two-variable Expansion Procedure	438
9.6.5	6.4 Generalized Method	443
9.6.6	Exercises	467
9.7	7 Asymptotic Solutions of Linear Equations	469
9.7.1	7.1. Second-order Differential Equations	470
9.7.2	7.2. Systems of First-order Ordinary Equations	484
9.7.3	7.3. Turning Point Problems	493
9.7.4	7.4. Wave Equations	515
9.7.5	Exercises	532
9.7.6	References And Author Index	535
10	Asymptotic Methods by Bogolibov, Mitropolsky	560
10.1	Introduction	560
10.2	1 Natural Oscillations in Systems Close to Linear Ones	595
10.2.1	1. Development of Asymptotic Solutions.	595
10.2.2	2. Conservative Systems Close to Linear Ones	606
10.2.3	3. Case of Non-linear Friction.	615
10.2.4	4. Autonomous Oscillatory Systems	622
10.2.5	5. Stationary Amplitudes and Their Stability	630
10.2.6	6. Development of Stationary Solutions	641
10.2.7	7. Equivalent Linearization of Non-linear Oscillating Systems	648
10.2.8	8. Non-linear Oscillating Systems with Slowly Varying Parameters	662
10.3	2 Method of the Phase Plane	669
10.3.1	9. Trajectories in the Phase-plane. Singular Points	669
10.3.2	10. Lienard's Method	691
10.3.3	11. Relaxation Oscillation Systems	703
10.3.4	12. Method of A. A. Dorodnitsin for Van-der-pol Equation	710
10.4	3 Influence of External Periodic Forces	716
10.4.1	14. Resonance Cases	728
10.4.2	15. the Influence of Sinusoidal Force on a Non-linear Vibrator	743
10.4.3	17. Parametric Resonance	768
10.4.4	18. Effect of Periodic Forces on a Relaxation System	781
10.4.5	19. Effect of Periodic Forces on Non-linear Systems with Slowly Varying Parameters	792
10.5	Monofrequency Oscillations in Non-linear Systems with Several Degrees of Freedom of Freedom	807
10.5.1	20. Natural Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom	807
10.5.2	21. Natural Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom, Representable by a System of Differential Equations of the Second Order	820
10.5.3	22. Effect of External Periodic Forces on Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom	830
10.5.4	23. Analysis of Monofrequency Oscillations in Non-linear Systems with Several Degrees of Freedom When There Are Slowly Varying Parameters	841
10.6	5 The Method of Averaging	856
10.6.1	24. Equations of the First and Higher Order Approximations in the Method of Averaging	856
10.6.2	25. the Case of the Rapidly Rotating Phase	874

10.7	6 Foundation of Asymptotic Methods	885
10.7.1	26. Foundation of the Method of Averaging	885
10.7.2	27. Transformation of the Basic System of Equations	890
10.7.3	30. Periodic and Almost Periodic Solutions	943
10.7.4	Bibliography	963
10.7.5	Bibliography	964

VI Appendix 966

A Introduction and Overview 966

A.1	Some General Ideas	966
A.1.1	Extra Motivation	966
A.1.2	Ways to Earn Money	966
A.1.3	Usage in Everyday Life (!)	966
A.2	Acknowledgements	966
A.3	Literature	966
A.3.1	Main Literature	966
A.3.2	Extra Literature	967
A.4	History of Oscillations	967
A.5	Puzzles for Different Cases	967

B Bibliography 968

1 Preface and main motivation

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Периодическое изучение теории колебаний - прекрасное хобби успешного физика

(раскрою мысль, что колебания очень много где используются, поэтому это один из самых важных математических предметов для физики.)

Map of oscillations

(I'll draw it and discuss later. it is relatively easy part of science, but still, a lot of work is needed to understand it)

Теоретические головоломки для мотивации

Прикладные головоломки для мотивации

(коротко решение пишу, подробнее - см. каталог!)

Part I

—— Typical Oscillations in a Nutshell ——

2 Basic Models and Methods of Oscillation Theory

2.1 Typical Models in a Nutshell

2.1.1 Which Method to Chose?

(тут указания, что вообще брать, какие методы на какие случаи??)

Осциллятор можно либо ударить, т.е. передать ему энергию за счет начальных условий. Либо раскачать его за счет действия внешней силы, что наиболее эффективно в условиях резонанса. Теперь рассмотрим еще один способ возбуждения осциллятора, когда за счет внешних источников энергии изменяются его параметры. Можно привести много примеров таких параметрических колебаний в механических, электрических, лазерных и других системах. При этом может возникать параметрический резонанс, классическим примером которого является девочка на качелях. Приседая и выпрямляясь в такт колебаниям с нужной частотой, она может сильно раскачать качели.

Все подобные колебания описываются с единых позиций на основе уравнения Хилла:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

При этом параметрические системы (6.1) естественным образом разделяются на три группы, характеризующиеся различным поведением.

1). Адиабатические. В этом случае собственная частота изменяется медленно, за времена, значительно превышающие собственный период колебаний осциллятора. Это означает, что характерное время изменения параметров $\sim \omega/\dot{\omega}$ значительно больше периода собственных колебаний осциллятора $\sim \omega^{-1}$. Отсюда получаем критерий медленности изменения собственной частоты $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Анализ решений (6.1) удобно проводить ВКБ-методом, а сохраняющимися при движении величинами являются адиабатические инварианты $\oint p dx$. В случае гармонического осциллятора приближенно сохраняющейся величиной является $E(t)/\omega(t)$.

2). Резонансные. Это системы, для которых характерное время изменения параметров того же порядка, что и период собственных колебаний системы $\dot{\omega} \sim \omega^2$. В таких параметрических осцилляторах возможно возникновение параметрического резонанса.

3). Системы в быстро осциллирующем поле. Это системы, на которые действуют быстро переменные силы с $\dot{\omega} \gg \omega^2$. Классическим примером здесь является маятник Капицы. Быстро переменное воздействие может приводить к тому, что старые, стационарные положения равновесия осциллятора теряют устойчивость и возникают новые, устойчивые положения равновесия.

2.1.2 Linear Oscillator, Resonance

Элементарные колебания

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E$$
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Свободные затухающие колебания $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0, f(t) = 0$:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1}\right)^2} e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1 x_0}.$$

Добротность, частота:

$$Q = \frac{\omega_1}{2\gamma} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Спектр затухающих колебаний при $Q \gg 1$. Лоренцевская линия

$$|X(\omega)|^2 \propto \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$$

Нормальные колебания. Произвольная внешняя сила

$$a = x + \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} \dot{x}, \quad a^* = x + \frac{\gamma - i\omega_1}{\omega_0^2} \dot{x},$$

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma + i\omega)a + \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} f(t).$$

Функция Грина:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1 (t - t') f(t') dt'$$

Отклик на гармоническую силу.

Амплитуды поглощения и дисперсии

$$a(\omega) = \frac{2\gamma\omega f}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad b(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) f}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Пик резонанса. Отклик при высокой добротности $Q \gg 1$:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad |a(\omega)|^2 \propto \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Теория

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$x(t) \propto \exp(\lambda t)$. $\lambda: \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, при начальных условиях $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ получаем при $\omega_0 > \gamma$:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1}\right)^2} e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

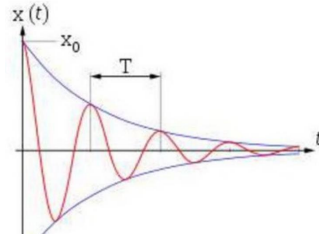
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1 x_0}.$$

добротность - характеристика скорости затухания осциллятора $Q = \omega_1/2\gamma$. Добротность, деленная на π , - это число колебаний, после которого амплитуда уменьшится в e раз.

$$Q = 2\pi E/\Delta E.$$

Уже при добротностях в несколько единиц с точностью лучше процента можно пользоваться приближенными формулами

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \right), \quad Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \right)$$



В случае сильного затухания $\omega_0 < \gamma$

$$x(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left\{ \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} x_0 \operatorname{ch} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + (\gamma x_0 + v_0) \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right\}$$

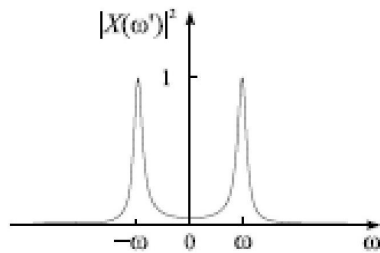
Спектр мощности сигнала $|X(\omega)|^2$ (энергия, приходящаяся на частотный интервал $[\omega, \omega + d\omega]$):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{т. Парсеваля})$$

$$\begin{aligned} |X(\omega)|^2 &= \frac{v_0^2}{((\omega + \omega_1)^2 + \gamma^2)((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)} \\ &\approx \frac{v_0^2}{4\omega_1^2((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)} \propto \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2} = L(\omega) \quad (\text{вблизи резонанса}) \end{aligned}$$

Для высокой добротности:



Для $\ddot{x} + x = f(t)$

$$a := \dot{x} + ix, \quad \dot{a} = \ddot{x} + i\dot{x} \Rightarrow \dot{a} - ia = \ddot{x} + x = f(t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, \\ \frac{da}{dt} &= -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x + f(t). \end{aligned}$$

$$a := x + (\gamma + i\omega_1) \dot{x} / \omega_0^2$$

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma + i\omega_1) a + \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} f(t)$$

$$a|_{x(0)=\dot{x}(0)=0} = \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} \int_0^t e^{-(\gamma+i\omega_1)(t-t')} f(t') dt'$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega_1} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega_1} \right) a^* \right), \quad \dot{x} = \frac{\omega_0^2}{2i\omega_1} (a - a^*).$$

$$x|_{x(0)=\dot{x}(0)=0} = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1(t-t') f(t') dt'$$

$$x = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t, \quad \dot{x} = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} (-\gamma \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t).$$

Если начальные условия ненулевые, то следует добавить собственные затухающие колебания осциллятора.

В частности, для удара имеем свободные затухающие колебания осциллятора после действия удара, который придал ему энергию $p^2/2$ и импульс p : время действия силы $\tau \ll \gamma^{-1}, \omega_0^{-1}$, что $f(t) \approx p\delta(t)$, где $p = \tau f_0$ и

$$x = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t, \quad \dot{x} = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} (-\gamma \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t).$$

В частности, для медленно меняющейся силы:

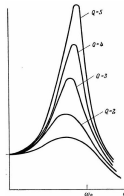
$$x = \omega_0^{-2} f(t)$$

(???)

О резонансе

Резонанс

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= f_0 \cos \omega t \\ x(t) &= a \cos(\omega t + \varphi) = a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t, \\ a &= \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \\ \omega_{\text{peak}} &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{aligned}$$



Резонанс - это эффективный способ возбуждения осциллятора. Система, вполне устойчивая к внешнему статическому воздействию, может быть разрушена слабой переменной силой, находящейся в резонансе с этой системой.

$$Q \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{X(\omega)}{X(\omega_2)} \right|^2 = \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2},$$

О методе векторных диаграмм (???)

Идея проста: $x(t) \sim \exp(i\omega t)$, затем возьмем $\operatorname{Re} x(t)$. Тогда, в силу принципа суперпозиции, оно также будет решением (3.23). То же самое можно выразить геометрически, изобразив решение на комплексной плоскости в виде вектора $x = X(\omega) \exp(i\omega t)$, вращающегося против часовой стрелки с частотой ω . Тогда вектор скорости $\dot{x} = i\omega x$ будет повернут относительно x на $\pi/2$ против часовой стрелки, а вектор ускорения $\ddot{x} = (i\omega)^2 x$ - повернут на π . Эти вектора, так же, как и вектор силы $f = f_0 e^{i\omega t}$, вращаются против часовой стрелки с частотой ω . Значит, уравнение (3.23) можно рассматривать как векторное равенство. Это сразу дает возможность вычислить амплитуду $X(\omega)$ из правила сложения векторов. По теореме Пифагора получаем соотношения

$$f_0^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 X(\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 X(\omega)^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = 2\gamma\omega / (\omega^2 - \omega_0^2),$$

Спектры собственных и вынужденных колебаний

Свободные затухающие колебания осциллятора $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ при $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

$$\equiv \int_0^\infty a(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^\infty b(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty x(t) \sin \omega t dt, \quad (\text{амплитуда поглощения})$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty x(t) \cos \omega t dt. \quad (\text{амплитуда дисперсии})$$

$$|X(\omega)|^2 = a^2(\omega) + b^2(\omega)$$

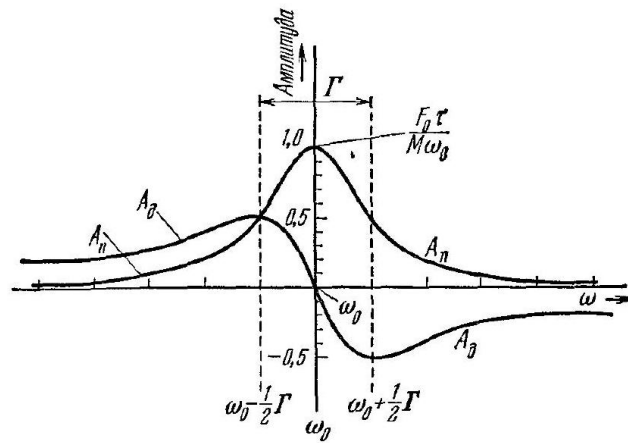
Если $v_0 + \gamma x_0 = 0$, то

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t,$$

$$a(\omega) = \frac{x_0}{2\pi} \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\omega\gamma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad b(\omega) = \frac{x_0}{2\pi} \frac{2\gamma(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$|X(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{\pi^2} \frac{\omega^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

(потом допишу другие свойства, пока см. теорию.)



Почему спектральные линии свободных затухающих и вынужденных резонансных колебаний совпадают?

(???? см. пункт из Пухова, там ответ)

Секулярные решения

Резонанс может осуществляться также в виде неограниченно возрастающей, непериодической функции времени – секулярного решения.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

$x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ при $t = 0$.

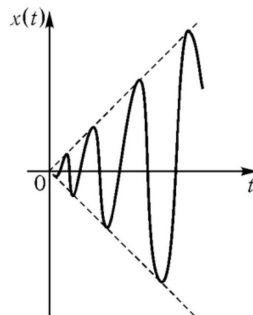
$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Проследим, как происходит нарастание амплитуды колебаний осциллятора при резонансе, когда $\omega \rightarrow \omega_0$. В этом случае $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ и $\cos \omega t - \cos \omega_0 t \approx -(\omega t - \omega_0 t) \sin \omega_0 t$

$$x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{f_0}{2\omega_0} \cdot \frac{-(\omega t - \omega_0 t) \sin \omega_0 t}{(\omega_0 - \omega)} = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

В случае точного резонанса $\omega = \omega_0$ получаем секулярное решение

$$x(t) = (f_0/2\omega_0) t \sin \omega_0 t$$



2.1.3 Nonlinear Oscillator: General Properties

Основные формулы

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0$$

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Если посмотреть на график потенциала, где изображены U и δU , то можно заметить, что при сдвиге назад,

$$\delta x = -\frac{\delta U}{U'(x)}.$$

Минус тут, ибо начали с формы $x + \delta x$. Это же видно, если просто расписать производную.

Сдвиг частоты находим через сдвиг периода. Но если посчитать поправки к периоду для общего случая $U + \delta U$, то получаем в 1 порядке 3 бесконечности (теория).

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, поэтому после производной

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta \omega}{\omega}.$$

Вариация периода δT при возмущении потенциала $\delta U(x)$:

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}} = -\frac{\partial}{\partial E} T \langle \delta U \rangle$$

Идея в том, что правильно брать $\frac{\delta T}{\sqrt{2m}} = \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-\tau-\delta u}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-(x(x))}}$ дифференцированием по параметру, который у нас только энергия, тогда δU переходит в числитель, ну и по Тейлору раскладываем (?), ну и получаем интеграл по dt , потому что помним выражение dt/dx для колебаний.

Высшие поправки к δT по $\delta U(x)$:

$$\delta T = \sqrt{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\delta U^n(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Вроде получаем таким же методом, поднимая корни.

(?? в теории подумаю, почему бесконечности иначе, что не то мы делали, если обычные вариации искали?)

О неизохронности математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0.$$

$$T = 4 \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2[E - mgl(1 - \cos \varphi)]}} = \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

тут $\omega = \sqrt{g/l}$, введем $\kappa := \sin(\varphi_m/2) = \sqrt{E/2mgl}$ и $\sin(\varphi/2) \equiv x \sin \psi$, получаем

$$T = \frac{4}{\omega} K(\kappa),$$

Период колебаний при $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{x_0^2}{16} \right) \equiv 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{th}(t - t_0) \quad \text{при } x_0 \ll 1,$$

$$T = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\pi - x_0} \quad \text{при } \pi - x_0 \ll 1.$$

(??? про второй подумаю!)

Движение по сепаратрисе (!! додумаю!!)

$$x(t) = -\pi + 4 \operatorname{arctg} e^{-\omega_0(t-t_0)}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \omega_0(t-t_0)}.$$

(!!! проверю формулы еще раз!!!)

О фазовой плоскости и фазовых кривых

Фазовые кривые закручены по часовой стрелке. Это видно из $m\dot{x} = y, \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x)$, что в верхней полуплоскости $y > 0$ фазовая кривая движется направо $\dot{x} > 0$, а в нижней - наоборот.

Нелинейный осциллятор с диссипацией

$$m\ddot{x} + 2\gamma m\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = -2\gamma m\dot{x}^2.$$

Если диссипации нет $\gamma = 0$, то мы возвращаемся к консервативному случаю. При наличии диссипации $\gamma > 0$ энергия $E = m\dot{x}^2/2 + U(x)$ убывает.

Слабая диссипация. В уравнении (3.27) имеется два характерных масштаба времени: затухания $\sim \gamma^{-1}$ и колебания $\sim (m/U'')^{1/2}$ U'' - характерное значение второй производной потенциала в рассматриваемой области фазовой плоскости. Если параметр диссипации мал $\gamma^2 \ll U''/m$, то это затухание очень медленное. Эта медленность помогает качественно представить себе вид фазовой траектории.

Сильная диссипация. В случае очень большой диссипации $\gamma^2 \gg U''/m$ характер фазовых траекторий меняется. Вместо приближения траекторий к равновесию с осцилляциями наблюдается просто медленное затухание величины отклонения от неподвижной точки, без изменения знака. То есть особая точка устойчивого равновесия из устойчивого фокуса с ростом диссипации превращается в устойчивый узел. (передемпфированный осциллятор)

Обратная задача теории колебаний

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}.$$

(допишу потом про вывод, пока не интересно, чуть что понимаю, что такое есть)

Теорема вириала.

$$1D: \quad 2\bar{T} + \overline{x \cdot f(x)} = 0.$$

Proof:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= f(x) \\ mx\ddot{x} &= xf(x), \\ x\ddot{x} &\equiv d(x\dot{x})/dt - \dot{x}^2, \\ \frac{d}{dt}(mx\dot{x}) - m\dot{x}^2 &= x \cdot f(x). \end{aligned}$$

Усредним по времени и вспомним, что среднее от временной производной ограниченной функции равно нулю. Это усреднение правомочно, если движение системы периодическое либо если при движении координата и скорость системы остаются ограниченными.

Теорема вириала очень эффективна, если потенциальная энергия степенная функция координаты $U(x) \propto x^n$. Тогда по теореме Эйлера об однородных функциях $x \cdot f(x) = -x\partial U/\partial x = -n\bar{U}$,

$$2\bar{T} - n\bar{U} = 0,$$

$\bar{T} + \bar{U} = E$, so

$$\bar{T} = \frac{nE}{n+2}, \quad \bar{U} = \frac{2E}{n+2}.$$

При $n > 2$ доминирует кинетическая энергия, а при $n < 2$ наоборот, потенциальная. Равенство средних $\bar{T}$ и $\bar{U}$ выполняется только для гармонического осциллятора $n = 2$.

Эта теорема является мощным инструментом вычисления средней энергии колебаний. (??)

2.1.4 Anharmonicity, Duffing Equation

Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0} + \dots$$

$$x(t; \gamma = 0) = a \sin \omega t - \frac{\beta a^3}{32} \sin 3\omega t + \dots$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t. \quad \text{Duff+force}$$

$$\left(\frac{\gamma a}{2}\right)^2 + a^2 \left(\omega - \omega_0 - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad \text{resonance curve } a = a(\omega)$$

$$\omega_2 - \omega_0 = \frac{3\beta f^2}{8\gamma^2 \omega_0^3} \quad \text{shift of res. peak}$$

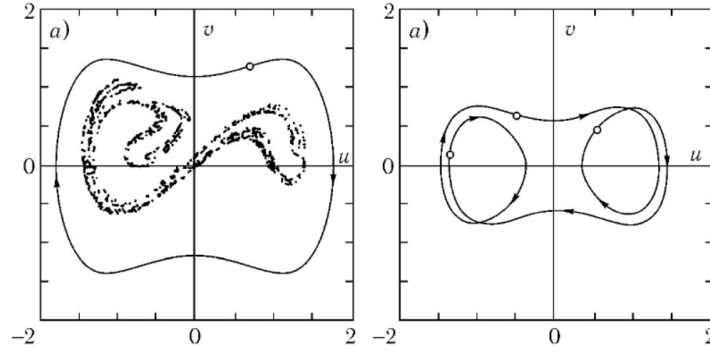


Figure 2.1: Орбиты уравнения Дуффинга $\omega = 1, 0, \gamma = 0, 30$: (a) сосуществование «странного аттрактора» и большой устойчивой орбиты периода 1, $\delta = 0, 15$; (b) устойчивая орбита периода 3, $\delta = 0, 22$; самопересечение связано с проекцией на плоскость u, v . (Гукенхаймер, Холмс)

Неизохронность Дуффинга (зависимость периода от амплитуды)

$$\frac{\delta T}{\sqrt{2m}} = -\frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad x_0(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad \varphi \equiv 0,$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{m\beta}{4} \left(\frac{2E}{m\omega_0^2} \right)^2 \sin^4 \omega_0 t dt.$$

$$\sin^4 x = (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)/8, \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx = 6\pi/8, \quad 2E/m\omega_0^2 = a^2,$$

$$-\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta \omega}{\omega_0} = \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0^2}.$$

При $\beta/\omega_0^2 = -1/6$, $a = \varphi_m$, получаем увеличения периода математического маятника $\delta T/T_0 = +\varphi_m^2/16$.

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0^2} + \dots \right)$$

Ангармонизм Дуффинга (появление других частот колебаний)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

$$\beta a^2 \ll \omega_0^2$$

$\omega_0 \equiv 1$, then later we should replace $t \rightarrow \omega_0 t$, $\beta \rightarrow \beta/\omega_0^2$.

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t) + \dots$$

$$(\ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2) + \beta (x_0^3 + 3x_0^2 \beta x_1 + \dots) = 0,$$

$$x(t) = a \sin t + \beta \left[\frac{3}{8} a^3 t \cos t - \frac{a^3}{32} \sin 3t \right] + \dots$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sim t \cos t \rightarrow \infty$, but all is fine. We can get rid of secular terms:

$$\omega = 1 + \beta \omega_1 + \beta^2 \omega_2 + \dots, \quad \omega^2 = 1 + 2\beta \omega_1 + \dots$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\beta x^3 + (\omega^2 - 1)x,$$

we get:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -x_0^3 + 2\omega_1 x_0,$$

...

$$x_0 = a \sin \omega t, \sin^3 x = 3 \sin x/4 - \sin 3x/4,$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4}a^3 \sin \omega t + \frac{1}{4}a^3 \sin 3\omega t + 2\omega_1 a \sin \omega t$$

$$-3a^3/4 + 2\omega_1 a \equiv 0.$$

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\beta a^2 + \dots,$$

$$x(t) = a \sin \omega t - \frac{\beta a^3}{32} \sin 3\omega t + \dots$$

In general, the Duffing equation does not admit an exact symbolic solution. In the special case of the undamped ($\delta = 0$) and undriven ($\gamma = 0$) Duffing equation, an exact solution can be obtained using Jacobi's elliptic functions.

О других методах для уравнения Дуффинга (???)

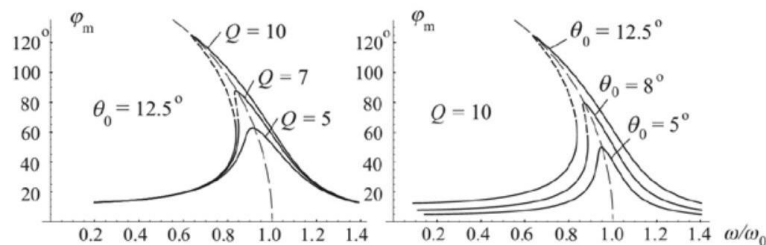
- Expansion in a Fourier series may provide an equation of motion to arbitrary precision.
- The Frobenius method yields a complex but workable solution.
- Any of the various numeric methods such as Euler's method and Runge-Kutta methods can be used.
- The homotopy analysis method (HAM) has also been reported for obtaining approximate solutions of the Duffing equation, also for strong nonlinearity.

2.1.5 Nonlinear Resonance (????)

(л. 9 Пухов)

Уравнение вынужденного движения маятника

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = f_0 \cos \omega t$$



Для того, чтобы представить себе, как выглядит резонансная кривая и изобразить ее графически, удобнее всего нарисовать зависимость ω^2 от a . Для этого представим (9.3) в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta a^2/4 \pm \sqrt{f^2/a^2 - 4\gamma^2\omega^2}$$

Для графика рисуем поэтапно: сначала пренебрежем трением $\gamma = 0$, этом случае в осях (a, ω^2) нарисует параболу $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta a^2/4$ и две гиперболы $\omega^2 = \pm f/a$. (!! добавлю

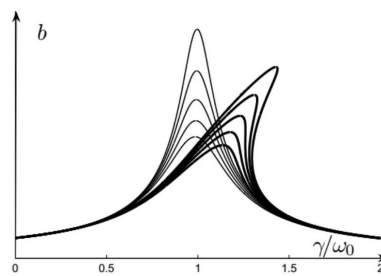
картинки из лекции!) Если теперь учесть трение $\gamma \neq 0$, то гиперболы не будут тянуться до бесконечности по $a \rightarrow \infty$. Они уткнутся в ноль при $a \approx f/2\gamma\omega_0$. Это и сформирует изогнутый пик резонансной кривой конечной высоты.

Нелинейный резонанс в Дуффинге

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t$$

$$x(t) = \operatorname{Re} [A(t) \exp(i\omega_0 t)]$$

$$\operatorname{Re} [\dot{A}(t) \exp(i\omega_0 t)] = 0$$



$$\dot{A} = -\gamma A - \frac{3i\beta}{2\omega_0} |A|^2 A - \frac{if}{2\omega_0} e^{i\delta t}.$$

$$\dot{a} + \gamma a = \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi,$$

$$\dot{\psi} = \delta - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \psi.$$

Общие черты нелинейных и нелинейных параметрических резонансов

Резонанс Ферми

2.1.6 Simplest Systems of Equations and Maps

(скорее всего перегруппирую потом)

The Lotka-Volterra equations (Predator-prey model)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \alpha \mathbf{x} - \beta \mathbf{x} \mathbf{y}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \delta \mathbf{x} \mathbf{y} - \gamma \mathbf{y}; \end{aligned}$$

x - reduced density of pray, y - of predator. Prey's α and β - the maximum prey per capita growth rate, and the effect of the presence of predators on the prey growth rate. Predator's γ, δ - the predator's per capita death rate, and the effect of the presence of prey on the predator's growth rate. All parameters are positive and real.

Имеем две особые точки: седло $(0, 0)$ и центр $(1, 1)$.

$$\omega^2(x - \ln x) + (y - \ln y) = \text{const}.$$

На фазовой плоскости системы «хищник-жертва» все траектории, кроме особых точек и положительных полуосей x и y , являются замкнутыми (происходят осцилляции).

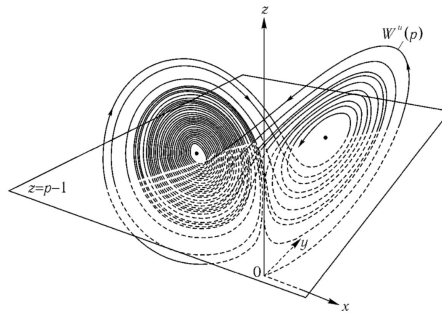
(!! картинку приведу!!!)

Так что графики хищника и жертвы - гармонические волны, но смещенные по фазе. (??)

Для оси x имеем $x(t) \sim \exp t$, что есть закон Мальтуса: при достаточном количестве пищи и отсутствии врагов-хищников жертвы размножаются экспоненциально.

Уравнения Лоренца (Lorentz equation) (!!!)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sigma, \rho, \beta > 0$$



Logistic discrete map and similar models

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

(тут 1-3 страницы будет про свойства и схожие модели)

Applications of logistic map

Applications in biology of logistic equation

(впишу там потом скоро.)

2.1.7 Parametric Oscillations, Hill's Equation, Adiabatic Method

Адиабатический инвариант осциллятора и уравнении Хилла

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0. \quad (\text{Уравнение Хилла})$$

$$\dot{\omega}_0/\omega_0^2 \ll 1 :$$

Derivation:

$$\oint p dx = E(t)/\omega(t) = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt}m(t)\frac{dx}{dt} + 2\gamma(t)\frac{dx}{dt} + k(t)x = 0.$$

Девочка на качелях меняет момент инерции (???): $dt/m(t) \rightarrow dt$,

$$\frac{d}{(dt/m)}\frac{dx}{(dt/m)} + 2\gamma(t)\frac{dx}{(dt/m)} + m(t)k(t)x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma(t)\dot{x} + \omega_0^2(t)x = 0,$$

$$x(t) \equiv y(t) \exp\left(-\int_0^t \gamma(t') dt'\right)$$

$$\ddot{y} + [\omega_0^2(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t)] y(t) = 0$$

$$\omega^2 - \gamma^2 - \dot{\gamma} \rightarrow \omega^2, \quad y \rightarrow x$$

Адиабатические инварианты для колебаний

$$\begin{aligned} \frac{d\langle E \rangle}{dt} &= \frac{\dot{\omega}}{\omega} \langle E \rangle. & \Rightarrow & \frac{E(t)}{\omega(t)} = \text{const} . \\ \frac{\omega^2 \langle x^2 \rangle}{2} &= \frac{\langle E \rangle}{2}. & & \frac{d\langle E \rangle}{dt} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \langle E \rangle. \end{aligned}$$

Адиабатический инвариант гамильтоновой системы:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{d\lambda}{dt} \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right\rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} dt = dx / (\partial \mathcal{H} / \partial p),$$

$$T = \oint \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^{-1} dx,$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = T \equiv 2\pi/\omega$$

Proof:

$$T := \oint dt = \oint \frac{dx}{\dot{x}} = \oint \frac{dx}{(\partial \mathcal{H} / \partial p)}.$$

$$S(E) = \oint p dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \oint p dx = \oint \frac{dx}{(\partial E / \partial p)}.$$

(??? finish proof)

Квазиклассическое приближение для уравнения Хилла

$$x(t) = f(t) \exp \left\{ \pm i \int \omega(t) dt \right\} \quad f - \text{slow.}$$

$$\dot{x} = x f' / f \pm i \omega x, \quad \ddot{x} \simeq -\omega^2 x \pm i \dot{\omega} x \pm 2i \omega x f' / f,$$

$$2\omega f' + f \dot{\omega} = 0$$

$$f' / f = -\dot{\omega} / 2\omega$$

$$f \sim 1/\sqrt{\omega}$$

$$x(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left\{ \pm i \int \omega(t) dt \right\}, \quad \omega^2(t) > 0,$$

$$x(t) \approx \frac{1}{\sqrt{|\omega(t)|}} \exp \left\{ \pm i \int |\omega(t)| dt \right\}, \quad \omega^2(t) < 0.$$

Example: for $\ddot{x} + \alpha t x = 0$

$$\omega^2(t) = \alpha t > 0$$

$$x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha t}} \exp \left[\pm \frac{2}{3} i \sqrt{\alpha t^3} \right].$$

$$x(t) \underset{|t| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt[4]{\alpha |t|}} \exp \left[\pm \frac{2}{3} \sqrt{\alpha |t|^3} \right]. \quad (\text{an. cont})$$

Точность ВКБ-приближения составляет (???)

$$\sim (\dot{\omega}/\omega^2)^2 \sim (\pi n)^{-1},$$

n - число осцилляций функции $x(t)$ в области применимости.

Примеры и особые случаи адиабатики и параметрических колебаний (!!!!)

(!! в механике это же, допишу там тоже! оставлю только самые важные!!)

Частица между сближающимися стенками:

Подпрыгивающий шарик:

Маятник с изменяющейся длиной:

Магнитное зеркало:

(тут словами, не такой типичный случай)

Стохастический механизм ускорения (стохастического нагрева) частиц Ферми: (???)

При столкновении заряженных частиц с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве частица должна в среднем ускоряться. Рассматривая облако как гигантскую частицу большой массы, причину ускорения можно понять следующим образом. При единичных актах столкновения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется ли облако навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, то столкновений будет больше с теми телами, скорость которых направлена навстречу частице, так как частица встречает их чаще. Отсюда следует, что частица будет чаще приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение частиц, называемое ускорением Ферми.

Осциллятор с изменяющейся массой (??)

Установим критерий медленности изменения массы. Поскольку характерное время изменения массы $\sim m/\dot{m}$, а период колебаний маятника $\sim \sqrt{l/g}$, то условием медленности будет $m\sqrt{g}/\dot{m}\sqrt{l} \ll 1$. Адиабатическим инвариантом при малых колебаниях является величина E/ω . При возрастании массы в силу (6.35) частота колебаний $\sim \sqrt{g/l}$ не зависит от массы, и период не будет меняться $T = \text{const}$. В силу адиабатического инварианта энергия $E \sim ma^2$ также не будет меняться. Следовательно, амплитуда изменяется со временем как $a \sim m^{-1/2}$.

При убывании массы в силу (6.34) адиабатическим инвариантом является величина $E/m\omega$. Частота колебаний $\sim \sqrt{g/l}$ не зависит от массы, и период не будет меняться $T = \text{const}$. Из адиабатического инварианта следует, что $E/m \sim a^2$, поэтому амплитуда колебаний изменяться не будет $a = \text{const}$.

Другие свойства параметрических колебаний и адиабатики

Точность сохранения адиабатического инварианта

(пока не актуально)

Рассмотрим ограниченное во времени воздействие на осциллятор. В случае локализованной во времени силы ее зависимость $F(t)$ может быть разложена в интеграл Фурье, содержащем все временные гармоники. Однако в пределе $t \rightarrow \infty$ «выживает» только гармоника с собственной частотой осциллятора ω_0 . Рассмотрим в качестве примера медленное «адиабатическое» включение и выключение внешней силы (см. Задачу 12). В случае медленного включения и выключения внешней силы будем моделировать ее функцией $f = f_0/(1 + (t/\tau)^2)$ с $\tau \gg 2\pi/\omega_0$ и воспользуемся формулой

$$x(t \rightarrow \infty) = \text{Im} \frac{f_0}{m\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t/T} dt}{1 + (t/\tau)^2} = \frac{\pi f_0 \tau}{2m\omega_0} e^{-\tau/T} \cos \omega_0 t.$$

При вычислении интеграла мы воспользовались теорией вычетов. Т.е. даже при очень медленном выключении силы остаются колебания на основной частоте с экспоненциально малой амплитудой.

Overview of applications of parametric oscillations

Уравнением Хилла описывается большое число систем разной природы. Это и движение частицы в изменяющемся магнитном поле, и маятник с изменяющейся длиной подвеса, и осцилляторы с изменяющимися параметрами, и сакраментальная девочка на качелях и т.д.

2.1.8 Parametric Resonance and the Mathieu Equation (!)

Об уравнении Матье

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta \cos 2x)y = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0.$$

$$\omega_0 = \frac{\omega n}{2}$$

ω_0 - частота колебания качелей, ω - частота приседаний девочки, $n = 1, 2, \dots$

Правильное нулевое приближение вблизи первого резонанса ($\omega \approx 2\omega_0$):

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}$$

Область неустойчивости вблизи первого резонанса

$$\delta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\varepsilon \omega_0}{4} \right)^2$$

(δ это что вообще???)

Пороговое значение амплитуды модуляции

$$\varepsilon_{\min} = \frac{4\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{Q}$$

Метод медленных амплитуд

Метод усреднения

Метод переопределения

Качественно, почему параметром можно раскачивать систему?

(??)

(?? тут абзац про то, как вообще работают качели! напишу нормальный ответ!)

равна потенциальной энергии при максимальном угле отклонения φ_n :

$$\frac{L_2^2}{2ml_2^2} = mgl_2 (1 - \cos \varphi_n).$$

Здесь $L_2 = mv_2 l_2$ - момент импульса маятника в нижней точке, а индекс n означает n -ое по счету колебание маятника. В тот момент, когда заканчи-

Способ определения областей параметрической неустойчивости (!?!?!?)

(тут этот алгоритм, и куча задач на него. пока не знаю.)

2.1.9 Kapitza Oscillator, Oscillations of Parameters

(!! впишу уже в ближайший подход!)

Типичный маятник Капицы

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = f(x) \cos \omega t$$

$$U_{\text{eff}}(x) := U(x) + \frac{f^2(x)}{4m\omega^2}$$

Устойчивость инвертированного маятника:

$$\frac{a}{l} \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$$

Proof by introduction of an effective potential:

Метод усреднения для маятника Капицы

2.1.10 Coupled Oscillations, Beating

1. Биения. Непересечение термов.

Рассмотрим два маятника m_1, m_2 и длиной стержней l_1, l_2 , связанных пружиной k . Расстояние от точки закрепления пружин до осей вращения маятников a . Для малых углов отклонения,

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{x}_1 &= -m_1 g l_1 x_1 + k a^2 (x_2 - x_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g l_2 x_2 - k a^2 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &:= \nu^2(x_2 = 0) = g/l_1 + k a^2 / m_1 l_1^2 \\ \nu_2^2 &:= \nu^2(x_1 = 0) = g/l_2 + k a^2 / m_2 l_2^2. \\ \alpha_1 &:= k a^2 / m_1 l_1^2, \quad \alpha_2 := k a^2 / m_2 l_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \nu_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \nu_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 &= 0. \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \sim \exp(i\omega t),$$

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega^4 - \omega^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0.$$

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 \pm \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right]. \quad (\text{normal modes})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ q_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

$$q_1 = \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}, \quad q_2 = \frac{\nu_2^2 - \omega_2^2}{\alpha_2}$$

ν_1 и ν_2 всегда лежат между собственными частотами ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$. q_1 на частоте ω_1 всегда больше нуля, а q_2 на частоте ω_2 всегда меньше нуля. Поэтому колебания маятников на частоте ω_1 всегда происходят в фазе, а колебания на частоте ω_2 - в противофазе.

2. Обмен энергий между парциальными системами.

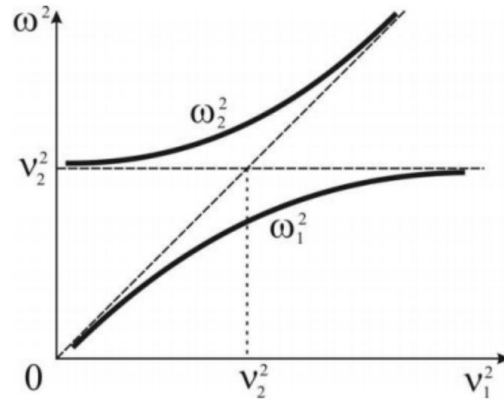
$$x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \frac{1}{q_1 + |q_2|} (|q_2| \cos \omega_1 t + q_1 \cos \omega_2 t), \\ x_2 &= x_0 \frac{q_1 |q_2|}{q_1 + |q_2|} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &\equiv a(t) \cos[\omega_1 t - \varphi(t)], \\ a^2(t) &= \frac{x_0^2 [q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 |q_2| \cos(\omega_2 - \omega_1) t]}{(q_1 + |q_2|)^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi(t) &= -\frac{|q_2| \sin(\omega_2 - \omega_1) t}{q_1 + |q_2| \cos(\omega_2 - \omega_1) t}. \end{aligned}$$

Если частоты ω_1 и ω_2 не слишком далеки друг от друга, то (4.9) можно рассматривать как промодулированное колебание с медленно меняющейся со временем амплитудой колебаний с периодом $2\pi (\omega_2 - \omega_1)$. $x_{\max} = x_0$, а $x_{\min} = x_0 (q_1 - |q_2|) / (q_1 + |q_2|)$.

$$x_2(t) = x_0 \frac{2q_1 |q_2|}{q_1 + |q_2|} \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right).$$



(ниже очень все будет так же как в теории Пухова, потому что короче не сказать)

При равенстве парциальных частот $v_1 = v_2 = v$ коэффициенты распределения амплитуд также становятся равными по модулю $q_1 = |q_2| = q$, а колебания маятников приобретают вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ x_2(t) &= x_0 q \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right). \end{aligned}$$

Для одинаковых маятников, когда $q = 1$, это классический случай биений. Оба маятника совершают биения, огибающая которых сдвинута по времени на $\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Периодически происходит полная перекачка энергии от одного маятника к другому. В этом и заключается физический смысл понятия сильной «связанности». Время передачи энергии равно $\tau = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Так как обычно $\alpha \ll v^2$, то это время составляет $\tau = \pi\nu/\alpha$, т.е. обратно пропорционально коэффициенту связи α . Условие $\alpha \ll v^2$ означает, что частоты ω_1 и ω_2 близки и колебания, описываемые формулами (4.9) и (4.11), имеют характер биений.

Итак, в случае синхронизма парциальных частот ($v_1 = v_2 = v$) происходит полная перекачка энергии из одной парциальной подсистемы в другую. Величина коэффициентов связи определяет время перекачки: чем они больше, тем меньше время перекачки. Если же парциальные частоты сильно различаются, то имеет место слабый обмен энергией между подсистемами и малая «глубина» биений даже при сильной связи. Поэтому более информативно взаимодействие подсистем характеризуется не коэффициентами связи α_1, α_2 , а так называемой связанностью подсистем $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}/|v_1^2 - v_2^2|$

3. Фигуры Лиссажу.

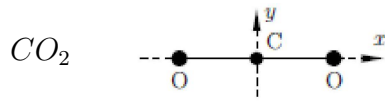
$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_x^2 = 2k_x/m, \omega_y^2 = 2k_y/m$. Движения в направлениях x и y независимы, и каждое из них представляет собой гармонические колебания.

Если частоты равны лишь приблизительно $\omega_x \approx \omega_y$, то фигура Лиссажу похожа на эллипс, но незамкнута. При каждом следующем периоде, через время $2\pi/\omega_x$, сдвиг фаз φ увеличивается на величину $2\pi(\omega_x - \omega_y)/\omega_x$ по сравнению с предыдущим. Поэтому кривая Лиссажу при $\omega_x \approx \omega_y$ - это медленно деформирующийся эллипс, проходящий все фазы от сжатия в одну диагональ до сжатия в другую за время $\pi/(\omega_x - \omega_y)$.

(когда-то додумаю потом не простые кривые, простые - понятно, потом допишу)

4. Колебания молекулы



$$\begin{aligned} m(x_1 + x_3) + Mx_2 &= 0 \\ m(y_1 + y_3) + My_2 &= 0 \\ y_1 - y_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$U_{co_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|, \alpha),$$

α - угол между $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$. В окрестности равновесия приращения достаточно найти в линейном приближении по $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l + x_2 - x_1$ и $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = l + x_3 - x_2$, также $\alpha \approx (y_1 - y_2)/l + (y_3 - y_2)/l$,

$$U \approx U(l, l, 0) + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{\kappa l^2 \alpha^2}{2}, \quad k > 0, \quad \kappa > 0$$

$$\begin{aligned} L = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m^2}{M} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + m \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \dot{y}_1^2 - \\ - 2\kappa \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 y_1^2 - \frac{k}{2} \left\{1 + \frac{2m}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right)\right\} (x_1^2 + x_3^2) - \frac{2km}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right) x_1 x_3. \end{aligned}$$

Она распадается на сумму двух функций, зависящей от $y_1, \dot{y}_1$ (валентные колебания) и функции, зависящей от $x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3$ (деформационные колебания).

$$m\ddot{y}_1 + 2\kappa \left(1 + \frac{2m}{M}\right) y_1 = 0 \quad (\text{деформац})$$

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{2\kappa}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}.$$

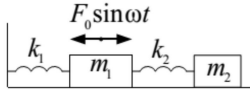
$$\begin{pmatrix} m\rho & m^2/M \\ m^2/M & m\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(1 + 2m\rho/M) & 2km\rho/M \\ 2km\rho/M & k(1 + 2m\rho/M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{вал})$$

$$\rho = 1 + m/M.$$

$$-m\rho\omega^2 + k(1 + 2m\rho/M) = \pm (-m^2/M\omega^2 + 2km\rho/M)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k(2m + M)}{mM}}.$$

5. Резонанс Фано. Антирезонанс. Гаситель колебаний.



$$\begin{aligned} -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f_0 \sin \omega t &= m_1 \ddot{x}_1, \\ -k_2 (x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2, \end{aligned}$$

Установившееся решение системы уравнений: $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, a_1, a_2 являются амплитудами вынужденных колебаний каждой массы, а значения φ_1 и φ_2 определяют сдвиг фазы колебаний каждой массы относительно внешней силы. Если не интересоваться фазами колебаний и найти только амплитуды колебаний, то в качестве частного решения можно взять $x_1 = a_1 \sin \omega t$, $x_2 = a_2 \sin \omega t$. Это дает систему двух алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} -a_1 m_1 \omega^2 + k_1 a_1 - k_2 (a_2 - a_1) &= f_0, \\ -a_2 m_2 \omega^2 + k_2 (a_2 - a_1) &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f_0 (k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}, \\ a_2 &= \frac{f_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}. \end{aligned}$$

Значения амплитуд существенно зависят от частоты вынуждающей силы. При определенных значениях ω знаменатели в (4.25) обращаются в нуль, а величины a_1 и a_2 стремятся к бесконечности. Это означает наступление резонанса в системе. Значения резонансных частот определяются из биквадратного уравнения

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0.$$

Интересен факт обращения в нуль числителя в первой из формул (4.25). Если частота возбуждения удовлетворяет равенству

$$\omega = \omega_* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

то для амплитуд a_1 и a_2 находим $a_1 = 0$, $a_2 = -f_0/k_2$.

6. Теорема Бертрана о двух типах потенциалов для замкнутости траекторий ($U(r) = \alpha/r$ и $U(r) = m\omega^2 r^2/2$)

$$\Phi(E, L) = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}$$

(не знаю, как доказать, когда-то потом подумаю.)

Нас интересует не временная динамика $r(t)$ и $\varphi(t)$, а форма орбиты $r = r(\varphi)$. Параметром становится угол φ , $L dt = m r^2 d\varphi$.

$$m \ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(U + \frac{L}{2mr^2} \right)$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{d}{du} U \left(\frac{1}{u} \right) = 0 \quad (\text{Binet eq})$$

(!! потом разберу, не малая тема!)

8. Формула Линдштедта.

(??? потом додумаю)

$$T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''}} \left(1 + \frac{E}{24U''} \left(5 \left(\frac{U'''}{U''} \right)^2 - 3 \frac{U'''}{U''} \right) + \dots \right)$$

Proof:

$$m\ddot{x} + \partial U / \partial x = 0,$$

$$U_{\text{near equil}}(x) = \frac{1}{2}U''x^2 + \frac{1}{6}U'''x^3 + \frac{1}{24}U''''x^4 + \dots,$$

$$T_{A \ll U''/U'''} = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{48} \left(5 \left(\frac{U'''}{U''} \right)^2 - 3 \frac{U'''}{U''} \right) + \dots \right),$$

$$T_0 := 2\pi \sqrt{m/U''}.$$

Proof: Поскольку потенциальная энергия слабо отличается от гармонической и задана в виде ряда (4.45), то и зависимость периода колебаний

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

от энергии следует также искать в виде ряда по E или по амплитуде $a = \sqrt{2E/U''}$. Для этого ряд $U(x)$ (4.45), стоящий в (4.47) под корнем в знаменателе, удобно «перебросить» в числитель.

(словами допишу оставшиеся шаги, формулы тут не актуальны)

2.1.11 Self-Oscillations, Van der Pol Equation

Об осцилляторе Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} (x^2 - 1) + x = 0$$

Имеется нелинейное трение, положительное при больших x и отрицательное при малых. За счет этого фазовая кривая не замкнута, а также имеется стабилизация по амплитуде.

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x = 0 \quad (\text{van der Pol})$$

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda) \dot{x} + x = 0 \quad (\text{Rayleigh})$$

Они эквивалентны с точностью до замены $x/\sqrt{3} \rightarrow \dot{x}$. (??)

Радиус предельного цикла при квазигармонических ($\lambda \ll 1$) автоколебаниях

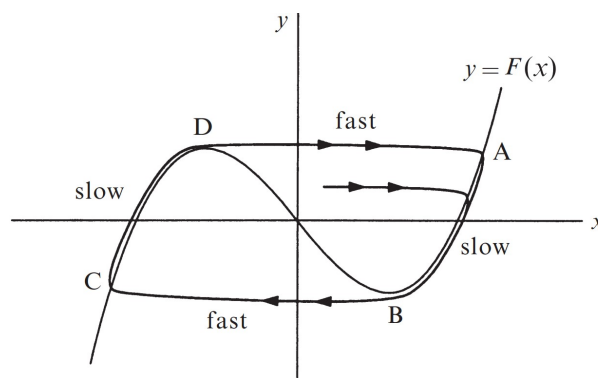
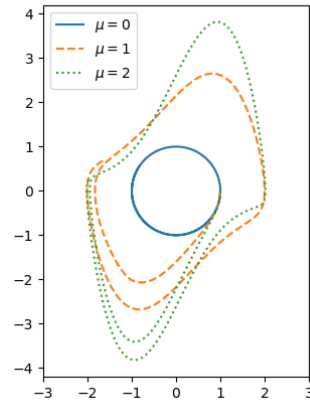
$$a = 2\sqrt{\lambda}, \quad a = 2\sqrt{\lambda/3}.$$

Период релаксационных ($\lambda \gg 1$) колебаний одинаков

$$T = \lambda(3 - 2 \ln 2).$$

Это типичная модель автоколебаний.

The solution of a Van der Pol oscillator has a limit cycle.



Solution осцилляторов Ван дер Поля и Рэля

$\sqrt{\varepsilon}x \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow \lambda$, вблизи точки бифуркации:

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x = 0,$$

Заменой $\dot{y} = x/\sqrt{3}$ Ван дер Поль приводится к уравнению Рэля

$$\ddot{y} + (\dot{y}^2 - \lambda) \dot{y} + y = 0$$

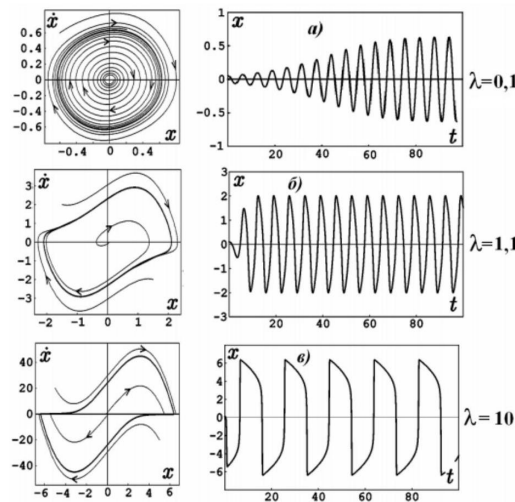
Уравнение Ван дер Поля (10.1) имеет единственную особую точку $x = \dot{x} = 0$. Она является устойчивым фокусом при $-2 < \lambda < 0$, неустойчивым фокусом при $0 < \lambda < 2$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 2$.

При $\lambda > 0$ на фазовой плоскости возникает предельный цикл, отвечающий режиму автоколебаний.

Точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации Хопфа рождения цикла, а условие $\lambda > 0$ является условием самовозбуждения осциллятора.

При $\lambda \ll 1$ автоколебания являются квазигармоническими.

При $\lambda \gg 1$ автоколебания становятся существенно негармоничными, когда на фазовой кривой предельного цикла можно выделить участки быстрого и медленного изменения переменной x . Такие автоколебания называются релаксационными.



(???? и что тут смотреть важного???)

Квазигармонические автоколебания

Радиус предельного цикла. Бифуркация Хопфа

$$E = \dot{x}^2/2 + x^2/2$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = (-x^2 + \lambda) \dot{x}^2,$$

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-x^2 + \lambda) \dot{x}^2 dt.$$

Таким образом, в нулевом приближении $dE^{(0)}/dt = 0$ и $x_0(t) = a \cos t$, а в первом приближении величина $dE^{(1)}/dt = \overline{dE/dt}$ дается выражением (10.11), в которое подставлено $x_0(t)$.

Поскольку в нулевом приближении осциллятор Ван дер Поля совершает гармонические колебания $x_0 = a \cos t$ с амплитудой a и скоростью $\dot{x} = -a \sin t$, из (10.11) получаем

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos^2 t + \lambda) \sin^2 t dt$$

$$\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2, \sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2,$$

$$\overline{\frac{dE}{dt}} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{a^2}{8} (-a^2 + 4\lambda).$$

Значит, темп изменения энергии меняет знак. При $a > 2\sqrt{\lambda}$ фазовая кривая крутится и медленно падает, наматываясь на предельный цикл. При $a < 2\sqrt{\lambda}$ фазовая кривая раскручивается к этому же предельному циклу, также наматываясь на него. Таким образом, радиус предельного цикла равен $a = 2\sqrt{\lambda}$.

В общем случае, когда параметр λ проходит бифуркационное значение $\lambda_c = 0$, фазовый портрет системы меняется **бифуркацией Хопфа (рождения цикла)**: при $\lambda < \lambda_c$ на фазовой плоскости осциллятора имеется единственное состояние равновесия - устойчивый фокус: при $\lambda > \lambda_c$ оно становится неустойчивым, и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл. Радиус этого предельного цикла (амплитуда

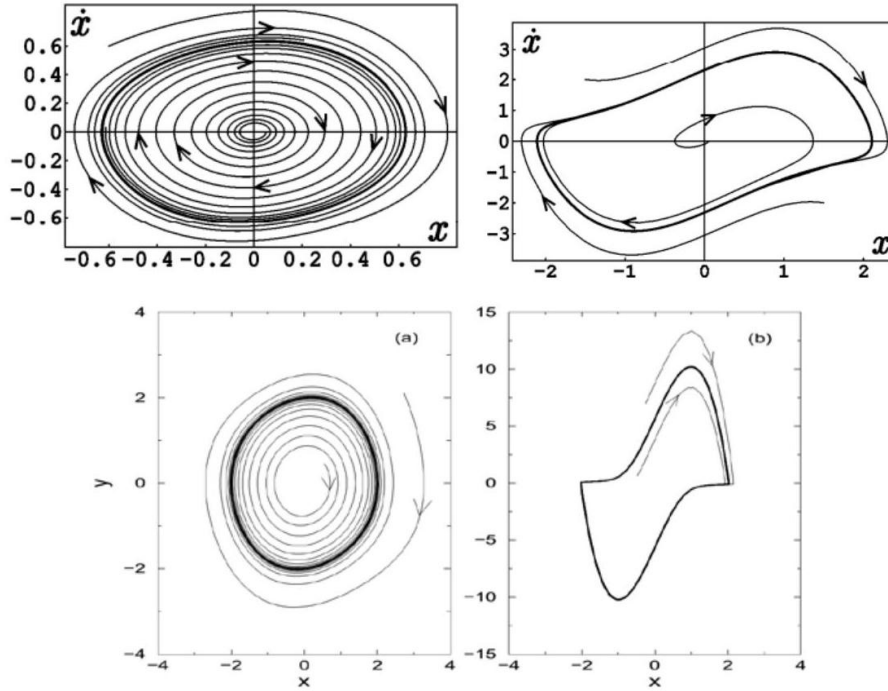
автоколебаний) с ростом параметра λ увеличивается корневым образом $\sim \sqrt{\lambda}$. Поскольку амплитуда автоколебаний с ростом λ возникает и увеличивается плавно, говорят, что это мягкий режим самовозбуждения осциллятора.

Для всех систем с мягким самовозбуждением закон

$$r_{\text{пред. ц.}} \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$$

является универсальным. Это связано с топологическим характером перестройки фазового портрета осциллятора.

Релаксационные автоколебания



Введем «медленное время» $\tau = t/\lambda$ и $u = y/\lambda^{3/2}$.

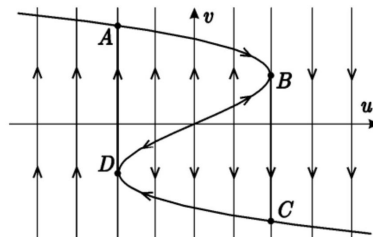
$$\varepsilon u'' + (u'^2 - 1)u' + u = 0 \quad u' := \frac{du}{d\tau}$$

$$\varepsilon = \lambda^{-2} \ll 1$$

$$\begin{cases} u' = v, \\ \varepsilon v' = (1 - v^2)v - u, \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1 - v^2)v - u}{\varepsilon v}$$

$$u = v - v^3$$



$$d\tau = \frac{du}{v} = \frac{d(v - v^3)}{v}.$$

period:
$$\tau = 2 \int_{v_A}^{v_B} \left(\frac{dv}{v} - 3v dv \right) = 2 \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{v_A}^{v_B},$$

v_A и v_B - значение в точках перескока с ветви на ветвь нуль-изоклины (10.17). v_B находим из $du/dv = 0$, получаем $v_B = 1/\sqrt{3}$. а v_A есть корень $v - v^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $v_A = 2v_B = 2/\sqrt{3}$.

$$T = 2\lambda \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \lambda(3 - 2\ln 2).$$

$$T \sim \lambda.$$

$$\text{Amplitude} \sim \lambda^{3/2}.$$

Типичные автоколебания в RC цепях

(допишу, очень типичные примеры именно в среде таких моделей.)

2.1.12 Synchronization of Oscillations, Kuramoto Model and Arnold Tongues

(мб сделаю больше раздел, пока хватит)

(!!?!?!? какие частоты к каким-то пригитиваются, а какие нет????)

По Пухову (???)

Уравнение Адлера, $\Delta = (\omega^2 - 1) / \lambda\omega$:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi.$$

Язык Арнольда, область синхронизации

$$-\varepsilon < \Delta < \varepsilon.$$

Механизм синхронизации.

Отклик осциллятора Ван дер Поля на гармоническую силу - решение через переход к уравнению Адлера, области синхронизации - языки Арнольда

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x = f \sin \omega t$$

При $f = 0$ колебания имеют $\omega_{\text{vdp}} = 1$, $A_{\text{vdp}} = 2\sqrt{\lambda}$. При $\lambda = 0$ колебания $\omega_f = \omega$, $A_f = f / |\omega^2 - 1|$. Какой из эффектов победит в этой конкуренции?

Решаем медленно меняющимися амплитудами:

$$x(t) \equiv \frac{1}{2}a(t)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}a^*(t)e^{-i\omega t},$$

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^*e^{-i\omega t} = 0.$$

$$\dot{a} + i \frac{\omega^2 - 1}{2\omega} a = \frac{\lambda a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} - \frac{f}{2\omega}.$$

$$\tau := \lambda t / 2, \quad b := a / 2\sqrt{\lambda}, \quad \Delta := (\omega^2 - 1) / \lambda \omega, \quad \varepsilon := f / 2\omega \lambda^{3/2},$$

$$\dot{b} + i\Delta b = b - |b|^2 b - \varepsilon$$

$$b \equiv r \exp(i\varphi),$$

$$\dot{r} = r - r^3 - \varepsilon \cos \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\varepsilon}{r} \sin \varphi.$$

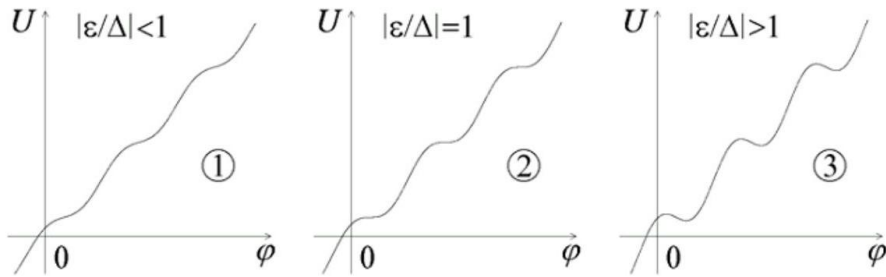
(??? тут еще упрощения)

Уравнение Адлера:

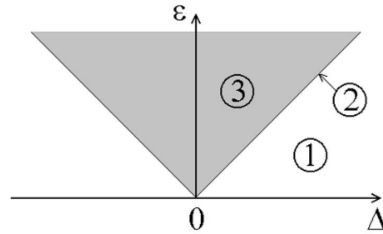
$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi$$

$$\dot{\varphi} = -\partial U / \partial \varphi.$$

$$U(\varphi) := \varphi \Delta + \varepsilon \cos \varphi,$$



Синхронизация достигается в $-\varepsilon < \Delta < \varepsilon$. Эта область на плоскости параметров (Δ, ε) , отвечающая синхронизации, называется языком Арнольда:



Итак, внутри треугольного языка Арнольда установившийся режим системы - это синхронизация с внешним возмущением, которому отвечает устойчивая неподвижная точка уравнения (11.7). В режиме синхронизации амплитуда колебаний постоянна $r = 1$, частота равна частоте внешнего воздействия ω , а фаза φ фиксирована.

Таким образом, в соревновании автономных автоколебаний с вынужденными колебаниями «выигрыш» распределяется следующим образом. Синхронизированные автоколебания происходят на частоте вынуждающей силы ω , но с амплитудой автономных автоколебаний $2\sqrt{\lambda}$. Здесь в конкуренции внешнее воздействие навязывает свою частоту автономным автоколебаниям, а автономные автоколебания сохраняют радиус своего предельного цикла. Результатом соревнования является «ничья». Вне языка Арнольда синхронизация отсутствует и возникают сложные колебания, близкие к хаотическим.

Фазовая динамика двух связанных осцилляторов Ван дер Поля.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} + (y^2 - \lambda)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}$$

(?? строчка про дельту!!)

(???)

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ \dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - 2r), \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{r}{R}\mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= -\Delta + \frac{r}{R}\mu \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}$$

Для $\lambda \ll 1$ и $\Delta \ll 1$, будет $R = r = 1$,

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= -\Delta + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}$$

Для относительной фазы получаем уравнение Адлера:

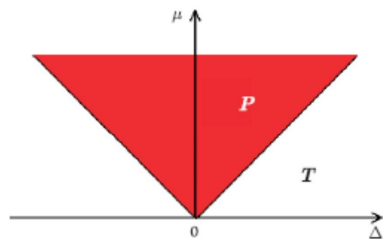
$$\dot{\varphi} = \Delta - 2\mu \sin \varphi,$$

Итак, (11.16) - это классическое уравнение Адлера (11.7), которое описывает фазовую динамику двух связанных автогенераторов. Оно показывает, что возможно два различных режима совместных колебаний: захват относительной фазы при $|\Delta| < 2\mu$ и режим хаотических биений при $|\Delta| > 2\mu$. На плоскости параметров частотная расстройка-константа связи (Δ, μ) указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда. Основание языка расположено в точке $\Delta = 0$, что отвечает резонансному условию в системе, когда собственные частоты первого и второго осцилляторов совпадают. При $\Delta \neq 0$ синхронизация осцилляторов уже не может происходить при сколь угодно малой константе связи. В фазовом приближении этими двумя типами поведения и исчерпываются все возможности для двух связанных осцилляторов Ван дер Поля.

Захват двух осцилляторов происходит на их центральной частоте $1 + \Delta/4$. Действительно, в наших обозначениях в этом случае скорость изменения относительной фазы равна нулю $\dot{\varphi} = 0$, так что $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$. Тогда из (11.16) и первого уравнения (11.15) получаем для частоты захвата

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{\Delta}{4}$$

(среднее арифметическое собственных частот первого и второго осцилляторов).



С физической точки зрения важна наблюдаемая частота колебаний. Она может быть вычислена как среднее значение скорости изменения фазы $\omega = \langle \dot{\psi} \rangle$. Если осцилляторы не связаны, то из (11.15) находим, что их собственные частоты ω_1 и ω_2 в принятых обозначениях и нормировке равны 1 и $1 + \Delta/2$. Это соответствует исходным уравнениям (11.8). Если осцилляторы связаны, то их совместная частота генерации равна

$$\omega = 1 + \frac{\Delta}{4}$$

Модель Курамото

Пусть есть $N \gg 1$ осцилляторов, динамика фазы i -го:

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Для взаимодействия $K \geq 0$ - константа, $1/N$ обеспечивает конечность при $N \rightarrow \infty$. Полагаем, что собственные частоты осцилляторов - независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения $g(\Omega)$, которая имеет вид симметричного пика, centered в некоторой точке Ω_0 . При превышении K порогового значения K_c в модели Курамото происходит синхронизация фаз.

$$re^{i\psi} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (\text{order par.})$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i$$

$$\omega_i = \Omega_i - \Omega_0.$$

$$\partial_t n(\theta|\omega) = -\partial_\theta[(\omega - Kr \sin \theta)n(\theta|\omega)] \quad (\text{Уравнение Лиувилля})$$

$$n(\theta|\omega) = n_{\text{lock}}(\theta|\omega)I(|\omega| \leq Kr) + n_{\text{drift}}(\theta|\omega)I(|\omega| > Kr)$$

$$n_{\text{lock}}(\theta|\omega) = \delta\left(\theta - \arcsin \frac{\omega}{Kr}\right),$$

$$n_{\text{drift}}(\theta|\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}}{2\pi|\omega - Kr \sin \theta|}$$

(?? где там появлялся g ???)

Уравнение самосогласования:

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \cdot g(\Omega_0 + Kr \sin \theta)$$

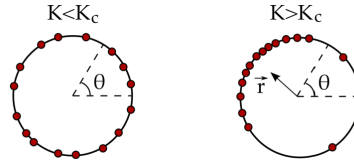
(?? получается из расписывание параметра порядка (???)

Для $Kr \ll 1$

$$\frac{\pi}{2} g(\Omega_0) K + \frac{\pi}{16} g''(\Omega_0) K^3 r^2 = 1.$$

Разложим, получим критическое значение, после которого есть решения

$$K_c = \frac{2}{\pi g(\Omega_0)}$$



Модель Сакагучи-Курамото

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \xi_i$$

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2).$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i + \xi_i,$$

$\omega_i := \Omega_i - \Omega_0$ - расстройка фазы.

$$\partial_t n(\theta|\omega) = -\partial_\theta[(\omega - Kr \sin \theta)n(\theta|\omega)] + D\partial_\theta^2 n(\theta|\omega) \quad (\text{ур. Фоккера-Планка})$$

При $Kr \ll D$,

$$n(\theta|\omega) = \frac{1}{2\pi} + \frac{DKr}{2\pi(D^2 + \omega^2)} \left(\cos \theta + \frac{\omega}{D} \sin \theta \right) + O(r^2).$$

Уравнение самосогласования для Сакагучи-Курамото:

$$1 = \frac{1}{2}DK \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega + \Omega_0) \frac{d\omega}{D^2 + \omega^2} + O(r^2), \quad \Rightarrow$$

$$K_c(D) = \frac{2}{D} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega + \Omega_0) \frac{d\omega}{D^2 + \omega^2} \right]^{-1}$$

2.2 Typical Mathematics for Oscillations

(все отдельные и важные методы тут.)

2.2.1 General Formalism for Oscillations

(!!! всюду указания на вывод утверждений добавлю!)

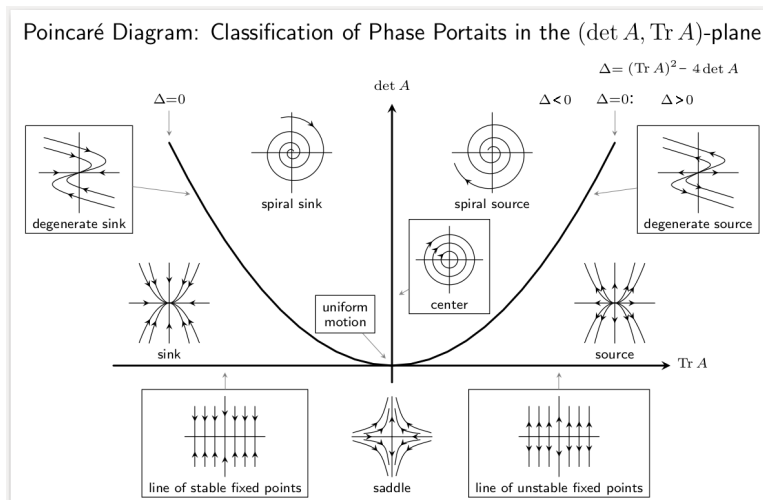
I. Динамические системы. Фазовая плоскость

Для $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ неподвижная (особая) точка это $\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$, матрица Якоби это $J = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.
Для $\delta x, \delta y \propto \exp(\lambda t)$ из $\det(J - \lambda E) = 0$

$$(\lambda^2 - \text{tr } J \cdot \lambda + \det J = 0), \quad \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } J}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr } J)^2}{4} - \det J}$$

Классификация особых точек:

$\operatorname{Re} \lambda = 0$, центр, бифуркация рождения цикла,
 $\operatorname{Re} \lambda < 0$, устойчивый фокус,
 $\operatorname{Re} \lambda > 0$, неустойчивый фокус,
 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, устойчивый узел,
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, неустойчивый узел,
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, седло.



Теорема Лиувилля (????)

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{d(\Delta V)/dt}{\Delta V} = \operatorname{tr} J$$

Ибо из $\Delta \dot{x} = f_x \Delta x$ и $\Delta \dot{y} = g_y \Delta y$ следует $\frac{d}{dt}(\Delta x \Delta y) = \operatorname{tr} J \cdot \Delta x \Delta y$

2.2.2 Evaluation of Integrals for Oscillations

Типичные формулы интегралов

Об эллиптических интегралах

2.2.3 Bifurcations (!!!!!!!)

(I'll write later basics about them)

2.2.4 Stability Analysis: Basic Methods

(????)

2.3 Other Well-Known Oscillatory Systems and Methods

(то, что известно, но гораздо реже встречается.)

2.3.1 Stochastic Resonance

(л 12 Пухова конспект тут будет)

2.3.2 Quantum Oscillations

(л 12 Пухова конспект тут будет)

2.3.3 Perturbation Methods: Essence by Naifeh (!!!!!!!)

(очень там много крутых методов, напишу скоро!)

Part II

Basic Theory of Oscillations

3 Typical Oscillations

(!!!! это все буду когда-то нормально переписывать, структура Пухова очень сырая. когда-то потом.)

3.0.1 Basic Examples of Oscillations

5. «Взрывной» рост численности населения Земли

Рассмотрим теперь систему с 0,5 степенью свободы. Подробные и достоверные демографические данные о динамике роста народонаселения Земли за последние три сотни лет показывают, что число людей $N(t)$ растёт не в соответствии с законом Мальтуса $\dot{N} \sim N$, т.е. экспоненциально, а быстрее. Число $N(t)$ растёт в соответствии с законом бимолекулярной реакции $\dot{N} \sim N^2$ парных столкновений мужских и женских особей, что приводит к режиму с обострением. Действительно, решением в этом случае является гипербола $N(t) \sim (\tau - t)^{-1}$, т.е. население Земли обращается в бесконечность за конечное время. Решение такого гиперболического вида соответствует обострению по времени. В частности, демографические данные соответствуют оценке $\tau \approx 2033$ г., т.е. модель предсказывает бесконечно большое число людей на Земле к этому году. Естественно, что реально бесконечная численность не является достижимой. В окрестности точки $t = \tau$ начнут проявляться процессы, ограничивающие рост населения. Рассмотрим рост численности населения Земли подробнее.

Оказывается, что несмотря на территориальные, расовые, сословные и прочие барьеры, темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Считая с большой точностью, что они равны $N_{\text{Ж}} = N_{\text{М}} = N/2$, получаем

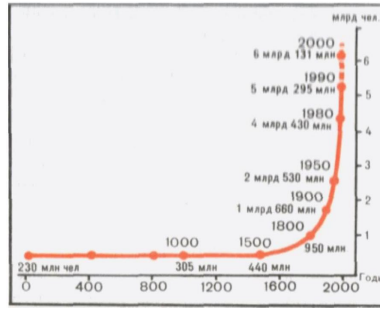
$$\dot{N} = \frac{N^2}{C}$$

где C - постоянная Фёрстера. Интегрируя (1.9) с учетом начального условия $N(t_0) = N_0$, получаем

$$N = \frac{C}{\tau - t}$$

где $\tau = t_0 + CN_0^{-1}$ - момент времени, когда число обитателей земного шара обратится в бесконечность. Поскольку при $t_0 = 2000$ г. население Земли составляло $N_0 \approx 6$ млрд человек и учитывая, что значение постоянной Фёрстера примерно составляет $C \approx 2 \cdot 10^{11}$ летчел, можно предсказать дату «конца света» $\tau \approx 2033$ г. Этот сенсационный результат проник даже в средства массовой информации, где катастрофа была назначена на пятницу 13 ноября 2036 года.

Конечно, на самом деле население Земли физически не может обратиться в бесконечность за конечное время. В последние годы перед обострением должны вступить в действие тормозящие факторы, природа и параметры которых в последнее время бурно обсуждаются. Таким образом, демография человечества переживает сейчас особый момент развития, которого раньше в истории никогда не было.

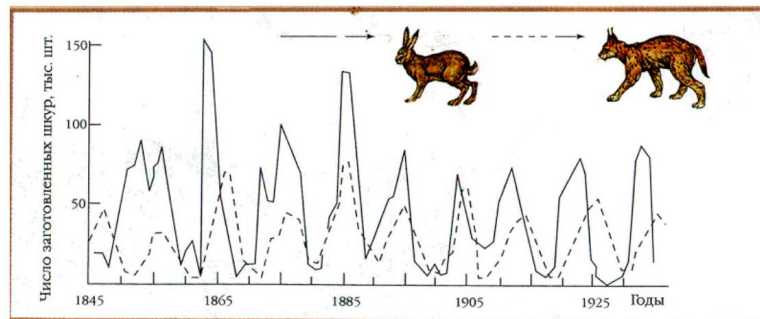


6. Система «хищник-жертва»

В этой задаче рассматриваются два вида животных, один из которых питается другим. Ее можно сформулировать в виде вопроса: могут ли рыси съесть всех зайцев (или щуки - всех карасей)? Пусть в замкнутом ареале обитают $N_2(t)$ хищников, которые питаются только жертвами. $N_1(t)$ жертв - вегетарианцы и питаются только растительной пищей. Тогда динамика численностей двух совместно существующих видов описывается уравнениями Лотки-Вольтерры:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2), \\ \dot{N}_2 &= -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1).\end{aligned}$$

Здесь ε_1 - коэффициент размножения жертв в отсутствие хищников, ε_2 - коэффициент вымирания хищников в отсутствие жертв. Пропорционально частоте столкновений хищников и жертв $\sim N_1 N_2$ происходит гибель жертв с коэффициентом γ_2 и размножение хищников с коэффициентом γ_1 . По смыслу сказанного, все введенные коэффициенты положительны.



Подходящим обезразмериванием переменных и времени систему (1.11) удобно привести к безразмерному виду:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-y + 1), \\ \omega^{-2} \dot{y} &= -y(-x + 1).\end{aligned}$$

Здесь $x = \gamma_1 N_1 / \varepsilon_2$, $y = \gamma_2 N_2 / \varepsilon_1$ и введены безразмерное время $\varepsilon_1 t \rightarrow t$ и частота $\omega^{-2} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$.

Из (1.12) видно, что на фазовой плоскости (x, y) есть две особые точки: седло $(0, 0)$ и центр $(1, 1)$. В этом легко убедиться, рассмотрев малые отклонения от стационарных значений. Например, для точки $(0, 0)$ это $x = \delta x \ll 1$, $y = \delta y \ll 1$ дает

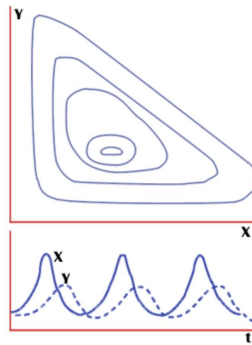
$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= +\delta x, \\ \delta \dot{y} &= -\omega^2 \delta y.\end{aligned}$$

Из решений (1.13) $\delta x \sim e^{+t}$, $\delta y \sim e^{-t/\omega^2}$ видим, что фазовые траектории гиперболы. Для точки $(1, 1)$ $x = 1 + \delta x$, $y = 1 + \delta y$ получаем уравнение в вариациях:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= -\delta y, \\ \delta \dot{y} &= +\omega^2 \delta x.\end{aligned}$$

Дифференцируя второе уравнение и подставляя в первое, получаем уравнение колебаний $\delta \ddot{y} + \omega^2 \delta y = 0$. Это означает, что фазовые траектории эллипсы, а особая точка $(1, 1)$ - центр.

Кроме того, при больших величинах $y \gg 1$ и $x \gg 1$ из (1.12) легко получить первый интеграл $\omega^2 x + y = \text{const}$. Для этого нужно пренебречь единицами в скобках и сложить уравнения (1.12). Таким образом, вдали от начала координат фазовые траектории - падающие прямые линии. Данный выше несложный анализ полностью характеризует картину фазовой плоскости системы, дает полное представление о виде фазовых кривых.



Все отмеченные выше черты фазовой плоскости системы (1.12) можно было бы получить сразу, заметив существование у (1.12) точного первого интеграла движения. Разделив второе уравнение (1.12) на первое и разделив переменные, получаем

$$\omega^2(x - \ln x) + (y - \ln y) = \text{const}.$$

Наличие первого интеграла наводит на мысль, что систему уравнений «хищник-жества» (1.12) можно привести к гамильтоновой форме. Действительно, замена $u = \ln x$, $v = \ln y$ приводит (1.12) к канонической форме $\dot{u} = H_v$, $\dot{v} = -H_u$ с гамильтонианом $H(u, v) = (v - e^v) - \omega^2(u - e^u)$, откуда понятно происхождение интеграла движения (1.15) (см. Задачу 1.7).

Из (1.15) сразу следует характер фазовых траекторий при $x, y \ll 1$ (седло), $x, y \approx 1$ (центр) и $x, y \gg 1$ (падающие линии). Таким образом, на фазовой плоскости системы «хищник-жества» все траектории, кроме особых точек и положительных полуосей x и y , являются замкнутыми, то есть отвечают периодическому движению. Это значит, что в рамках модели Лотки-Вольтерры рыси никогда не смогут съесть всех зайцев.



Оси координат $x > 0$, $y > 0$ являются особыми траекториями. Для оси x имеем $x(t) \sim \exp t$.

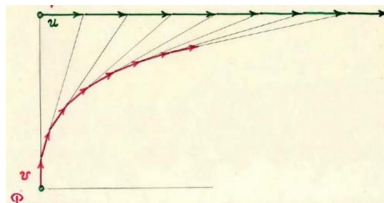
Это и есть закон Мальтуса, говорящий о том, что при достаточном количестве пищи и отсутствии врагов-хищников жертвы размножаются экспоненциально. Таким образом,

положительная полуось x (с выколотой особой точкой $x = 0$) представляет собой особую траекторию системы. Двигаясь вдоль нее, система выходит из положения равновесия $x = 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и удаляется на бесконечность при $t \rightarrow +\infty$. Полное время движения по такой траектории бесконечно. Действуя аналогично, для полуоси $y > 0$ получаем закон вымирания хищников без пищи $y(t) \sim \exp(-t/\omega^2)$. Эта траектория аналогична радиоактивному распаду, по такому закону дохнут мухи и бьются стаканы в столовой.

Какова эвристическая ценность и предсказательная сила рассмотренной популяционной модели (1.11)? Представьте себе, что некие «эффективные экологи» обеспокоены ростом числа рысей в лесах своего региона. Чтобы спасти поголовье зайцев, они, не долго думая, убеждают администрацию произвести резкий и масштабный отстрел рысей. Как это скажется на поголовье зайцев? На первый взгляд кажется, что это сложный вопрос и ответить на него не так-то просто. Однако, если посмотреть на фазовый портрет системы «хищник-жертва», то все становится совершенно прозрачно (см. задачу 9).

7. Кривая погони

Рассмотрим еще одну систему с одной степенью свободы. Истребитель летит горизонтально со скоростью u на высоте h над поверхностью земли. Когда он пролетает над пусковой установкой, навстречу ему перпендикулярно земле стартует ракета «земля-воздух». Она летит со скоростью v так, чтобы ее скорость все время была направлена на истребитель. При каком соотношении u и v ракета догонит истребитель и за какое время τ ? Как найти траекторию полета ракеты?



Рассмотрим сначала случай, когда $u = v$. Простое решение состоит в том, чтобы пересечь в систему самолета. В системе самолета ракета будет двигаться так, что ее скорость будет суммой постоянного вектора $-\mathbf{v}$ и поворачивающегося постоянного по длине вектора $\mathbf{v}$, который смотрит всегда на самолет. Траекторией ракеты будет парабола, в фокусе которой находится самолет. Когда ракета приближается к точке экстремума параболы, ее вектор скорости стремится к нулю. Эта точка соответствует положению ракеты при $t = \infty$. Уравнение параболы с началом отсчета в самолете имеет вид

$$y(x) = \frac{x(x - 2h)}{2h}.$$

Здесь x - вертикальная, y - горизонтальная координаты ракеты. Следовательно, в конце концов ракета будет гнаться за самолетом на постоянном от него расстоянии $h/2$ и никогда не догонит. Можно решить эту задачу и в лоб, написав и решив уравнение траектории ракеты в системе земли:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt - y}{h - x},$$

$$dx^2 + dy^2 = v^2 dt^2.$$

Тогда

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{h-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$y(x) = \frac{h}{4} \left[\left(\frac{h-x}{h} \right)^2 - \ln \left(\frac{h-x}{h} \right)^2 - 1 \right].$$

Из (1.19) видно, что относительное расстояние $l(x)$ между ракетой и самолетом при $t \rightarrow \infty$ (т.е. при $x \rightarrow h$) стремится к пределу $\lim_{x \rightarrow h} l(x) = h/2$:

$$l(x) \approx y'(x)(h-x) = \frac{h}{2} \left[1 - \left(\frac{h-x}{h} \right)^2 \right].$$

Если скорость ракеты u больше скорости самолета v , то она ее догонит, причем за время τ , не большее $h/(u-v)$. Это легко увидеть из того, что их относительная скорость всегда по модулю не меньше, чем $u-v$. Точное выражение для времени $\tau = hu/(u^2 - v^2)$ и уравнение кривой легко получается интегрированием уравнений (1.17), во втором из которых v следует заменить на u .

8. Химический осциллятор. Реакция Белоусова. Модель Лотки

В качестве последнего примера найдем стационарные концентрации, а также частоту и декремент затухания колебаний «химического осциллятора». Простейшим примером такой колебательной химической реакции в гомогенной среде является модель Лотки $A \rightarrow X \rightleftharpoons Y \rightarrow B$. Константы скоростей первой, второй и третьей стадий этой реакции равны $\tilde{k}_0, k_1$ и k_2 , соответственно. Вещества A так много, что его концентрация не изменяется, а скорость распада $\tilde{k}_0 A = k_0 = \text{const}$. Молекулы Y необратимо распадаются в молекулы B , которые уже не распадаются. Таким образом, первая стадия - реакция нулевого, вторая - второго, а третья - первого порядка. Для концентраций веществ получаем уравнения модели Лотки:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= k_0 - k_1 XY, \\ \dot{Y} &= k_1 XY - k_2 Y. \end{aligned}$$

В равновесии $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ равновесные концентрации равны $X_0 = k_2/k_1, Y_0 = k_0/k_2$. Если возникают малые отклонения концентраций от равновесных $X = X_0 + x$ и $Y = Y_0 + y$, то

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_2 y - \frac{k_1 k_0}{k_2} x, \\ \dot{y} &= \frac{k_1 k_0}{k_2} x. \end{aligned}$$

Для x это дает уравнение осциллятора $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ с декрементом $2\gamma = k_1 k_0/k_2$ и частотой $\omega_0^2 = k_1 k_0$. Самая известная колебательная химическая реакция - реакция Белоусова, окисление малоновой кислоты $C_3H_4O_4$ смесью $KBrO_2$ и $Ce(SO_4)_2$. Изменение цвета раствора с голубого на розовый происходит в колбе примерно раз в секунду и связано с образованием в растворе ионов Ce^{4+} . В отличие от упрощенной модели Лотки (1.21), здесь три реагента и, помимо затухающих колебаний, возможно возникновение автоколебательных режимов.

3.0.2 Nonlinear Oscillator. Non-Isochronism: Basic Methods

1. Нелинейный осциллятор

Нелинейный осциллятор - главная, базовая модель теории колебаний, пригодная для описания колебательных явлений в системах самой различной (не только механической) природы. На нелинейный осциллятор следует смотреть как на обобщенную модель, демонстрирующую все характерные черты нелинейности: ангармонизм, неизохронность, мультистабильность, гистерезис, бифуркации и хаос.

Простейший пример доставляет нам механический осциллятор с одной степенью свободы. Это частица массы m , движущаяся без диссипации в потенциальном поле $U(x)$:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Выше мы отмечали, что число степеней свободы равно размерности фазового пространства, деленному на два. Порядок дифференциального уравнения Ньютона (2.1) равен двум, что соответствует одной степени свободы.

Уравнение Ньютона (2.1) имеет первый интеграл движения - закон сохранения энергии E . Домножая (2.1) на $\dot{x}$ и интегрируя по t , получаем

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

где E - полная энергия колебаний. Колебания возникают, если $U(x)$ имеет вид потенциальной ямы. Периодическое движение происходит в области $U(x) \leq E$ между точками поворота $x_1 < x < x_2$, где $U(x_{1,2}) = E$. Интегрируя (2.2) в квадратурах, для периода таких колебаний получаем

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(E - U(x))}}.$$

Почему среди всех нелинейных осцилляторов мы так выделяем линейный гармонический? Потому, что это общая модель для случая малых колебаний. Действительно, вблизи минимума (около дна ямы) потенциальной энергии $x = x_0$ функцию $U(x)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

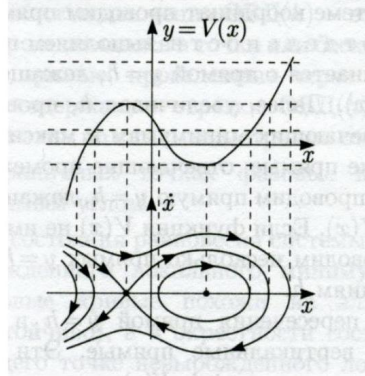
Если ограничиться учетом только квадратичного слагаемого (в случае малых колебаний это можно сделать), то получаем уравнение гармонического линейного осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

где $\omega^2 = U''(x_0)/m$ - частота осциллятора, а его координата отсчитывается от дна ямы $x - x_0 \rightarrow x$. Период колебаний (2.3) такого осциллятора

$$T = \frac{2}{\omega} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

не зависит от амплитуды колебаний $a = \sqrt{2E/m\omega_0^2}$. Поскольку зависимость от E в (2.6) отсутствует, линейные гармонические колебания изохронны.



Однако не следует думать, что все малые колебания изохронны или что все изохронные колебания гармоничны. В задачах к лекции приведены контрпримеры. Например, в степенном потенциале (см. Задачу 5) малые колебания неизохронны. С другой стороны, решение обратной задачи теории колебаний (см. пункт 8) показывает, что непрерывными деформациями гармонического потенциала $U(x) \sim x^2$ можно получить целую серию изохронных потенциалов $U(x)$.

Если амплитуда колебаний не мала, то следует учесть следующие члены разложения (2.4) для $U(x)$. К чему это приводит, рассмотрим на примере математического маятника.

2. Неизохронность математического маятника

Определим поправку «на неизохронность» к периоду малых колебаний математического маятника. Потенциальная энергия математического маятника длины l , отклоненного на угол φ равна $U(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi)$. Единица в потенциал введена для удобства, чтобы отсчитывать энергию колебаний от нуля. Из закона сохранения энергии $ml^2\dot{\varphi}^2/2 + U(\varphi) = E$ для периода колебаний T получаем

$$T = 4 \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2[E - mgl(1 - \cos \varphi)]}}.$$

Максимальный угол отклонения маятника φ_m определяется из условия $E = mgl(1 - \cos \varphi_m)$. Подставляя его в (2.7), получаем

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

(I'll add derivations, I did them long time ago)

где $\omega = \sqrt{g/l}$ - частота колебаний маятника. Обозначая $\kappa = \sin(\varphi_m/2) = \sqrt{E/2mgl}$ и производя замену $\sin(\varphi/2) = x \sin \psi$, для периода колебаний получаем

$$T = \frac{4}{\omega} K(\kappa)$$

где $K(\kappa)$ - полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}.$$

Из (2.9), (2.10) ясно, что период колебаний математического маятника увеличивается с ростом амплитуды колебаний. В пределе $\varphi_m \rightarrow \pi$, когда маятник близко подходит к верхнему пределу равновесия ($\kappa \rightarrow 1$), период стремится к бесконечности. Таким образом, колебания математического маятника изохронны только в пределе малых колебаний $\kappa \rightarrow 0$, когда $T \approx T_0$, где

$$T_0 = \frac{4}{\omega} K(0) = \frac{2\pi}{\omega}$$

Период колебаний линейного осциллятора (2.6).

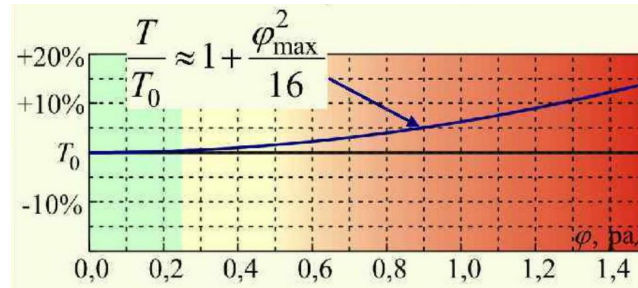
Для того чтобы определить поправку к периоду линейных колебаний T_0 на неизохронность при $\varphi_m \ll 1$, воспользуемся разложением (2.10) до членов $\sim \kappa^2$ включительно (см. Приложение):

$$K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4} + \dots \right).$$

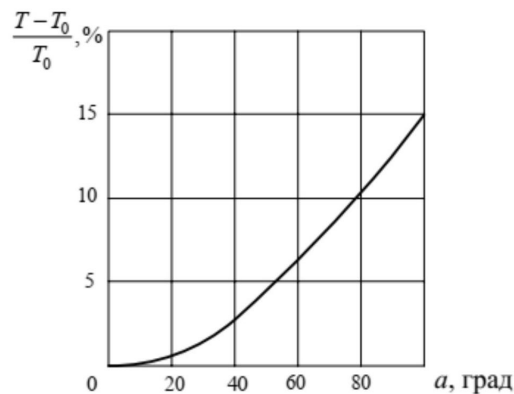
Подставляя (2.12) в (2.9) с учетом $\kappa \approx \varphi_m^2/4$ получаем

$$T = T_0 \left(1 + \varphi_m^2/16 + \dots \right).$$

Как и следовало ожидать, поправка за счет нелинейности мала. При угле отклонения в 30° относительное изменение периода меньше 2%. В этих условиях математический маятник можно считать изохронным.



Неизохронность движения маятника вызывает желание расклассифицировать возможные типы его движения. Для удобства будем рассматривать безразмерное уравнение движения маятника без диссипации $\ddot{x} + \sin x = 0$. На фазовой плоскости маятника минимумы потенциальной энергии $u(x) = 1 - \cos x$ располагаются на оси абсцисс при $x = 2\pi n$ и представляют собой центры, максимумы - при $x = 2\pi(n + 1)$ и соответствуют седлам. В силу того что фазовый портрет математического маятника периодичен по x , его часто удобно бывает изображать на поверхности цилиндра.

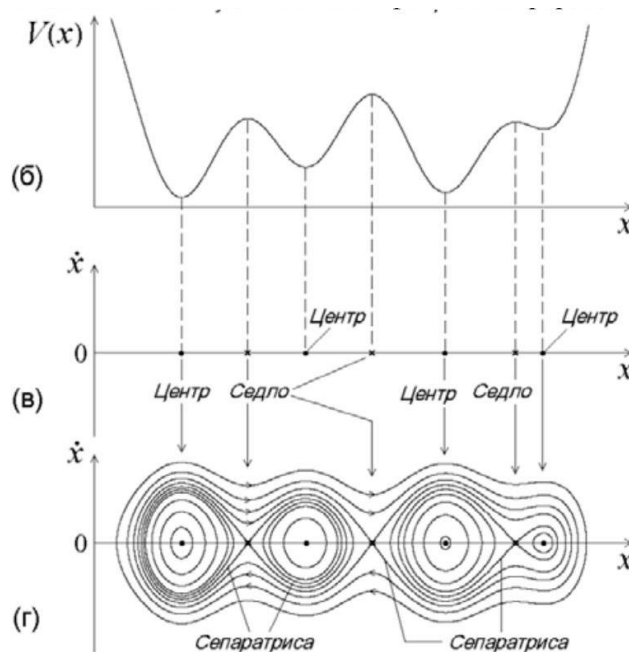


Фазовые кривые определяются интегралом движения $\dot{x}^2/2 + (1 - \cos x) = e$, где $e = E/mgl$ - безразмерная полная энергия маятника. Можно выделить три качественно различных типа движений и соответствующих им фазовых траекторий. Это а) колебательные движения внутри потенциальных ям, замкнутые фазовые траектории; б) движения по сепаратрисам, идущим из седла в седло; в) ротационные движения, при которых маятник прокручивается, незамкнутые фазовые траектории. Эти три типа разделяются величиной безразмерной полной энергии маятника e . При $e = 2$ происходит движение по сепаратрисе, при меньшей энергии $e < 2$ происходит колебательное, а при большей $e > 2$ - ротационное движение. Колебательное и ротационное движения легко представить себе наглядно, а вот как маятник движется в разделяющем их случае сепаратрисы, следует рассмотреть подробнее.

5. Как нарисовать фазовый портрет нелинейного осциллятора?

Обратимся к рецепту построения фазового портрета нелинейного осциллятора, как консервативного, так и диссипативного. Это умение необходимо для выработки колебательного опыта и колебательной интуиции, позволяющих визуально распознавать в этих портретах особенности и черты колебательных процессов.

Фактически этих приемов немного, и они весьма несложны. Процедура построения фазового портрета сродни картографии. Сначала мы определяем, где на фазовой плоскости центры, где седла и где сепаратрисы. А затем все это нужно склеить так, чтобы не нарушать правила топологии. Проиллюстрируем это на примерах. Мы уже убедились, что вблизи минимумов потенциальной энергии $U(x)$ имеет место центр. Действительно, при $U(x) \propto x^2$ интеграл движения $\dot{x}^2 + x^2 = \text{const}$ задает на плоскости $(x, \dot{x})$ вложенные друг в друга окружности вблизи точки равновесия $(0, 0)$. Вблизи максимумов потенциальной энергии $U(x) \propto -x^2$ получаем два семейства гипербол $\dot{x}^2 - x^2 = \text{const}$, в зависимости от знака постоянной. Разделяющие эти два семейства сепаратрисы $\dot{x} = \pm x$ должны либо уйти на бесконечность, либо где-либо замкнуться. Этих наблюдений достаточно для воссоздания полной картины. Знание того, где находятся центры (устойчивые положения равновесия), седла (неустойчивые) и куда идут сепаратрисы, позволяют «склеить» весь фазовый портрет.



Сепаратрисы играют важную роль, поскольку разбивают фазовую плоскость на области качественно разной по характеру динамики, отвечающие траекториям разного

топологического типа. Поэтому, рецепт построения качественного фазового портрета нелинейного осциллятора таков. Рисуем график $U(x)$ прямо над рисунком фазовой плоскости $(x, \dot{x})$. Сносим на ось x особые точки: минимумы и максимумы $U(x)$. В них располагаются центры и седла соответственно. Сепаратрисы соединяют седла друг с другом, отсекая области замкнутых, вложенных друг в друга фазовых траекторий вокруг центров от области незамкнутых траекторий, уходящих в бесконечность. Сами сепаратрисы имеют в точках седел вид пересекающихся крест-накрест кривых.

6. В какую сторону «закручены» фазовые траектории?

Стрелки, обозначающие движение по фазовым траекториям, в верхней полуплоскости обращены направо, а в нижней - налево. Таким образом, замкнутые фазовые траектории нелинейного осциллятора всегда «вращаются» по часовой стрелке. Это проще всего понять, записав уравнение второго порядка (2.1) в виде двух уравнений первого порядка:

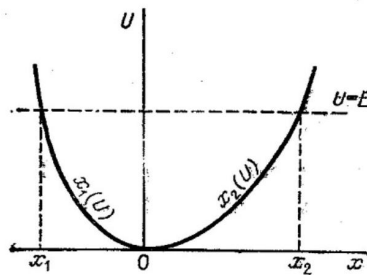
$$\begin{aligned} m\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial x}(x). \end{aligned}$$

В механике такой прием называется введением импульса. Отсюда видно, что в верхней полуплоскости $y > 0$ фазовая кривая движется направо $\dot{x} > 0$, а в нижней - наоборот.

8. Обратная задача теории колебаний

Можно ли восстановить вид потенциальной энергии $U(x)$ поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода этого движения T от энергии E ? С математической точки зрения речь идет о решении интегрального уравнения (2.3), в котором $U(x)$ рассматривается как неизвестная функция, а $T(E)$ - как известная.

Будем для простоты полагать, что искомая функция $U(x)$ имеет в рассматриваемой области лишь один минимум. Выберем начало координат в положении этого минимума потенциальной энергии, а значение последней в этой точке положим равным нулю $U(0) = 0$.



Преобразуем интеграл (2.3), рассматривая в нем координату x как функцию U . Эта функция $x(U)$ двужначна. Соответственно этому интеграл (2.3), в котором мы заменяем dx на $x'(U)dU$, перейдет в сумму двух интегралов: от $x = x_1$ до $x = 0$ и от $x = 0$ до $x = x_2$. Обозначим зависимость x от U в этих двух областях соответственно как $x = x_1(U)$ и $x = x_2(U)$. Пределами интегрирования по dU будут, очевидно, E и 0 , так что

$$\begin{aligned}
T(E) &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \\
&= \sqrt{2m} \int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E-U}}.
\end{aligned}$$

Разделим обе стороны этого равенства на $\sqrt{\alpha - E}$, где α - вспомогательный параметр, и проинтегрируем по E от нуля до α :

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] \frac{dU dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}},$$

или, меняя порядок интегрирования:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}.$$

Интеграл по dE вычисляется элементарно и оказывается равным π . После этого интегрирование по dU и с учетом того, что $x_2(0) = x_1(0) = 0$, дает

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi\sqrt{2m} [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)].$$

Теперь ясно, зачем мы придумали параметр α . Заменив α на U , находим окончательно

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U - E}}.$$

Таким образом, по известной функции $T(E)$ определяется только разность $x_2(U) - x_1(U)$. Сами же функции $x_2(U)$ и $x_1(U)$ остаются неопределенными. Это значит, что существует бесчисленное множество несимметричных кривых $U = U(x)$, приводящих к одной и той же зависимости периода от энергии $T(E)$. Они отличаются друг от друга такими деформациями, которые не меняют разности двух значений $x_2(U) - x_1(U)$, соответствующих одному и тому же значению U . Возникает своеобразный аналог принципа Кавальери. Именно этим объясняется существование нескольких нелинейных изохронных потенциалов, к тому же различных (см. Задачу 4).

Многозначность решения исчезает, если кривая $U = U(x)$ симметрична относительно оси ординат:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

В этом случае для $x(U)$ получаем из (2.36) однозначное выражение

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U - E}},$$

полностью решающее обратную задачу теории колебаний.

9. Теорема вириала

Эта теорема является мощным инструментом вычисления средней энергии колебаний. В простейшем случае одномерного движения частицы теорема формулируется так. Умножим уравнение Ньютона $m\ddot{x} = f(x)$ на x и воспользуемся формулой $x\ddot{x} = d(x\dot{x})/dt - \dot{x}^2$. Получаем

$$\frac{d}{dt}(mx\dot{x}) - m\dot{x}^2 = x \cdot f(x)$$

Усредним (2.39) по времени и воспользуемся тем, что среднее от временной производной ограниченной функции равно нулю. Это дает

$$2\bar{T} + \overline{x \cdot f(x)} = 0$$

Это соотношение связывает среднюю кинетическую энергию $T = m\dot{x}^2/2$ с вириалом (лат. vires - силы) системы $\overline{x \cdot f(x)}$. Проведенное нами усреднение правомочно, если движение системы периодическое либо если при движении координата и скорость системы остаются ограниченными.

Теорема вириала очень эффективна, если потенциальная энергия $U(x)$ - степенная функция координаты $U(x) \propto x^n$. Тогда, в силу теоремы Эйлера об однородных функциях, вириал системы равен $\overline{x \cdot f(x)} = -x\partial U/\partial x = -n\bar{U}$. Из (2.40) получаем $2\bar{T} - n\bar{U} = 0$, что вместе с законом сохранения $\bar{T} + \bar{U} = E$ дает

$$\bar{T} = \frac{nE}{n+2}, \quad \bar{U} = \frac{2E}{n+2}.$$

Видно, что при $n > 2$ доминирует кинетическая энергия, а при $n < 2$ наоборот, потенциальная. Равенство средних $\bar{T}$ и $\bar{U}$ выполняется только для гармонического осциллятора $n = 2$.

8. Приложение. Формула Линдштедта

Формула Линдштедта для периода слабонелинейных колебаний. Потенциальная энергия нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + \partial U/\partial x = 0$ вблизи положения равновесия $x = 0, U'' > 0$ в случае общего положения имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{2}U''x^2 + \frac{1}{6}U'''x^3 + \frac{1}{24}U''''x^4 + \dots$$

где все производные вычисляются при $x = 0$. Покажем, что период малых колебаний осциллятора с амплитудой $a \ll U''/U'''$ равен

$$T = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{48} \left(5 \left(\frac{U'''}{U''} \right)^2 - 3 \frac{U''''}{U''} \right) + \dots \right)$$

где $T_0 = 2\pi\sqrt{m/U''}$ - период осциллятора при $a \rightarrow 0$.

Идея доказательства проста. Поскольку потенциальная энергия слабо отличается от гармонической и задана в виде ряда (4.45), то и зависимость периода колебаний

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

от энергии следует также искать в виде ряда по E или по амплитуде $a = \sqrt{2E/U''}$. Для этого ряд $U(x)$ (4.45), стоящий в (4.47) под корнем в знаменателе, удобно

«перебросить» в числитель. Проще всего это сделать при помощи замены переменной, также представленной в виде ряда

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

Замену следует выбрать такой, чтобы потенциал в новой переменной стал гармоническим $U(y) = U'' y^2 / 2$. Проще всего положить $b_1 = 1$. Подставляя (4.48) в (4.47), получаем, что при

$$b_2 = -\frac{1}{3} \frac{U'''}{U''}$$

$$b_3 = +\frac{1}{12} \left(5 \left(\frac{U'''}{U''} \right)^2 - 3 \frac{U'''}{U''} \right),$$

период колебаний можно представить в виде

$$T(E) = 2 \sqrt{\frac{m}{U''}} \int_{-a}^{+a} \frac{(1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2 + \dots) dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

где $a = \sqrt{2E/U''}$ амплитуда колебаний и в новой переменной. Приведенные выше вычисления, как и полученный ниже ответ, справедливы для колебаний малой амплитуды $a \ll U''/U'''$ (энергии $E \ll (U'')^3 / (U''')^2$). При помощи очевидной замены $y = a \sin z$ интеграл (4.50) приводится к виду

$$T(E) = 2 \sqrt{\frac{m}{U''}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 + 2ab_2 \sin z + 3a^2 b_3 \sin^2 z + \dots) dz.$$

Окончательно, для периода слабонелинейных колебаний осциллятора получаем формулу Линдштедта

$$T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''}} \left(1 + \frac{E}{24U''} \left(5 \left(\frac{U'''}{U''} \right)^2 - 3 \frac{U'''}{U''} \right) + \dots \right).$$

Отметим, что из формулы (4.52) следует, что поправки на неизохронность, возникающие от добавок к потенциалу $\propto x^3$ и $\propto x^4$ одного порядка $\propto E$ по энергии.

0. Приложение. Эллиптический интеграл

Асимптотика полного эллиптического интеграла первого рода

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

при $\kappa \ll 1$ вычисляется непосредственно. Раскладывая подынтегральное выражение в ряд, получаем

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} d\varphi + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \dots = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4} + \dots \right).$$

При значениях κ , близких к единице $\kappa \approx 1$, удобно ввести дополнительный модуль $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$, который в этой области стремится к нулю $\kappa' \ll 1$. Тогда интеграл (2.42) приобретает вид

$$K(\kappa') = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \kappa'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Заменяя переменную интегрирования $\varphi = \pi/2 - \psi$, находим

$$K(\kappa') = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2 \psi + \kappa'^2 \cos^2 \psi}}.$$

Стандартный метод вычисления асимптотики этого и подобных интегралов состоит в следующем. Разобьем этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$K(x') = K_1 + K_2 = \int_0^\alpha d\psi \dots + \int_\alpha^{\pi/2} d\psi \dots$$

Произвольное значение α выберем в интервале $\kappa' \ll \alpha \ll \pi/2$. Дальнейший расчет покажет, что α выпадет из окончательного ответа.

Вычисляем интегралы в (2.46) по отдельности. В первом интеграле значения переменной интегрирования ψ малы, так что его можно упростить:

$$K_1 = \int_0^\alpha \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 + \kappa'^2}}.$$

Интеграл (2.47) вычисляется элементарно, с учетом приведенных выше неравенств для α получаем

$$K_1 = \ln \frac{2\alpha}{\kappa'}$$

Во втором интеграле (2.46) можно положить $\kappa' = 0$. Действительно, если разложить K_2 в ряд Тейлора, то поправка будет пропорциональна κ'^2 , а мы учитываем только логарифмический член и постоянное слагаемое. Это дает

$$K_2 = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sin \psi}$$

Замена переменной интегрирования $z = \cos \psi$ позволяет вычислить этот интеграл. С учетом $\alpha \ll \pi/2$ это дает

$$\int_\alpha^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sin \psi} = \int_0^{\cos \alpha} \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \ln \frac{2}{\alpha}.$$

Складывая (2.46) и (2.50), мы видим, что произвольное значение α выпадает из окончательного ответа для асимптотики $K(\kappa') \approx \ln(4/\kappa')$ при $\kappa' \rightarrow 0$. При $\kappa \approx 1$ получаем:

$$K(\kappa) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$$

3.0.3 Nonlinear Oscillator. Non-Isochronism: Basic Effects

3. Движение of a pendulum по сепаратрисе

(???? need to think about it again)

Рассмотрим конкретную задачу: математический маятник длины 1 м отклонили от верхнего положения равновесия на угол 1° и отпустили. Как оценить период его колебаний T ? Идея проста: решить уравнение движения маятника вблизи верхнего положения его равновесия в линейном приближении и «пришить» это решение к закону движения по сепаратрисе. Для этого сначала рассмотрим движение по сепаратрисе. На фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ она идет из седла $x = -\pi$ в седло $x = +\pi$, в соответствии с интегралом движения $\dot{x}^2 = 4 \cos^2 x/2$ при $e = 2$. Уравнение движения по сепаратрисе

$$\frac{dx}{2 \cos(x/2)} = \pm dt$$

легко интегрируется при помощи первообразной $\int dx / \cos x = \int dx / \sin(x + \pi/2) = \ln |\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)|$, что дает

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \pi}{4} \right| = \pm(t - t_0).$$

Здесь t_0 - постоянная интегрирования, играющая роль начала отсчета времени, а знаки соответствуют двум симметричным сепаратрисам, лежащим в верхней и нижней фазовых полуплоскостях. Они соответствуют падению маятника из верхней точки по и против часовой стрелки. Сохраняя далее для определенности только знак плюс, получаем закон движения по сепаратрисе:

$$x(t) = -\pi + 4 \operatorname{arctg} C e^t$$

где $C = e^{-t_0}$. Интересно отметить, что это же решение можно представить и как $x(t) = 2 \arcsin \operatorname{th}(t - t_0)$. Скорость маятника при этом равна $\dot{x}(t) = 2 / \operatorname{ch}(t - t_0)$.

Движение по сепаратрисе соответствует падению маятника из верхней точки $x = -\pi$ при $t = -\infty$, которое заканчивается снова в верхней точке $x = +\pi$ при $t = +\infty$ через бесконечное время. Но бесконечность это очень долго. Движение, заданное (2.16), трудно реализовать экспериментально. Говоря математически, для него трудно поставить задачу Коши. Сложно подобрать такое t_0 , чтобы удовлетворить заранее заданным начальным условиям $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Нам заранее не известны такие начальные условия, при которых мы попадаем точно на сепаратрису. Поэтому рассмотрим более реалистическую задачу.

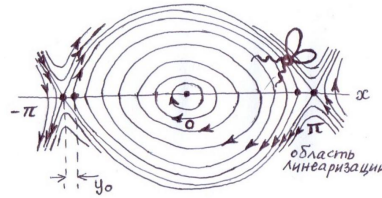
Давайте отклоним маятник на малый угол $y_0 \ll 1$ влево от верхнего положения равновесия. Теперь период его колебаний T будет большим, но конечным. Как оценить его величину? Возникает следующая идея. Нужно найти закон движения маятника вблизи верхнего положения равновесия $y(t) = \pi + x(t)$ в линейном приближении. А затем «сшить» его с полученным выше законом движения по сепаратрисе (2.16) при больших отрицательных временах.

Итак, уравнение маятника вблизи верхнего положения $\ddot{y} - y = 0$ с начальными условиями $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$ имеет решение $y(t) = y_0 \operatorname{ch} t$. Оно достаточно быстро выходит на асимптотику:

$$y(t) \approx \frac{y_0}{2} e^t$$

При $t = -\infty$ (2.17) соответствует вертикальному положению маятника $y(-\infty) = 0$. С другой стороны, для движения по сепаратрисе мы имеем закон (2.16). При больших отрицательных временах $\operatorname{arctg}(C e^t) \approx C e^t$ и из (2.16) получаем $x \approx -\pi + 4 C e^t$. «Сшивая»

это выражение с полученным в линейном приближении (2.17) $x(t) = -\pi + y(t)$, находим $C = y_0/8$. Ранее C в (2.16) была произвольной константой. Ее произвольность была связана с возможностью любого конечного сдвига по времени t_0 . Движение по сепаратрисе начинается при $t = -\infty$, а заканчивается при $t = +\infty$, т.е. решение (2.16) трансляционно инвариантно по времени. Это следует из того, что для сепаратрисы ни в начальные условия, ни в само уравнение (2.14) время не входит явно.



Теперь легко найти период. Он в четыре раза больше времени, за которое маятник достигнет нижней точки. Полагая в (2.16) $x = 0$, получаем $0 = -\pi + 4 \arctg(y_0 e^{T/4}/8)$. Отсюда для периода T получаем

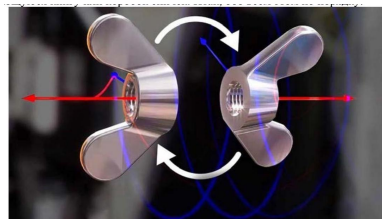
$$T \approx 4 \ln \frac{8}{y_0}.$$

Этот же ответ можно получить, воспользовавшись асимптотикой эллиптического интеграла при близких к единице значениях аргумента (см. пункт 10. Приложение). Период T логарифмически расходится при малых $y_0 \ll 1$. Это медленная расходимость. Например, для математического маятника длины 1 м, который отклонили от вертикали на 1° , период колебаний составляет всего 8 сек.

Почему так мало, ведь имеет место расходимость? Это поучительный пример того, что математическое стремление к бесконечности следует отличать от физического. Например, с математической точки зрения двойной логарифм $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg \lg x = \infty$ действительно стремится к бесконечности. В то же время практически это выражение остается не только конечным, но и не слишком большим. Даже для такого невообразимо большого числа, как гугол $x = 10^{100}$, оно равно 2. Таким образом, практически в асимптотиках с логарифмами можно часто обращаться как с константами.

4. Эффект Джанибекова (!?!?!?!????!?)

Еще один пример движения по сепаратрисе доставляет нам эффект Джанибекова. Справедливости ради отметим, что это явление было известно задолго до космических полетов и связано с неустойчивостью свободного вращения тела относительно оси со средним по величине из трех моментов инерции. Обычно его иллюстрируют, подбросив вверх вращающуюся книгу или коробок спичек. Итак, обо всем этом по порядку.



Космонавт Джанибеков в условиях невесомости скручивал гайкибарашки с болтов. В силу малости трения, достаточно стукнуть гайку пальцем, чтобы она сама скрутилась с резьбы болта и полетела в невесомости, вращаясь вокруг своей оси. Дальнейшее поведение гайки было необычным. Пролетев определенное расстояние, гайка

неожиданно делала «кувырок» так, что ее ось вращения поворачивалась на 180° . После этого, так же вращаясь, гайка летела дальше. «Кувырки» происходят через равные промежутки времени. Считая для оценки, что гайка-барашек имеет отличающиеся по величине моменты инерции относительно главных осей и что больший из них $\approx 10 \text{ г см}^2$, попробуем оценить промежуток времени τ между последовательными «кувырками» гайки. Пусть угловая скорость гайки при схождении с резьбы $\approx 10 \text{ с}^{-1}$, а ее угол отклонения от оси инерции $\approx 5^\circ$.

Для этого исследуем вопрос об устойчивости вращения твердого тела вокруг одной из главных осей инерции. Покажем, что вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции I_2 неустойчиво. Пусть $I_3 > I_2 > I_1$ и тело вращается строго вокруг оси x_2 . Тогда начальные угловые скорости равны $\Omega_1(0) = \Omega_3(0) = 0$ и $\Omega_2(0) = \Omega_{20} \neq 0$. Подставляя это в уравнения Эйлера вращающегося тела

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 &= 0,\end{aligned}$$

получим $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$. Таким образом, вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси x_2 удовлетворяет уравнениям Эйлера. Однако оно является неустойчивым относительно малого возмущения.

Пусть теперь угловая скорость Ω немного отклонилась от своего направления x_2 , так что появились малые составляющие вдоль осей x_1 и x_3 : $\Omega_1 = \omega_1, \Omega_3 = \omega_3$, где $\omega_{1,3} \ll \Omega_{20}$. Тогда уравнения Эйлера линеаризуются

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 &= 0,\end{aligned}$$

а проекция Ω_2 в первом приближении не меняется $\dot{\Omega}_2 = 0$. Разыскивая решение этой системы уравнений в виде $\omega_1 \sim \omega_3 \sim e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \cdot \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20}^2 = 0$$

Корни (2.22) при $I_3 > I_2 > I_1$ вещественны:

$$\lambda_{1,2} = \pm \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}}.$$

Наличие действительного положительного корня λ_1 означает, что вращение $\Omega_1 = \Omega_3 = 0, \Omega_2 = \Omega_{20}$ вокруг промежуточной оси неустойчиво. Случайно возникшее возмущение экспоненциально возрастает:

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim \exp \left\{ \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} t \right\}.$$

О проверке результатов (?????)

Чтобы наглядно убедиться в справедливости полученного ответа (2.24), проведем следующий нехитрый опыт. Возьмем и заклеим какую-нибудь книгу скотчем так, чтобы она не раскрывалась при движении. Если теперь подбросить книгу, сообщив ей одновременно вращательное движение вокруг короткого (перпендикулярного плоскости обложки) или длинного (лежащего в плоскости обложки) ребра, то во время подъема и падения книга будет устойчиво вращаться, оставаясь параллельной первоначальному направлению. Однако все попытки сохранить ось вращения неизменной у книги, подброшенной с вращением вокруг среднего ребра, окажутся безуспешными. Книга во время движения будет беспорядочно кувыряться.

Таким образом, вращение гайки совершенно аналогично движению математического маятника вблизи сепаратрисы, рассмотренному в предыдущем пункте. Малое отклонение от сепаратрисы, нарисованной на эллипсоиде постоянной энергии в пространстве моментов импульса, удобно характеризовать параметром $\varepsilon = L^2 - 2KI_2$. Здесь L - момент импульса, K - кинетическая энергия вращающейся гайки. Вектор Ω описывает замкнутую траекторию, близкую к сепаратрисе за конечное время. Период этого движения и составляет время между «кувырками». Его вычисление совершенно аналогично проведенному ранее для маятника. Решая уравнения (2.19) и используя асимптотику эллиптического интеграла (см. пункт 10. Приложение) при $\varepsilon \rightarrow 0$, для времени «кувырка» τ получаем

$$\tau \approx \frac{2}{\alpha} \ln \frac{16}{|\mu|}, \quad \alpha = \frac{L}{I_2} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_3 I_1}}, \quad \mu \approx \frac{\varepsilon (I_3 - I_1) I_2}{L^2 (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}.$$

Наблюдатель увидит попеременное изменение направления оси вращения гайки на противоположное. Поскольку скорость конца вектора Ω вблизи полюсов эллипсоида энергии близка к нулю, то ось вращения достаточно долго задерживается вблизи полюса. При однократном прохождении дуги сепаратрисы совершается «кувырок». Таким образом, движение, сопровождаемое периодическими «кувырками» гайки, не содержит ничего мистического и вполне описывается уравнениями Эйлера. В условиях невесомости этот эффект проявляется более ярко, на что и обратил внимание космонавт Джанибеков. Нового эффекта здесь нет, никаких новых законов физики для объяснения движения привлекать не надо.

Оценим время между «кувырками» для реальной гайки. Приближенная оценка главных моментов инерции гайки при $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, радиусе $r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, высоте $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и длине ушек $a = 10^{-2} \text{ м}$ дает $I_3 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 7 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{м}^2$, $I_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Для приведенных значений время «кувырка» составляет одну секунду, а время между «кувырками» примерно четыре секунды.

Что же касается возможности аналогичного «кувырка» Земли, так беспокоящей сейчас общественность, то эти опасения беспочвенны. В силу сплюснутости Земли, ее вращение происходит вокруг оси с наибольшим моментом инерции и является устойчивым.

7. Нелинейный осциллятор с диссипацией

При добавлении в уравнение (2.1) трения $2\gamma m\dot{x}$, где γ - диссипативный коэффициент, нелинейный осциллятор становится диссипативным $\gamma > 0$:

$$m\ddot{x} + 2\gamma m\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

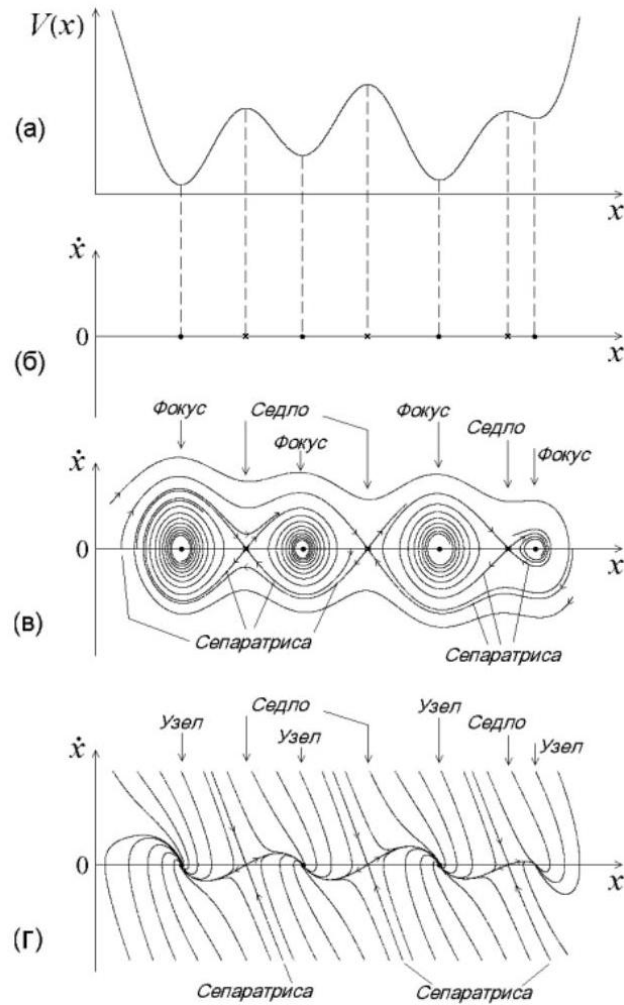
Эта модель описывает множество систем самой различной природы. Теперь энергия (2.2) перестает быть первым интегралом движения. Действуя аналогично, получаем вместо (2.2) закон уменьшения энергии:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = -2\gamma m\dot{x}^2.$$

Если диссипации нет $\gamma = 0$, то мы возвращаемся к консервативному случаю. При наличии диссипации $\gamma > 0$ энергия $E = m\dot{x}^2/2 + U(x)$ убывает.

Слабая диссипация. В уравнении (3.27) имеется два характерных масштаба времени: затухания $\sim \gamma^{-1}$ и колебания $\sim (m/U'')^{1/2}$ где U'' - характерное значение второй производной потенциала в рассматриваемой области фазовой плоскости. Если параметр диссипации мал $\gamma^2 \ll U''/m$, то это затухание очень медленное. Эта медленность помогает качественно представить себе вид фазовой траектории.

Вспомним фазовый портрет консервативной системы. Так вот, если включить маленькую диссипацию, то изображающая точка, двигаясь в первом приближении вдоль старых, консервативных траекторий, будет медленно переходить с одной кривой на другую, в сторону уменьшения энергии. Это соображение позволяют легко нарисовать фазовый портрет осциллятора с малой диссипацией. Так движение около устойчивого положения равновесия из центра превратится в устойчивый фокус. Это соответствует затухающим линейным колебаниям, когда система приходит в состояние устойчивого равновесия. Сепаратрисы перестают соединять между собой соседние седла. Начинаясь в седле, сепаратриса заканчивается в устойчивом фокусе. Наоборот, заканчиваясь в седле, сепаратриса начинает свое движение из бесконечности.

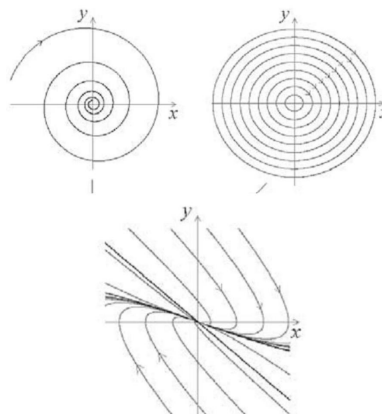


Сильная диссипация. В случае очень большой диссипации $\gamma^2 \gg U''/m$ характер фазовых траекторий меняется. Вместо приближения траекторий к равновесию с осцилляциями наблюдается просто медленное затухание величины отклонения от неподвижной точки, без изменения знака. То есть особая точка устойчивого равновесия из устойчивого фокуса с ростом диссипации превращается в устойчивый узел. Наиболее просто эту смену режимов проиллюстрировать на примере линейного осциллятора:

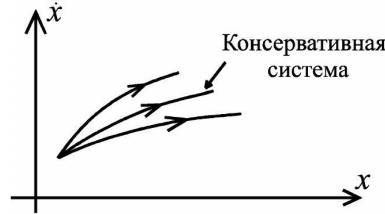
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Ищем решение в виде $x(t) \propto \exp(\lambda t)$ и для инкремента λ получаем квадратное уравнение $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, корни которого есть

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$



Из (2.30) видно, что при $\gamma > \omega_0$ осциллирующие решения сменяются на экспоненциально затухающие. В механике это называется передемпфированный осциллятор (гаситель колебаний, амортизатор). В окрестностях особых точек типа седла фазовые траектории устроены качественно так же, как и в консервативном случае. Только в этом случае сепаратрисы соединяют не седла, а седло с устойчивым фокусом. Отсюда ясно, что роль сепаратрис нелинейного диссипативного осциллятора состоит в том, что они разграничивают бассейны притяжения различных аттракторов (состояний устойчивого равновесия).

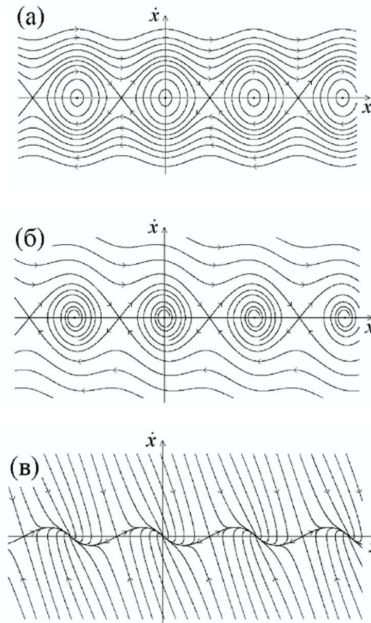


Сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах $\gamma^2 \gg U''/m$ обладают той особенностью, что в них можно выделить участки быстрых и медленных движений. Продемонстрируем метод приближенного качественного анализа фазового портрета, основанный на разделении быстрых и медленных движений. Чтобы разобраться в поведении решения дифференциального уравнения (2.27) в этом случае нужно преобразовать его так, чтобы малый параметр стоял при старшей производной. Для этого введем новое медленное время, $\tau = t/2\gamma$. Тогда уравнение (2.27) примет вид $\varepsilon \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} = f(x)$, где $f(x) = -m^{-1}\partial U/\partial x$ - сила, действующая на осциллятор, точки теперь обозначают производные по медленному времени, а $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$ - малый параметр при старшей производной. Запишем уравнение в стандартной форме уравнений фазовой плоскости первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \varepsilon \dot{y} &= -y - f(x).\end{aligned}$$

Из (2.31) видно, что производная $\dot{y} \sim 1/\varepsilon \gg 1$ велика везде, за исключением области, близкой к кривой $y = f(x)$. В этой области производная $\dot{y}$ невелика. Кривая $y = f(x)$ определяет на фазовой плоскости (x, y) подпространство медленных движений. Движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины $\sim \varepsilon$, так что можно говорить об области медленных движений. Вне области медленных движений, разделив второе уравнение (2.31) на первое, получаем $dy/dx \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$. Отсюда ясно, что в области быстрых движений фазовые траектории близки к прямым вертикальным линиям. Они лишь немного отклонены от вертикали против часовой стрелки на угол $\sim \varepsilon$.

Таким образом, рецепт качественного построения фазового портрета нелинейного осциллятора с сильной диссипацией таков. Все особые точки консервативной системы $\partial U/\partial x = 0$ сохраняют свои положения. При этом седла остаются седлами, фокусы превращаются в центры. Из любого начального положения фазовой плоскости изображающая точка сначала быстро «падает» на кривую $y = f(x)$ и попадает в область медленных движений. Затем изображающая точка медленно стремится по этой кривой к ближайшему устойчивому положению равновесия. Проведенное рассмотрение носит общий характер и годится для любой потенциальной функции $U(x)$.



3.0.4 Chaos in Oscillations: Basic Concepts

(??? general overview, where it can be and why? later, there will be a big section about it)

3.0.5 Linear Oscillator

1. Лине́йный осцилля́тор

Выше мы отмечали, что вблизи положения равновесия диссипативные колебания систем различной природы описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Здесь $\gamma > 0$ - диссипативный коэффициент. Это дифференциальное уравнение описывает линейный осциллятор, являющийся моделью огромного количества систем физического, химического, биологического и другого происхождения, являющихся. Модель линейного осциллятора обладает огромной предсказательной силой. Уравнение (3.1) является примером линейной динамической системы, поэтому для нее выполняется принцип суперпозиции. Этот принцип играет фундаментальную роль во всей теории колебаний и волн, именно благодаря ему линейную задачу зачастую удастся решить в замкнутом виде.

Решение (3.1) имеет вид $x(t) \propto \exp(\lambda t)$. Находя λ из дисперсного соотношения $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ получаем при $\omega_0 > \gamma$:

(!!do the derivations)

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1}\right)^2} e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

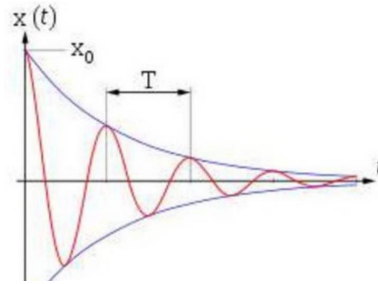
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1 x_0} \quad \omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

If one plugs $t = 0$, one gets $x(t) = x_0$, by using $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Фазовый портрет осциллятора представляет собой устойчивый фокус. Затухающие колебания происходят на частоте ω_1 . Осциллятор представляет собой открытую систему,

поэтому поправка к частоте возникает из-за его взаимодействия с окружением. В теории поля эта поправка называется лэмбовским сдвигом.

Скорость затухания осциллятора экспериментаторы любят характеризовать его добротностью $Q = \omega_1/2\gamma$. Добротность, деленная на π , - это число колебаний, после которого амплитуда уменьшится в e раз. Добротность также определяется отношением энергии, запасенной в осцилляторе, к энергии, теряемой им за период $Q = 2\pi E/\Delta E$. Уже при добротностях в несколько единиц с точностью лучше процента можно пользоваться приближенными формулами



В случае сильного затухания $\omega_0 < \gamma$ характер поведения осциллятора меняется. Вместо затухающих осцилляций возникает экспоненциальная релаксация к равновесию. Решение (3.1) в этом случае имеет вид

(!!do the derivations)

$$x(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left\{ \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} x_0 \operatorname{ch} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + (\gamma x_0 + v_0) \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right\}$$

Такой осциллятор называется передемпфированным. Он может совершить максимум одно колебание. Фазовый портрет передемпфированного осциллятора представляет собой устойчивый узел. Примерами осциллятора с сильным затуханием являются маятник в вязкой среде, амортизаторы автомобилей и т.д. Автомобильный масляный амортизатор превращает механическую энергию колебаний в тепловую. Он служит для гашения (демпфирования) колебаний, поглощения толчков и ударов, действующих на корпус автомобиля.

2. Спектр осциллятора

Затухающие колебания линейного осциллятора при слабой диссипации $Q \gg 1$ почти гармонические. Степень этого «почти» удобнее всего определить по спектру сигнала, в данном случае координаты осциллятора $x(t)$. Спектр функции $x(t)$ определяется ее фурье-преобразованием $X(\omega)$, которое разлагает эту функцию на совокупность гармоник с частотами ω :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Однако не $X(\omega)$ называют спектром сигнала. Дело в том, что мощность сигнала $x(t)$ (поля, тока, координаты осциллятора и т.д.) всегда пропорциональна квадрату его модуля $|x(t)|^2$ (вектор Пойнтинга, джоулево тепловыделение, работа над осциллятором и т.д.). Следовательно, полная совершенная работа (энергия сигнала) с помощью теоремы

Парсеваля может быть выражена как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

Таким образом, спектром мощности сигнала является величина $|X(\omega)|^2$, имеющая смысл энергии сигнала, приходящейся на частотный интервал $[\omega, \omega + d\omega]$.

Найдем спектр мощности $|X(\omega)|^2$ свободных затухающих колебаний осциллятора, если в начальный момент времени мы его толкнули: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$. Получим приближенное выражение для спектра вблизи резонанса $|\omega - \omega_1| \ll \omega_1$ при высокой добротности $Q \gg 1$ и сравним с лоренцевской линией.

С учетом того, что колебания являются аналитическим сигналом, $x(t) = 0$ при $t < 0$, из (3.5) получаем

(??? do derivations. there is some idea here, why cosine was changed to sine, I don't know it....)

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1 X(\omega)}{v_0} &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(\omega + \omega_1) + i\gamma} - \frac{1}{(\omega - \omega_1) + i\gamma} \right] = \\ &= \frac{\omega_1}{\sqrt{(\omega + \omega_1)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2}} e^{i(\text{phase})}. \end{aligned}$$

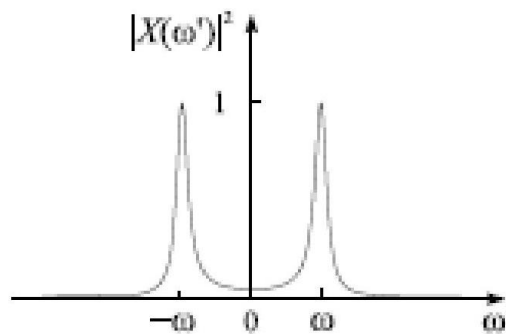
Поскольку мы не интересуемся выражением для фазы, его можно не выписывать. This is why we just changed terms in the denominator to absolute values. Итак,

$$|X(\omega)|^2 = \frac{v_0^2}{((\omega + \omega_1)^2 + \gamma^2)((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)}.$$

Этому выражению при высокой добротности $Q \gg 1$ соответствуют два узких пика шириной $\approx 2\gamma$ вблизи частот $\omega \approx -\omega_1$ и $\omega \approx \omega_1$. Вблизи положительного резонанса $\omega \approx \omega_1$ получаем

$$|X(\omega)|^2 \approx \frac{v_0^2}{4\omega_1^2 ((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)} \propto \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2} = L(\omega).$$

Таким образом, спектр мощности представляет собой лоренцевскую линию $L(\omega) = (\gamma/\pi) ((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)^{-1}$. Участок отрицательных частот выглядит симметрично.



Now we will do the same for some modified initial conditions. (??? why they are so?? the init speed is somewhat not arbitrary...) Для случая $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = -\gamma x_0$, действуя аналогично, получаем

$$\frac{X(\omega)}{x_0} = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\omega + \omega_1 + i\gamma} + \frac{1}{\omega - \omega_1 + i\gamma} \right] = \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\omega + \omega_1)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2}} e^{i(\text{фаза})}.$$

Выражение для спектра мощности

$$|X(\omega)|^2 = \frac{x_0^2 (\omega^2 + \gamma^2)}{((\omega + \omega_1)^2 + \gamma^2) ((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)}$$

при высоких добротностях $Q \gg 1$ вблизи резонанса $\omega \approx \omega_1$ вновь превращается в лоренцевскую линию $L(\omega)$:

$$|X(\omega)|^2 \approx \frac{x_0^2}{4 ((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)} \propto \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2}.$$

Мы можем сделать вывод, что спектр высокودобротного $Q \gg 1$ осциллятора лоренцевский при любых начальных условиях.

(??? maybe, but deriv. before is not about it, it is about 2 particular cases???)

Поскольку спектр каждого действительного сигнала $x(t) \in \text{Re}$ симметричен $X^*(\omega') = X(-\omega')$, в физике и радиотехнике также популярна другая (действительная) форма записи фурье-преобразования:

$$x(t) = \int_0^\infty a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^\infty b(\omega) \sin \omega t d\omega$$

Из (3.12) легко получить, что $|a(\omega)|^2$ снова представляет собой лоренцевскую линию. Действительные фурье-коэффициенты $a(\omega)$ и $b(\omega)$ часто называют амплитудами поглощения и дисперсии соответственно. Их физический смысл мы выясним ниже.

3. Произвольная внешняя сила. «Волшебство» нормальных колебаний

Пусть линейный осциллятор подвержен действию внешней силы $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Можно ввести «нормальные колебания» a и a^* , представляющие собой линейные комбинации x и $\dot{x}$. Они позволяют решить задачу о вынужденных колебаниях аналитически в общем виде. Сейчас мы покажем, что это сводит задачу к уравнению первого порядка, что позволит решить ее при произвольных начальных условиях $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Внешняя сила $f(t)$ при этом может быть произвольной функцией времени t . В частности, кратковременный удар $f(t) = p\delta(t)$ мгновенно придает осциллятору дополнительный импульс p .

Итак, уравнение линейного осциллятора можно кардинально упростить, сведя его к дифференциальному уравнению первого порядка. Переход осуществляется линейным преобразованием от переменных x и $\dot{x}$ к новым переменным a и a^* . Эвристическая идея такого перехода та же, что и в квантовой механике, а именно, метод факторизации. Сделать гамильтониан осциллятора не суммой квадратов x и $\dot{x}$, а произведением a и a^* . Проиллюстрируем это на простом примере осциллятора без диссипации $\ddot{x} + x = f(t)$.

Введем нормальное колебание $a = \dot{x} + ix$. Тогда $\dot{a} = \ddot{x} + i\dot{x}$. Домножая первое из этих соотношений на $-i$ и складывая со вторым, получаем

$$\dot{a} - ia = \ddot{x} + x = f(t),$$

уравнение первого порядка на a . Уравнение на $a^* = \dot{x} - ix$ получается комплексным сопряжением (3.14). Поскольку уравнение (3.14) первого порядка по производной по времени, оно легко решается при произвольной внешней силе $f(t)$.

Вооружившись этой идеей, вернемся к исходной задаче. Запишем уравнение вынужденных колебаний диссипативного осциллятора под действием произвольной внешней силы

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

в виде двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x + f(t).\end{aligned}$$

Умножив второе уравнение на $(\gamma + i\omega_1)/\omega_0^2$, приходим к уравнению для нормального колебания $a := x + (\gamma + i\omega_1)\dot{x}/\omega_0^2$ в виде

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma + i\omega_1)a + \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} f(t)$$

(???? I don't see it in my head, do it on a paper!!!)

Уравнение для второго нормального колебания $a^* = x + (\gamma - i\omega_1)\dot{x}/\omega_0^2$ получается из (3.17) комплексным сопряжением.

Уравнение (3.17) может быть решено в общем случае стандартным методом вариации постоянных. Например, для начальных условий $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ это дает:

$$a = \frac{\gamma + i\omega_1}{\omega_0^2} \int_0^t e^{-(\gamma + i\omega_1)(t-t')} f(t') dt'$$

Обратный переход к переменным x и $\dot{x}$ осуществляется с помощью формул

$$x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega_1} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega_1} \right) a^* \right), \quad \dot{x} = \frac{\omega_0^2}{2i\omega_1} (a - a^*).$$

Используя их, получаем общее решение (3.15) для начальных условий $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$x = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1(t-t') f(t') dt'$$

При выводе (3.20) предполагалось, что сила начинает действовать в момент времени $t = 0$ на неподвижный осциллятор $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Если начальные условия ненулевые, то к (3.20) следует добавить собственные затухающие колебания осциллятора.

Таким образом, переход к нормальным колебаниям позволяет решить задачу об осцилляторе под действием внешней силы в общем виде. В квантовой механике

введенные выше нормальным колебаниям a и a^* соответствуют операторы рождения $\hat{a}^\dagger$ и уничтожения $\hat{a}$.

Двумя предельными случаями действия на осциллятор внешней силы являются резкий удар и приложение медленно меняющейся силы. В первом случае время действия силы $f(t)$ так мало $\tau \ll \gamma^{-1}, \omega_0^{-1}$, что ее можно представить в виде $f(t) = p\delta(t)$, где $p = \tau f_0$. Тогда из (3.20) получаем

$$x = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t, \quad \dot{x} = \frac{\tau f_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} (-\gamma \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t).$$

Выражения (3.21) описывают свободные затухающие колебания осциллятора после действия удара, который придал ему энергию $p^2/2$ и импульс p .

Во втором случае характерное время изменения приложенной силы τ велико, гораздо больше, чем $\gamma^{-1}, \omega_0^{-1}$. Это значит, что в каждый момент времени осциллятор успевает «подстраиваться» к текущей величине силы и изменяет положение равновесия. Движение такое медленное, что силы инерции ($\sim \ddot{x}$) и трения ($\sim \dot{x}$) пренебрежимо малы по сравнению с возвращающей силой ($\sim x$), которая целиком уравнивается внешней силой. Отсюда следует, что

$$x = \omega_0^{-2} f(t)$$

Поучительно получить (3.22) непосредственно из общей формулы (3.20), что представляет собой хорошее самостоятельное упражнение (см. Задачу 9, I'll do it later!!!).

4. Резонанс

Наиболее важным частным случаем внешнего воздействия является гармоническая сила с частотой ω , близкой к собственной частоте осциллятора ω_0 . Здесь проявляется фундаментальное свойство осциллятора: он избирательно откликается на гармоническое воздействие. Если частота воздействия близка к собственной частоте осциллятора, то отклик становится сильным. Такое явление называется резонансом. (лат. *resonare* - давать отзвук, откликаться). Найдём частное решение уравнения осциллятора под действием гармонической силы

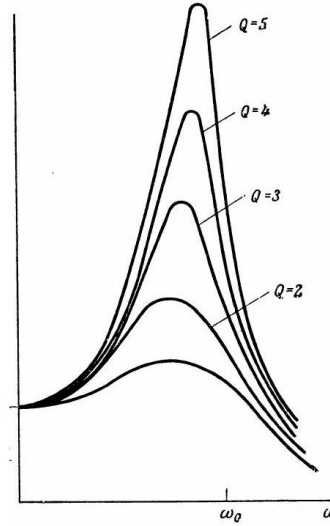
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

когда все собственные колебания уже затухли. Для этого заменим $\cos \omega t \rightarrow e^{i\omega t}$, решим задачу в комплексном виде, а потом «возьмем» от решения действительную часть $\text{Re } x(t)$. Эти действия представляют собой осуществление принципа суперпозиции на практике.

Действуя стандартным образом и разыскивая частное решение в виде $\sim e^{i\omega t}$, получаем ответ: $x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$, где

$$X(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{tg } \varphi(\omega) = + \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

В выражения для вынужденных колебаний (3.24), (3.25) не входят начальные условия, это движение целиком определяется внешним воздействием.



Амплитуда вынужденных колебаний имеет пик при частоте $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, причем чем выше добротность, тем острее резонанс. Для осцилляторов с добротностью $Q > 5$ разница между ω_2 и ω_0 меньше процента, так что ей можно пренебречь. Если внешняя сила постоянна ($\omega = 0$), то статическое смещение осциллятора равно, как видно из (3.24), $X(0) = f_0/\omega_0^2$. В резонансе же, при высоких добротностях $Q \gg 1$, амплитуда колебаний есть $X(\omega_2) = f_0/2\gamma\omega_0$. Это значит, что размах резонансных колебаний в Q раз больше статического смещения. Для высокодобротных резонаторов (кварцевых генераторов, лазеров и т.п.) это отношение может достигать огромных величин.

Таким образом, явление резонанса представляет собой эффективный способ возбуждения осциллятора. Система, вполне устойчивая к внешнему статическому воздействию, может быть разрушена слабой переменной силой, находящейся в резонансе с этой системой. Классическим примером из фольклора служит мост, разрушенный взводом солдат, шагающих в ногу в резонанс с мостом (??? analyze it later briefly in this note). Из (3.24) видно, что при больших добротностях $Q \gg 1$ отношение амплитуды колебаний $X(\omega)$ к максимальной $X(\omega_2)$ имеет вид лоренцевой линии:

$$\left| \frac{X(\omega)}{X(\omega_2)} \right|^2 = \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2},$$

как и спектральная линия свободных затухающих колебаний этого же осциллятора (3.12).

Thus, one can исследовать резонансные свойства одного и того же осциллятора разными способами: как по спектру собственных колебаний (3.9), (3.12), так и по резонансному отклику (3.26).

Дополнительную информацию об осцилляторе дают фазовые соотношения при резонансе. Сдвиг фазы между координатой осциллятора и вынуждающей силой $\varphi(\omega)$ определяется соотношением (3.25). Из него видно, что сила всегда опережает координату, а в резонансе сдвиг фаз составляет $\varphi(\omega_2) \approx -\pi/2$. Это связано с тем, что средняя работа внешней силы, производимая над осциллятором в единицу времени, равна $\langle \dot{x}f(t) \rangle$. Ясно, что за период она максимальна (осциллятор получает извне больше всего энергии), если сдвиг фаз между x и f близок к 90° . Особенно наглядно это видно из векторной диаграммы.

5. Векторная диаграмма

Проексплуатируем линейность уравнения (3.23) еще раз. Векторная диаграмма основана на методе комплексных амплитуд. Использование метода комплексных амплитуд очень эффективно в линейных системах, когда благодаря принципу суперпозиции колебания с несколькими частотами можно рассматривать независимо друг от друга. Метод комплексных амплитуд широко используется как в физике, так и в радиотехнике. Он очень эффективен потому, что обладает наглядной геометрической интерпретацией.

Идея проста: снова будем искать не действительное, а комплексное решение уравнения (3.22) в виде $x(t) \sim \exp(i\omega t)$. А затем просто возьмем от полученного решения действительную часть $\operatorname{Re} x(t)$. Тогда, в силу принципа суперпозиции, оно также будет решением (3.23). То же самое можно выразить геометрически, изобразив решение на комплексной плоскости в виде вектора $x = X(\omega) \exp(i\omega t)$, вращающегося против часовой стрелки с частотой ω . Тогда вектор скорости $\dot{x} = i\omega x$ будет повернут относительно x на $\pi/2$ против часовой стрелки, а вектор ускорения $\ddot{x} = (i\omega)^2 x$ - повернут на π . Эти вектора, так же, как и вектор силы $f = f_0 e^{i\omega t}$, вращаются против часовой стрелки с частотой ω . Значит, уравнение (3.23) можно рассматривать как векторное равенство. Это сразу дает возможность вычислить амплитуду $X(\omega)$ из правила сложения векторов. По теореме Пифагора получаем соотношения

$$f_0^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 X(\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 X(\omega)^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = 2\gamma\omega / (\omega^2 - \omega_0^2),$$

которые, естественно, совпадают с (3.24), (3.25). Из векторной диаграммы также сразу видна отмеченная выше ортогональность в резонансе вектора координаты и вектора силы. В резонансе амплитуда отстает от силы на четверть периода. Внешняя сила при этом совершает над осциллятором максимальную работу.

(discuss more applications. Currently, I don't apply this method, not sure that it is a powerful one.)

6. Спектры собственных и вынужденных колебаний

Свободные затухающие колебания осциллятора, описываемые уравнением (3.1) при $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ можно представить в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Эту функцию, как любую действительную функцию времени можно записать в виде интеграла Фурье в действительной форме:

$$x(t) = \int_0^\infty a(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^\infty b(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

где фурье-компоненты равны

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty x(t) \sin \omega t dt \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty x(t) \cos \omega t dt$$

Физический смысл этих компонент в том, что $a(\omega)$ - это амплитуда поглощения, а $b(\omega)$ - это амплитуда дисперсии.

(??? why???)

Спектр мощности сигнала равен сумме их квадратов $|X(\omega)|^2 = a^2(\omega) + b^2(\omega)$.

Найдем формулу линии (спектр) затухающих колебаний (3.28). Для простоты вычислений наложим на начальные условия соотношение $v_0 + \gamma x_0 = 0$ (??? what will be for a more general case???). Тогда из (3.28) получаем

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$$

так что для фурье-компонент получаем

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{x_0}{2\pi} \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\omega\gamma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \\ b(\omega) &= \frac{x_0}{2\pi} \frac{2\gamma(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \\ |X(\omega)|^2 &= \frac{x_0^2}{\pi^2} \frac{\omega^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \end{aligned}$$

7. Амплитуды поглощения и дисперсии

Спектр вынужденных колебаний осциллятора также удобно выразить через амплитуды поглощения и дисперсии. Действительно, установившиеся вынужденные колебания (3.24), (3.25) линейного осциллятора (3.23) можно представить в эквивалентном виде

$$x(t) = a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t$$

где $a(\omega)$ и $b(\omega)$ - вновь амплитуды поглощения и дисперсии

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2\gamma\omega f_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \\ b(\omega) &= \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \end{aligned}$$

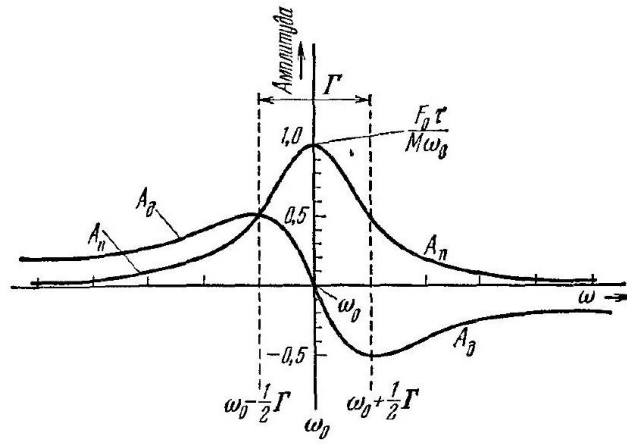
Суммарная амплитуда спектра мощности есть

$$|X(\omega)|^2 = a^2(\omega) + b^2(\omega) = \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

При этом мы избавились от описания процесса при помощи сдвига по фазе $\varphi(\omega)$.

На первый взгляд замена (3.24) на (3.33) производит впечатление «что стрижено, что брито». Но математически тривиальные преобразования часто придают исследованию новый смысл, достигая в итоге существенно новых результатов. В данном случае в результате перехода от (3.24) и (3.25) к (3.33) возникают новые физические величины: $a(\omega)$ - амплитуда поглощения и $b(\omega)$ - амплитуда дисперсии. Составляющая $a(\omega) \sin \omega t$ отстает от вынуждающей силы $f \cos \omega t$ вблизи резонанса на $\pi/2$. Поэтому среднее значение поглощаемой осциллятором мощности за период полностью определяется этой составляющей. Дисперсионное колебание $b(\omega) \cos \omega t$ в точности следует по фазе за вынуждающей силой, и его интегральный вклад за цикл в поглощаемую мощность равен нулю.

(!! check this, add formulas)



Именно с этими обстоятельствами связаны названия амплитуд. Средняя по времени поглощаемая осциллятором мощность определяется членом (3.33) с $a(\omega)$, поскольку он отстает по фазе на 90° градусов от силы. А член (3.33) с $b(\omega)$ является точным решением уравнения для установившихся колебаний при отсутствии диссипации $\gamma = 0$. Поэтому он описывает дисперсионные свойства осциллятора, но не диссипативные, связанные с поглощением.

(!! check this!????)

Из сравнения величин (3.32) и (3.35) видно, что все амплитуды описываются похожими, но не одинаковыми «резонансными кривыми». В пределе же высокой добротности $Q \gg 1$ все спектры мощности превращаются в лоренцевскую линию $L(\omega) = (\gamma/\pi) ((\omega - \omega_1)^2 + \gamma^2)^{-1}$.

8. Почему спектральные линии свободных затухающих и вынужденных резонансных колебаний совпадают?

В совпадении этих функций нет ничего удивительного. Решение задачи Коши (3.2), дополненное условием аналитичности сигнала, $x(t) = 0$ при $t < 0$, представляет собой функцию Грина (фундаментальное решение) для уравнения осциллятора. А ее фурье-образ является откликом осциллятора на гармонику внешней силы с определенной частотой. Поэтому естественно, что эти спектры совпадают. Рассмотрим это подробнее.

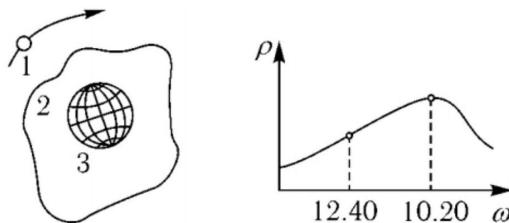
Обычное решение задачи Коши (3.2) $x(t)$, дополненное условием $x(t) = 0$ при $t < 0$ становится обобщенной функцией $\tilde{x}(t) = \theta(t)x(t)$, где $\theta(t)$ - функция Хевисайда. Продифференцируем ее два раза, выбрав для простоты начальные условия $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$. Тогда $\dot{\tilde{x}}(t) = \delta(t)x(0) + \theta(t)\dot{x}(t) = \theta(t)\dot{x}(t)$, $\ddot{\tilde{x}}(t) = \delta(t)\dot{x}(0) + \theta(t)\ddot{x}(t) = v_0\delta(t) + \theta(t)\ddot{x}(t)$. Это значит, что $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1), в правую часть которого добавлена дельта-функция $\delta(t)$. А именно, $\hat{L}\tilde{x}(t) = v_0\delta(t)$, где введен оператор уравнения (3.1) $\hat{L} = d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2$. Таким образом, $\tilde{x}(t)$ представляет собой фундаментальное решение (функцию Грина) уравнения осциллятора (3.1). Вычисляя фурье-образ $X(\omega)$ фундаментального решения $\tilde{x}(t)$, сразу получаем выражение, совпадающее с (3.24). Видим, что спектральная линия свободных затухающих колебаний и частотная функция отклика вынужденных резонансных колебаний совпадают.

Полученный нами вывод имеет важное прикладное значение. Измерения амплитуд поглощения и дисперсии доставляют эффективные способы измерения резонансной частоты и ширины линии. Мы можем определить резонансную частоту и ширину линии двумя различными способами. Можно измерить резонансную кривую отклика, а можно снять спектр затухающих колебаний осциллятора.

9. Осциллятор «Земля-атмосфера»

Рассмотрим конкретный пример осциллятора, иллюстрирующий все вышесказанное. В нем оба описанных метода измерения резонансных свойств осциллятора дополняют друг друга.

Грандиозный природный осциллятор представляют собой колебания земной атмосферы. Атмосфера шарообразна и обволакивает Землю равномерно со всех сторон. Под влиянием Луны атмосфера вытягивается и приобретает форму дыни. Если такую «вытянутую» атмосферу предоставить самой себе, то возникнут ее свободные колебания. Так получается осциллятор «Земля-атмосфера». Колебаниями этого осциллятора управляет Луна, которая вращается вокруг Земли. На самом деле можно считать, что Луна стоит неподвижно на некотором расстоянии от Земли, а та вращается вокруг своей оси. Поэтому проекция гравитационной силы на соединяющую планеты линию имеет периодическую составляющую. Отклик атмосферы на приливы и отливы Луны будет обычным откликом осциллятора на периодическую силу. Период этого воздействия составляет $T = 12$ ч 40 мин: приливы происходят дважды в сутки, плюс еще немного из-за собственного движения Луны.



Для того чтобы нарисовать резонансную кривую отклика, нужно найти две характеристики осциллятора: собственную частоту ω_0 и скорость затухания γ . Эти две неизвестные величины можно получить из двух измерений. Во-первых, можно измерить время задержки прилива по отношению к прохождению Луны $\Delta T = 0$ ч 55 мин. Во-вторых, можно измерить период собственных затухающих колебаний атмосферы. Такой случай доставляют нам глобальные извержения гигантских вулканов. При этом удастся измерить период собственных колебаний атмосферы, составляющий $T_1 = 10$ ч 20 мин. Два уравнения - два неизвестных, и нам становится известна вся резонансная кривая. Это позволяет оценить, например, добротность осциллятора «Земля-атмосфера».

Сделать это можно следующим образом. Для ω_0 и γ получаем из изложенных выше условий два уравнения

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2,$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta T}{T} = \frac{2\gamma(2\pi/T)}{\omega_0^2 - (2\pi/T)^2}.$$

В качестве грубой оценки по порядку величины можно пренебречь в первом уравнении (3.36) скоростью диссипации $\gamma \ll \omega_0$. Тогда для добротности осциллятора «Земля-атмосфера» $Q = \omega_1/2\gamma \approx \omega_0/2\gamma$ получаем

$$Q \approx \frac{T_1^2}{T^2 - T_1^2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi\Delta T}{T} \right)$$

Подставляя сюда приведенные выше значения, получаем $Q \approx 5$.

10. Секулярные решения

(???????????)

Явление резонанса может проявляться не только в резком возрастании амплитуды установившихся колебаний, которое наступает при приближении частоты ω гармонического внешнего воздействия к собственной частоте ω_0 осциллятора. Резонанс может осуществляться также в виде неограниченно возрастающей, непериодической функции времени секулярного решения.

Рассмотрим линейный осциллятор без затухания, на который действует периодическая внешняя сила:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

где f_0 - постоянная амплитуда внешней силы, ω - ее частота. Общее решение уравнения (3.38) имеет вид

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Выберем в качестве начальных условий $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ при $t = 0$. Тогда движение такого осциллятора будет описываться функцией

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

Проследим, как происходит нарастание амплитуды колебаний осциллятора при резонансе, когда $\omega \rightarrow \omega_0$. В этом случае $\omega_0^2 - \omega^2 =$

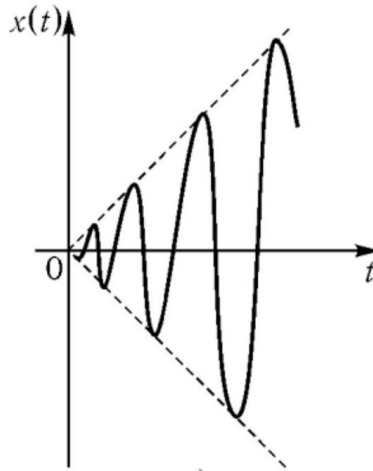
$$= (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \text{ и } \cos \omega t - \cos \omega_0 t \approx -(\omega t - \omega_0 t) \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{f_0}{2\omega_0} \cdot \frac{-(\omega t - \omega_0 t) \sin \omega_0 t}{(\omega_0 - \omega)} = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

В случае точного резонанса $\omega = \omega_0$ получаем секулярное решение

$$x(t) = (f_0/2\omega_0) t \sin \omega_0 t$$

При периодическом воздействии $\omega = \omega_0$ амплитуда колебания ведет себя как непериодическая функция времени. Множитель t соответствует секулярному росту амплитуды, а скорость ее нарастания зависит от величины f_0 .



Название секулярный (от лат. saecularis - вековой, столетний) пришло из теории движения планет, где такие решения получались при попытке описать возмущения в движении планет. Способы устранения секулярных решений мы рассмотрим в Лекции 5.

Секулярный рост амплитуды - одно из простейших проявлений неустойчивости системы по отношению к внешним воздействиям. Такая неустойчивость, однако, ограничивается слишком большой идеализацией нашей модели (3.38). Для уточнения модели следует учесть либо нелинейные эффекты (оставляя систему консервативной), либо линейную диссипацию (вязкость, трение, сопротивление и т.п.). В первом случае нелинейные эффекты приводят к сдвигу частоты и постепенному выходу из резонанса. Во втором случае конечная добротность приводит к тому, что максимальная амплитуда установившихся колебаний достигается не при точном совпадении собственной частоты осциллятора с частотой вынуждающей силы.

Приложение. Теорема Парсеваля (!!???)

Ее еще называют иногда теоремой Планшереля. Она позволяет вычислить энергию сигнала, приходящуюся на частотный интервал $[\omega, \omega + d\omega]$. Мощность сигнала $x(t)$ (поля, тока, координаты осциллятора и т.д.) всегда пропорциональна квадрату его модуля $|x(t)|^2$ (вектор Пойнтинга, джоулево тепловыделение, работа над осциллятором и т.д.). Теорема Парсеваля заключается в том, что полная совершенная работа (полная энергия сигнала) может быть выражена как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Таким образом, спектром мощности сигнала является величина $|X(\omega)|^2$, имеющая смысл энергии сигнала, приходящейся на частотный интервал $[\omega, \omega + d\omega]$, в этом и заключается теорема.

Для доказательства (3.43) учтем, что $|x(t)|^2 = x^*(t)x(t)$ и подставим (3.5) в левую часть (3.43). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} X^*(\omega')X(\omega)e^{i(\omega-\omega')t}.$$

Учитывая ортогональность фурье-гармоник

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega')$$

получаем (3.43)

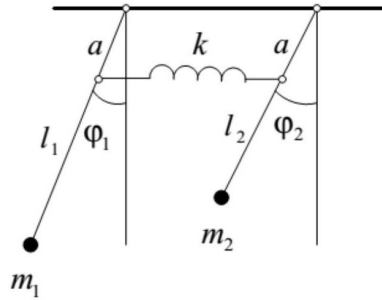
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X^*(\omega)X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |X(\omega)|^2$$

Теорема Парсеваля является аналогом теоремы Пифагора в векторном пространстве со скалярным произведением. Она говорит об унитарности преобразования Фурье. Полная энергия сигнала не зависит от выбранного представления. Ее значение, вычисленное суммированием по частотным и по временным интервалам, совпадают.

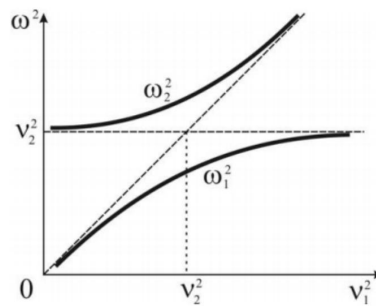
3.0.6 P.4. Coupled Oscillations

1. Биения. Непересечение термов

Колебания двух (или нескольких) связанных осцилляторов имеет ряд особенностей. Начнем их рассмотрение с биений. Биения - это колебания с периодически изменяющейся (промодулированной) амплитудой. Биения возникают в результате наложения двух гармонических колебаний, частоты которых близки друг другу. Частота биений равна разности частот данных колебаний. Рассмотрим эти явления на конкретном примере биений двух слабо связанных одинаковых осцилляторов.



Два одинаковых маятника, соединенных слабой пружиной, - это система двух связанных линейных осцилляторов. Оказывается, что она не более сложна, чем одиночный осциллятор. Преобразование координат сводит такую систему к двум не связанным между собой осцилляторам. Две системы, на которые можно разбить систему двух связанных осцилляторов, называются парциальными осцилляторами. Парциальный осциллятор может быть выделен из полной системы, если положить равными нулю все остальные координаты. Частоты, с которыми происходят колебания в системе связанных осцилляторов, называются нормальными (собственными). Собственные частоты парциальных подсистем называются парциальными. Парциальные частоты определяются выбором независимых динамических переменных. Нормальные же частоты не зависят от выбора переменных, они определяются только параметрами системы связанных осцилляторов.



Рассмотрим свободные колебания в системе с двумя степенями свободы на примере двух маятников с массами m_1, m_2 и длиной стержней l_1, l_2 , связанных пружиной жесткости k . Расстояние от точки закрепления пружин до осей вращения маятников a . Полагая углы отклонения маятников малыми, запишем для них уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{x}_1 &= -m_1 g l_1 x_1 + k a^2 (x_2 - x_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g l_2 x_2 - k a^2 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Слагаемое $k a^2 (x_2 - x_1)$ определяет силовую связь маятников. Полагая в первом уравнении (4.1) $x_2 = 0$, т.е. закрепляя второй маятник, получаем уравнение колебаний

первой парциальной системы с парциальной частотой $v_1^2 = g/l_1 + ka^2/m_1l_1^2$. Из второго уравнения (4.1) при $x_1 = 0$ находим вторую парциальную частоту $v_2^2 = g/l_2 + ka^2/m_2l_2^2$. Вводя коэффициенты связи $\alpha_1 = ka^2/m_1l_1^2$ и $\alpha_2 = ka^2/m_2l_2^2$, представим систему уравнений (4.1) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + v_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + v_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 &= 0.\end{aligned}$$

Разыскивая решение (4.2) в виде $x_1, x_2 \sim \exp(i\omega t)$, для собственных частот колебаний в системе ω получаем

$$\begin{vmatrix} v_1^2 - \omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & v_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

то есть

$$\omega^4 - \omega^2 (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0.$$

Решения этого биквадратного уравнения имеют вид

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2} \left[v_1^2 + v_2^2 \pm \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right].$$

Частоты ω_1 и ω_2 не совпадают с парциальными и называются собственными или нормальными частотами системы. Их значения определяются только свойствами системы и не зависят от разбиения системы на парциальные части.

Для системы с двумя степенями свободы соотношение между нормальными $\omega_{1,2}$ и парциальными $v_{1,2}$ частотами наглядно иллюстрируется зависимостью $\omega = \omega(v)$ (график Вина) (????). Из нее следует, что при любых значениях параметров системы парциальные частоты всегда лежат между нормальными частотами. При этом $\omega_{1,2}$ никогда не совпадают с $v_{1,2}$. Аналогичное непересечение уровней имеет место и в квантовой механике. Там этой ситуации соответствует теорема Вигнера-фон Неймана о непересечении термов молекулы с одинаковой симметрией.

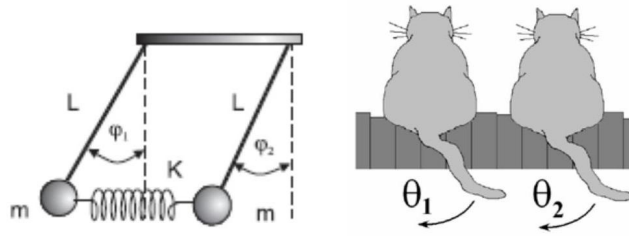
В соответствии с принципом суперпозиции общее решение системы уравнений (4.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ q_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Это решение описывает нормальные моды колебаний, происходящих на одной из нормальных частот системы. Постоянные C_1, C_2, φ_1 и φ_2 определяются начальными условиями, а коэффициенты распределения амплитуд q_1 и q_2 в собственных векторах (4.6) даются соотношениями

$$q_1 = \frac{v_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}, \quad q_2 = \frac{v_1^2 - \omega_2^2}{\alpha_1}.$$

Из (4.6) следует, что амплитуда колебаний одного из маятников на частоте ω_1 (или ω_2) может быть произвольной. Амплитуда же колебаний другого маятника на той же частоте всегда находится в определенном соотношении с амплитудой колебаний первого маятника. Специальным подбором начальных условий можно получить чисто гармонические колебания системы на частоте ω_1 или ω_2 .



(????????????????????)

Из соотношений (4.5) вытекает, что парциальные частоты ν_1 и ν_2 всегда лежат между собственными частотами ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$. В свою очередь из соотношений (4.5) и (4.7) следует, что коэффициент распределения амплитуд q_1 на частоте ω_1 всегда больше нуля, а q_2 на частоте ω_2 всегда меньше нуля. Поэтому колебания маятников на частоте ω_1 всегда происходят в фазе, а колебания на частоте ω_2 - в противофазе. Здесь имеет место некий классический аналог осцилляционной теоремы в квантовой механике.

2. Обмен энергий между парциальными системами

Взаимодействие парциальных подсистем проявляется в передаче энергии от одного маятника к другому. Рассмотрим колебания маятников при начальных условиях $x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. В этом случае из (4.6) находим

$$x_1 = x_0 \frac{1}{q_1 + |q_2|} (|q_2| \cos \omega_1 t + q_1 \cos \omega_2 t),$$

$$x_2 = x_0 \frac{q_1 |q_2|}{q_1 + |q_2|} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t).$$

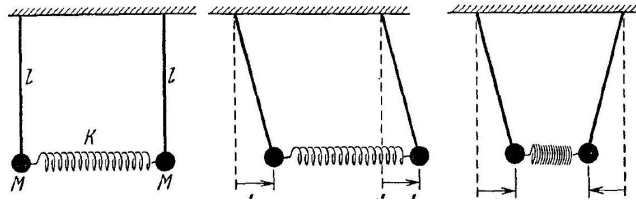
Колебания первого маятника можно записать в виде

$$x_1(t) = a(t) \cos [\omega_1 t - \varphi(t)]$$

где

$$a^2(t) = \frac{x_0^2}{(q_1 + |q_2|)^2} [q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 |q_2| \cos (\omega_2 - \omega_1) t],$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = -\frac{|q_2| \sin (\omega_2 - \omega_1) t}{q_1 + |q_2| \cos (\omega_2 - \omega_1) t}.$$



Если частоты ω_1 и ω_2 не слишком далеки друг от друга, то (4.9) можно рассматривать как промодулированное колебание с медленно меняющейся со временем амплитудой колебаний с периодом $2\pi(\omega_2 - \omega_1)$. Максимальное значение амплитуды равно x_0 , а минимальное $x_0(q_1 - |q_2|)/(q_1 + |q_2|)$. Колебания второго маятника представляют собой биения

$$x_2(t) = x_0 \frac{2q_1 |q_2|}{q_1 + |q_2|} \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right).$$

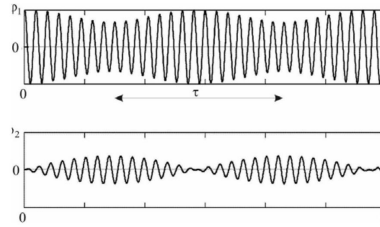
При сильном различии парциальных частот один из коэффициентов распределения $q_{1,2}$ много больше другого. Пусть, например, $v_1^2 \gg v_2^2$. Тогда из (4.7) следует

$q_1 = v_1^2/\alpha_1, |q_2| \approx \alpha_2/v_1^2$. Поскольку, как правило, связь можно считать слабой $\alpha_1\alpha_2 \ll v_1^2v_2^2$, то $q_1 \gg 1, |q_2| \ll 1$. В этом случае минимальное значение амплитуды первого маятника приблизительно равно $x_0(1 - 2|q_2|/q_1)$, т.е. модуляция амплитуды колебаний первого маятника мала. Максимальная амплитуда второго маятника приблизительно равна $2x_0|q_2|$, т.е. много меньше амплитуды первого маятника. Таким образом, при слабой связи обмен энергией между парциальными системами незначителен. С приближением q_1 к $|q_2|$ минимальное значение амплитуды первого маятника уменьшается, т.е. растет перекачка энергии от первого маятника ко второму.

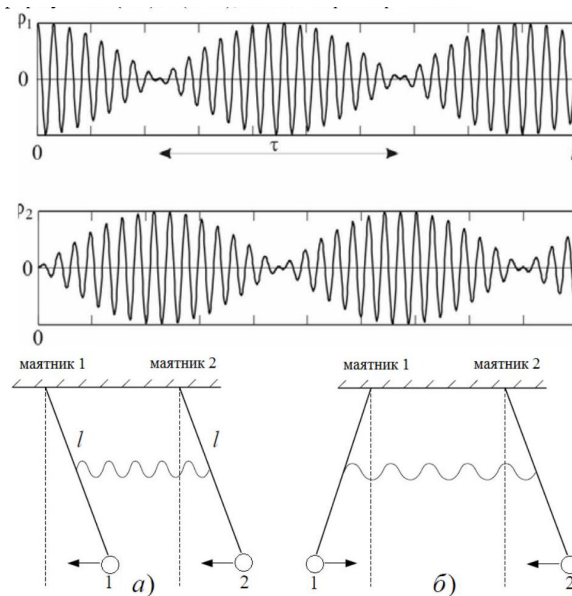
При равенстве парциальных частот $v_1 = v_2 = v$ коэффициенты распределения амплитуд также становятся равными по модулю $q_1 = |q_2| = q$, а колебания маятников приобретают вид

$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right),$$

$$x_2(t) = x_0 q \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right).$$



Для одинаковых маятников, когда $q = 1$, это классический случай биений. Оба маятника совершают биения, огибающая которых сдвинута по времени на $\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Периодически происходит полная перекачка энергии от одного маятника к другому. В этом и заключается физический смысл понятия сильной «связанности». Время передачи энергии равно $\tau = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Так как обычно $\alpha \ll v^2$, то это время составляет $\tau = \pi v/\alpha$, т.е. обратно пропорционально коэффициенту связи α . Условие $\alpha \ll v^2$ означает, что частоты ω_1 и ω_2 близки и колебания, описываемые формулами (4.9) и (4.11), имеют характер биений.



Амплитуда колебаний первого маятника $x_1(t)$ уменьшается вследствие перекачки энергии во вторую парциальную систему. При этом амплитуда колебаний второго маятника $x_2(t)$ возрастает также по синусоидальному закону и достигает максимального

значения x_0 в тот момент, когда амплитуда колебаний второго маятника $x_2(t)$ становится равной нулю. Далее начинается процесс перекачки энергии из второй парциальной системы в первую. Такой полный обмен энергией между парциальными системами характерен для случая равенства парциальных частот $\nu_1 = \nu_2$. Период биений равен $\tau = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. При малой разности собственных частот период биений $\tau \approx 2\pi\nu/\alpha$.

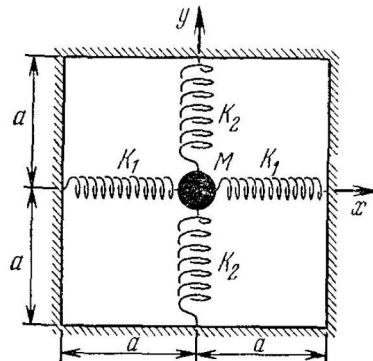
Итак, в случае синхронизма парциальных частот ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) происходит полная перекачка энергии из одной парциальной подсистемы в другую. Величина коэффициентов связи определяет время перекачки: чем они больше, тем меньше время перекачки. Если же парциальные частоты сильно различаются, то имеет место слабый обмен энергией между подсистемами и малая «глубина» биений даже при сильной связи. Поэтому более информативно взаимодействие подсистем характеризуется не коэффициентами связи α_1, α_2 , а так называемой связанностью подсистем $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}/|\nu_1^2 - \nu_2^2|$.

3. Фигуры Лиссажу

Другой пример связанных колебаний доставляет нам сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Такое сложение возникает в двумерном гармоническом осцилляторе. Рассмотрим массу m , которая может свободно двигаться в плоскости (x, y) в квадратной рамке. В направлении x она соединена со стенками рамки двумя невесомыми пружинами жесткости k_x , а в направлении y - двумя другими невесомыми пружинами жесткости k_y . Для малых колебаний, когда нелинейными эффектами можно пренебречь, смещения массы x и y из положения равновесия описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_x^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= 0.\end{aligned}$$

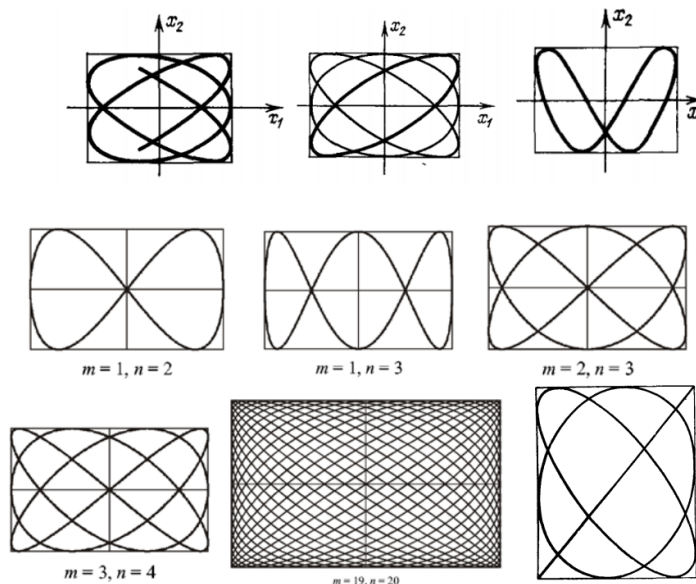
Здесь $\omega_x^2 = 2k_x/m, \omega_y^2 = 2k_y/m$. Движения в направлениях x и y независимы, и каждое из них представляет собой гармонические колебания. Частоты этих колебаний ω_x и ω_y , вообще говоря, различны. Если они совпадают, то (4.13) описывает, например, малые колебания сферического маятника около положения равновесия. Соответствующие траектории движения называются фигурами Лиссажу. Фигуры Лиссажу можно наблюдать на экране осциллографа, когда на пластины горизонтального отклонения подается напряжение вида $a \cos \omega_x t$, а на пластины вертикального отклонения - напряжение вида $b \cos(\omega_y t + \varphi)$.



Итак, фигуры Лиссажу - это кривые линии на плоскости Oxy , которые представляют собой траектории точки, одновременно совершающей гармонические колебания во взаимно перпендикулярных направлениях. Параметрические уравнения кривых Лиссажу имеют вид $x = a \cos \omega_x t$, $y = b \cos(\omega_y t + \varphi)$. Здесь a, b, ω_x, ω_y и φ - постоянные числа. Если $a = b, \omega_x = \omega_y$ и $\varphi = \pm\pi/2$, то фигура Лиссажу представляет собой

окружность. Если ω_x и ω_y соизмеримы (т.е. $\omega_x/\omega_y = m/n$ - рациональное число), то обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют общий период $T = 2\pi m/\omega_x = 2\pi n/\omega_y$. В этом случае фигура Лиссажу имеет вид многократно пробегаемой замкнутой алгебраической кривой конечной длины. Если ω_x и ω_y несоизмеримы, то функции $x(t)$ и $y(t)$ не имеют общего периода, и фигура Лиссажу представляет собой бесконечную кривую, точки которой при достаточно большом значении t как угодно близко пройдут от любой наперед заданной точки прямоугольника $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Фигура Лиссажу заполняет прямоугольник всюду плотно.

Вид конкретной фигуры Лиссажу существенно зависит от соотношения частот ω_x/ω_y . Например, при малых колебаниях сферического маятника $\omega_x = \omega_y$ кривая Лиссажу представляет собой эллипс, вписанный в прямоугольник. Вид этого эллипса зависит от разности фаз φ . При $\varphi = 0$ получается отрезок диагонали прямоугольника, при малых $\varphi \ll \pi$ - сжатый к диагонали эллипс. При $\varphi = \pi/2$ получается эллипс с главными осями, параллельными осям абсцисс и ординат. При увеличении φ от $\pi/2$ до π эллипс сжимается ко второй диагонали, а при дальнейшем увеличении φ весь процесс повторяется сначала.



Если частоты равны лишь приблизительно $\omega_x \approx \omega_y$, то фигура Лиссажу похожа на эллипс, но незамкнута. При каждом следующем периоде, через время $2\pi/\omega_x$, сдвиг фаз φ увеличивается на величину $2\pi(\omega_x - \omega_y)/\omega_x$ по сравнению с предыдущим. Поэтому кривая Лиссажу при $\omega_x \approx \omega_y$ - это медленно деформирующийся эллипс, проходящий все фазы от сжатия в одну диагональ до сжатия в другую за время $\pi/(\omega_x - \omega_y)$.

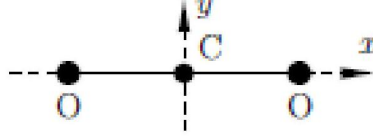
Если одна из частот вдвое больше другой $\omega_y = 2\omega_x$, то фигура Лиссажу похожа на восьмерку. При сдвиге фаз $\varphi = 0$ она превращается в параболу $y = 2x^2 - 1$. Если одна из частот в n раз больше другой $\omega_y = n\omega_x$, то соответствующая фигура Лиссажу при $\varphi = 0$ представляет собой график многочлена Чебышева $y = P_n(x)$ степени n . (??? why???)

4. Колебания молекулы

Физически важным примером связанных колебаний являются колебания молекул. Рассмотрим такие колебания на примере малых колебаний линейной молекулы CO_2 . Пусть колебания молекулы CO_2 происходят в плоскости x, y . Совместим положение равновесия атома углерода С с началом координат, а атомов кислорода О - с осью x . Перенумеруем атомы слева направо индексами 1, 2, 3 и обозначим расстояние между атомами С и О в положении равновесия через l . Отсутствие поступательного движения и вращения молекулы как целого выражается условиями

$$\begin{aligned}m(x_1 + x_3) + Mx_2 &= 0, \\m(y_1 + y_3) + My_2 &= 0, \\y_1 - y_3 &= 0,\end{aligned}$$

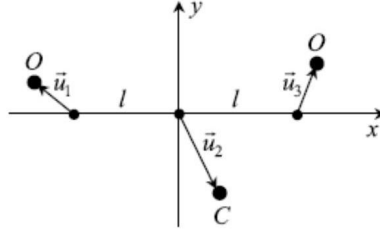
где m и M обозначают массы атомов кислорода и углерода соответственно.



Потенциальная энергия атомов молекулы $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ меняется как при изменении расстояний между атомами (соответствующие колебания называются валентными), так и при изменении углов между различными валентными связями (такие колебания называются деформационными). В случае молекулы CO_2 функция $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ имеет вид

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|, \alpha)$$

где α - угол между векторами $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$. В окрестности положения равновесия функция $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|, \alpha)$ квадратична по малым приращениям ее аргументов. Поэтому сами эти приращения достаточно найти в линейном приближении по смещениям координат молекул $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l + x_2 - x_1$, $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = l + x_3 - x_2$.



При малых деформациях молекулы угол α также мал $\alpha \approx (y_1 - y_2)/l + (y_3 - y_2)/l$. Считая для простоты, что потенциальные энергии валентных связей $\text{C} - \text{O}$ независимы друг от друга и от потенциальной энергии деформационных колебаний, получаем

$$U = U(l, l, 0) + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{\kappa l^2 \alpha^2}{2},$$

где k, κ - некоторые положительные константы.

Так как имеются три уравнения связей (4.14), то из шести переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ только три являются независимыми. Выберем из них в качестве обобщенных координат x_1, x_3 и y_1 . Тогда остальные переменные выражаются через обобщенные координаты из уравнений связей (4.14). В итоге функция Лагранжа, описывающая малые колебания молекулы, имеет вид

$$\begin{aligned}L = & \frac{m}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m^2}{M} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + m \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \dot{y}_1^2 - \\ & - 2\kappa \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 y_1^2 - \frac{k}{2} \left\{1 + \frac{2m}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right)\right\} (x_1^2 + x_3^2) - \frac{2km}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right) x_1 x_3.\end{aligned}$$

Функция Лагранжа распадается на сумму двух функций, зависящих только от $y_1, \dot{y}_1$ и от $x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3$. Это следствие предположения о независимости валентных и

деформационных колебаний. Поэтому нормальные колебания молекулы по этим двум наборам переменных можно искать независимо. Рассмотрим сперва уравнение движения по переменной y_1 :

$$m\ddot{y}_1 + 2\kappa \left(1 + \frac{2m}{M}\right) y_1 = 0$$

Оно соответствует деформационным колебаниям молекулы CO_2 с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

Рассмотрим теперь валентные колебания, уравнения которых имеют вид

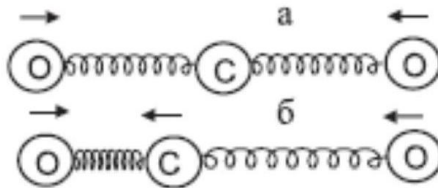
$$\begin{pmatrix} m\rho & m^2/M \\ m^2/M & m\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(1 + 2m\rho/M) & 2km\rho/M \\ 2km\rho/M & k(1 + 2m\rho/M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

где $\rho = 1 + m/M$. Из характеристического уравнения

$$-m\rho\omega^2 + k(1 + 2m\rho/M) = \pm (-m^2/M\omega^2 + 2km\rho/M)$$

находим собственные частоты симметричной и антисимметричной валентных мод

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k(2m + M)}{mM}}.$$



Первая частота (4.22) соответствует симметричной валентной моде, когда атом углерода покоится, а атомы кислорода совершают противофазные колебания. Вторая частота (4.22) соответствует антисимметричной валентной моде, когда атомы кислорода синфазно движутся в одну сторону, а атом углерода - в другую. Полученные собственные частоты молекулы CO_2 позволяют классифицировать ее спектры (см Задачи 4,7).

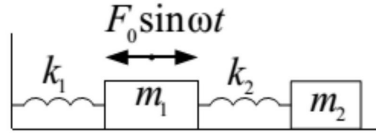
4. Колебания молекулы: Extra Statements

To which extent classical description is valid?

(??? I'll once finally find this answer)

5. Резонанс Фано. Антирезонанс. Гаситель колебаний

Связанные колебания доставляют нам весьма необычный пример резонансного поведения - антирезонанс. Путем правильного подбора параметров колебательной системы удастся снизить ее реакцию на внешнее периодическое воздействие. В связи с этим возникает вопрос: а можно ли создать ситуацию, в которой точка приложения переменной силы в системе остается все время неподвижной? Такая ситуация возможна, если система имеет по крайней мере две степени свободы. Это удивительное явление, антирезонанс, имеет не только теоретический, но и практический интерес.



Рассмотрим вынужденные колебания одномерной системы двух масс m_1 и m_2 , в которой внешняя периодическая сила $f_0 \sin \omega t$ приложена к первому телу m_1 . Массы соединены пружиной жесткости k_2 , а первая масса соединена со стенкой пружиной жесткости k_1 . Дифференциальное уравнение движения каждой из двух масс можно записать в виде

$$\begin{aligned} -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f_0 \sin \omega t &= m_1 \ddot{x}_1, \\ -k_2 (x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2, \end{aligned}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ - смещения грузов из положения равновесия, а трением мы пренебрегаем. Установившееся решение системы уравнений (4.23) имеет вид $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, где a_1, a_2 являются амплитудами вынужденных колебаний каждой массы, а значения φ_1 и φ_2 определяют сдвиг фазы колебаний каждой массы относительно внешней силы. Если не интересоваться фазами колебаний и найти только амплитуды колебаний, то в качестве частного решения можно взять $x_1 = a_1 \sin \omega t$, $x_2 = a_2 \sin \omega t$. Это дает систему двух алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} -a_1 m_1 \omega^2 + k_1 a_1 - k_2 (a_2 - a_1) &= f_0, \\ -a_2 m_2 \omega^2 + k_2 (a_2 - a_1) &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f_0 (k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}, \\ a_2 &= \frac{f_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}. \end{aligned}$$

Значения амплитуд существенно зависят от частоты вынуждающей силы. При определенных значениях ω знаменатели в (4.25) обращаются в нуль, а величины a_1 и a_2 стремятся к бесконечности. Это означает наступление резонанса в системе. Значения резонансных частот определяются из биквадратного уравнения

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0.$$

Интересен факт обращения в нуль числителя в первой из формул (4.25). Если частота возбуждения удовлетворяет равенству

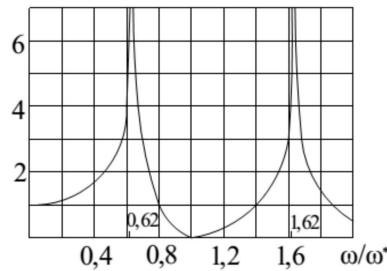
$$\omega = \omega_* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

то для амплитуд a_1 и a_2 находим $a_1 = 0$, $a_2 = -f_0/k_2$.

Не следует удивляться тому, что значение a_2 оказалось отрицательным. Это означает, что колебания второго тела противоположны по фазе внешней гармонической силе. Равенство $a_1 = 0$ означает, что первая масса остается все время неподвижной, хотя именно к ней приложена вынуждающая сила. Этот удивительный эффект невозможен в статических задачах. Иногда его называют антирезонансом. Кроме антирезонанса при $\omega = \omega_*$ имеются также два резонанса при значениях $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, являющихся корнями уравнения (4.26).

Overview of applications

Антирезонанс практически используется для динамических гасителей колебаний. Пусть имеется система, к которой приложена гармоническая возмущающая сила. В такой системе колебания неизбежны при любых ее параметрах. Однако если ввести в систему дополнительный груз на упругой связи, то получается описанная нами выше двухмассовая система. Как мы только что видели, колебания основного (первого) груза полностью исчезнут, если параметры k_2 и m_2 дополнительной части системы подобраны согласно условию (4.27). В этом случае второй груз выполняет роль динамического гасителя колебаний для основной системы.



При соответствующей настройке виброгасителя, когда исчезают колебания основной конструкции $a_1 = 0$, дополнительный груз, как правило, вибрирует очень сильно. Амплитуда a_2 колебаний гасителя равна отношению амплитуды внешней силы к жесткости дополнительной пружины $a_2 = -F_0/k_2$. Для легкого гасителя, когда значение m_2 невелико, эта жесткость также должна быть малой. В этом и заключается условие оптимальной настройки гасителя.

Идея динамического виброгасителя увлекательна как панацея от всяких нежелательных вибраций. К сожалению, у динамического виброгасителя есть один серьезный недостаток. Он способен гасить колебания лишь строго фиксированной частоты. Всякое изменение частоты возмущения вызовет нарушение условия (4.27), и дополнительная часть системы утратит свойства гасителя. Возможно даже, что условия работы основной системы не улучшатся, а ухудшатся.

Вторая масса гасит колебания лишь в малой окрестности частоты $\omega = \omega_*$. Если же частота возмущения близка к $\omega = \omega_2$, то возникнет резонанс, которого не было при отсутствии «гасителя». Путем введения в систему дополнительного «гасителя» с вязким сопротивлением можно несколько расширить диапазон частот, внутри которого происходит интенсивное гашение колебаний. Поэтому «гаситель» обычно снабжается демпфирующим элементом со специально подобранным вязким сопротивлением.

6. Теорема Бертрана: closed orbitals are only for two types of potential

(??? TODO: write better, why it is so???)

Еще один пример совместных колебаний (на этот раз нелинейных) доставляет нам движение нерелятивистской частицы массы m в центральном поле $U(r)$. В полярных координатах r, φ в плоскости движения сохраняющимися величинами являются энергия E и момент импульса L :

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r),$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}.$$

Отсюда получаем, что в радиальном направлении частица совершает нелинейные колебания в потенциале $U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + L^2/2mr^2$ от r_1 до r_2 . Минимальное r_1 и

максимальное r_2 расстояния определяются соотношением $U_{\text{эфф}}(r_{1,2}) = E$. Период такого колебания

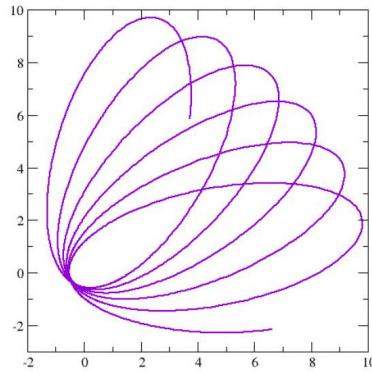
$$T_r = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}$$

в общем случае не совпадает со временем, за которое радиус-вектор поворачивается на 2π , т.е. частица совершает полный оборот. Это значит, что траектория частицы незамкнута. Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы апсидальный угол

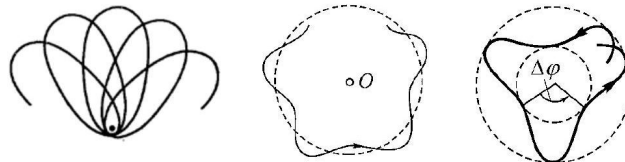
$$\Phi(E, L) = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}},$$

на который радиус-вектор поворачивается за период T_r , составлял дробную часть от 2π , т.е. $\Phi = 2\pi m/n$, где m, n - целые числа. Тогда через n повторений периода радиус-вектор частицы сделает m полных оборотов и совпадет со своим первоначальным значением, траектория замкнется.

Замкнутость траектории - редкое событие. Она возможна только для двух типов потенциала $U(r)$. Об этом и говорит теорема Бертрана, которая утверждает, что среди центральных потенциалов только в кулоновском (кеплеровском) поле $U(r) = \alpha/r$ и осцилляторном (гуковском) поле $U(r) = m\omega^2 r^2/2$ все финитные траектории движения частицы замкнуты.



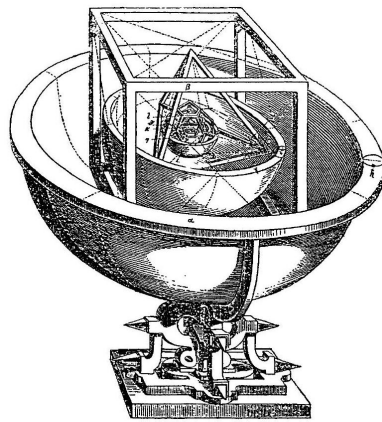
Итак, только в полях центральных сил, подчиняющихся закону Гука или закону всемирного тяготения, орбиты связанных частиц являются замкнутыми. Таким образом, в поле центральных сил орбитальное движение в плоскости можно рассматривать как суперпозицию двух колебательных движений с одинаковыми периодами: относительно радиуса r и относительно угла φ . Это очень важное обстоятельство. Экспериментальные свидетельства (астрономические наблюдения) о замкнутости орбит в поле сил однозначно фиксируют закон их изменения с расстоянием. Здесь имеется еще одна важная связь между характером потенциала и вырождением. Под вырождением мы понимаем уникальную ситуацию равенства периодов колебаний T_r и T_φ по переменным r и φ , из которых складывается движение по орбите.



Однако в поле этих же сил (гуковской и кеплеровской) имеется еще одно вырождение - случайное. А именно, существование орбит с одной энергией E , но с разными значениями момента импульса L . В квантовой механике такому вырождению соответствует существование одного уровня энергии E с разными значениями L . В случае вырождения орбит по периодам ($T_r = T_\varphi$) существует дополнительная к E и L сохраняющаяся величина, представляющая собой алгебраическую функцию координат и импульса. В задаче Кеплера такой величиной является вектор Лапласа (в квантовой механике его называют вектором Рунге-Ленца), в центральном поле с гуковским законом притяжения это тензор Демкова.

(??? there is another, English word for it, I forgot, but it is well-known)

Таким образом, для существования дополнительного (помимо E и L) интеграла движения, который бы являлся простой алгебраической функцией координат и импульса движущейся частицы, достаточно, чтобы движение было вырожденным, а финитные орбиты - замкнутыми. В квантовой механике такое вырождение называется случайным.



(???? what is it???)

Решение задачи (4.28) в квадратурах зависит от четырех постоянных E, L, r_0, φ_0 . Для того чтобы увидеть в орбитальном движении колебания, удобно перейти к эквивалентной одномерной задаче, в которой апсидальный угол $\Phi(E, L)$ играет роль периода. Действительно, в потенциале $U_{\text{эфф}}(r)$ частица совершает колебания между апсидальными точками r_1 и r_2 , то есть, между перигеом и апогеом орбиты. Это расстояния наименьшего и наибольшего приближения частицы к центру, $r_1 < r < r_2$. Таким образом, движение по замкнутой орбите - это суперпозиция двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.

Обе эти исключительные орбиты - эллиптические. В гуковском потенциале $U(r) = m\omega^2 r^2/2$, например, эллиптическая орбита симметрична и возникает при произвольном L . Так как вектор силы, действующей на частицу, равен $-m\omega^2 \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, то движение происходит по эллипсу, симметричному относительно начала координат. Такая же ситуация возникает при малых колебаниях сферического маятника. Это простейшая фигура Лиссажу с соотношением частот $1 : 1$. В кеплеровском же потенциале $U(r) = \alpha/r$ при произвольном L частица движется по эллипсу, фокус которого находится в начале координат.

Теперь обратимся, собственно, к доказательству теоремы Бертрана. Сначала сделаем несколько предварительных замечаний. Нас интересует не временная динамика $r(t)$ и $\varphi(t)$, а форма орбиты $r = r(\varphi)$. Параметром становится не время t , а угол φ , они связаны соотношением $Ldt = mr^2 d\varphi$. Получим для уравнения орбиты формулу Бине. Для этого уравнение орбиты нужно записать для обратного расстояния $u = 1/r$. Из радиального уравнения движения

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(U + \frac{L}{2mr^2} \right)$$

получаем формулу Бине

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{d}{du} U \left(\frac{1}{u} \right) = 0$$

Из (4.32) видно, что орбита зеркально симметрична относительно апсидального вектора.

Формула Бине очень удобна именно для кеплеровской задачи (кулоновского потенциала). В этом случае уравнение Бине (4.32) превращается в уравнение гармонического осциллятора с периодом оборота по φ , равным в точности 2π . Хорошо известно, что если обратное расстояние осциллирует с ростом угла $1/r \propto 1 + e \cos \varphi$, то орбита замкнута и представляет собой эллипс. Угол поворота между апсидальными точками орбиты в этих переменных в точности совпадает с половиной периода одномерных колебаний:

$$\Phi(E, L) = \frac{L}{m} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{E - U\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{L^2 u^2}{2m}}} = \pi.$$

Теперь рассмотрим устойчивость орбит, начав с круговой. Круговая орбита представляет собой простейший случай замкнутой орбиты. Для любого заданного L орбита будет круговой, если энергия частицы E будет в точности равна экстремуму эффективного потенциала $U_{\text{эфф}}(r)$. То есть радиус круговой орбиты $r = r_0$ определяется из условия $U'(r_0) = L^2/mr_0^3$. Энергия частицы на круговой орбите равна $E = U(r_0) + L^2/2mr_0^2$. Круговая орбита будет устойчива по отношению к малым возмущениям, если экстремум является минимумом, т.е. $U''_{\text{эфф}}(r_0) > 0$. Вместе с первым условием это составляет систему уравнений

$$\begin{aligned} U'(r_0) - \frac{L^2}{mr_0^3} &= 0, \\ U''(r_0) + \frac{3L}{mr_0^4} &> 0, \end{aligned}$$

которую можно кратко записать в виде

$$\frac{d \ln |U'(r)|}{d \ln r} > -3.$$

Если центральный потенциал степенной $U(r) \propto r^n$, то условием устойчивости круговой орбиты будет $n > -2$. Таким образом, если степенной потенциал изменяется вблизи нуля медленнее, чем r^{-2} , то существуют устойчивые круговые орбиты.

То, что финитные траектории небесных тел в первом приближении замкнуты, является надежно установленным из астрономических наблюдений экспериментальным фактом. Из двух подходящих для этого полей (кеплеровского $U(r) \propto r^{-1}$ и гуковского $U(r) \propto r^2$) гуковское поле не подходит, поскольку оно предполагает неограниченный рост силы с расстоянием. А это противоречит эксперименту. Следовательно, существование замкнутых орбит является прямым экспериментальным указанием на кеплеровский характер закона всемирного тяготения. Оно говорит о единственности закона тяготения Ньютона.

Proof of Bertran's theorem

(??? I'll think later about it)

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы Бертрана. Она утверждает, что замкнутые финитные траектории имеют место только в задаче Кеплера $U \propto -r^{-1}$ и задаче Гука $U \propto +r^2$. Переходя к обратному радиусу $u = 1/r$, получаем для уравнения Бине (4.32) закон сохранения

$$\frac{m}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + V_{\text{эфф}}(u) = \frac{m^2 E}{L^2},$$

$$V_{\phi\phi}(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{m^2}{L^2} U\left(\frac{1}{u}\right).$$

В этих обозначениях задача полностью эквивалентна одномерным колебаниям, а роль полупериода играет апсидальный угол

$$\Phi(E, L) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\frac{m^2 E}{L^2} - V_{\text{эфф}}(u)}}.$$

Нетрудно убедиться, что в задаче Кеплера $\Phi = \pi$, а в задаче Гука $\Phi = \pi/2$. Последнее обстоятельство связано с симметричностью эллипса относительно начала координат. В данных двух случаях мы можем сразу сказать, что финитные траектории замкнуты при любых E и L .

Минимум эффективного потенциала в орбитально устойчивой ситуации имеет место при $u = u_*$, определяемого из уравнения

$$u + \frac{m^2}{L^2} W'(u) = 0$$

где $W(u) = U(1/u)$. При этом минимальная энергия равна $E_* = L^2 V_{\text{эфф}}(u_*)/m^2$. Если энергия орбитально устойчивого движения не сильно отличается от минимальной $E - E_* \ll E_*$, то для апсидального угла можно воспользоваться формулой Линдштедта (см. пункт 8, Приложение):

$$\Phi(E, L) = \pi \sqrt{\frac{V''_{\phi\phi}}{m}} \left(1 + \frac{5 (V'''_{\phi\phi})^2 - 3 V''_{\phi\phi} V'''_{\phi\phi}}{24 (V''_{\phi\phi})^3} (E - E_*) + \dots \right),$$

где все производные вычисляются при $u = u_*$. Для того чтобы все эти близкие орбиты, лежащие в узком кольце, были замкнуты, необходимо и достаточно, чтобы апсидальный угол составлял рациональную долю числа π , то есть $(E, L) = m\pi/n$. Здесь m, n - натуральные числа без общих делителей.

Поскольку $\Phi(E, L)$ - непрерывная функция, то отсюда следует, что $\Phi(E, L) = \text{const}$. Тогда на основании формулы Линдштедта запишем:

$$V''_{\phi\phi} = \text{const},$$

$$5 (V'''_{\phi\phi})^2 - 3 V''_{\phi\phi} V'''_{\phi\phi} = 0,$$

для всех $u = u_*$, определяемых уравнением (4.38). Из первого уравнения (4.40) получаем $m^2 W''(u)/L^2 = \text{const}$. Обозначая эту константу через λ , с учетом (4.40), получаем

$$u W'' + \lambda W' = 0$$

или, что то же, $W' = \kappa u^{-\lambda}$. Здесь величина $\kappa = \text{const}$ пока неопределенного знака. Подставляя (4.41) в (4.38) и дифференцируя по u , получаем соотношения

$$\begin{aligned} V''_{\phi\phi} &= 1 - \kappa\lambda u^{-\lambda-1}, \\ V'''_{\phi\phi} &= \kappa\lambda(\lambda+1)u^{-\lambda-2}, \\ V''''_{\phi\phi} &= -\kappa\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)u^{-\lambda-3}. \end{aligned}$$

Уравнение (4.38) приобретает вид $u_* + \kappa u_*^{-\lambda} = 0$, так что в точке минимума $u = u_*$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V''_{\phi\phi} &= \lambda + 1, \\ V'''_{\phi} &= -\frac{\lambda(\lambda+1)}{u_*}, \\ V''''_{\phi} &= \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{u_*^2}. \end{aligned}$$

Подставляя (4.43) во второе равенство (4.40), приходим к характеристическому уравнению

$$5\lambda^2(\lambda+1)^2 - 3\lambda(\lambda+1)^2(\lambda+2) = 0$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ и $\lambda_3 = -1$. Таким образом, нашим требованиям удовлетворяют потенциалы $U_1(r) = \kappa/r$, $U_2(r) = -\kappa r^2/2$ и $U_3(r) = \kappa/2r^2$. Для потенциала $U_3(r)$ финитные траектории вообще невозможны, частица либо падает на центр, либо улетает в бесконечность. А для первых двух потенциалов все требования выполняются при $\kappa < 0$. В заключение отметим, что мы получили эти результаты исходя только из требования постоянства апсидального угла. Хотя выигрыш пал при игре в темную, это не умаляет достоверности доказательства, поскольку ранее мы предварительно установили, что все финитные траектории в потенциалах $U_1(r)$ и $U_2(r)$ замкнуты. А значит, в других потенциалах замкнутых траекторий нет.

Теорема Бертрана говорит не только о выделенности двух потенциалов в трехмерном пространстве. Она дает нам повод задуматься о том, почему наше пространство трехмерно.

3.0.7 Р.5. Осциллятор Дуффинга. Анггармонизм

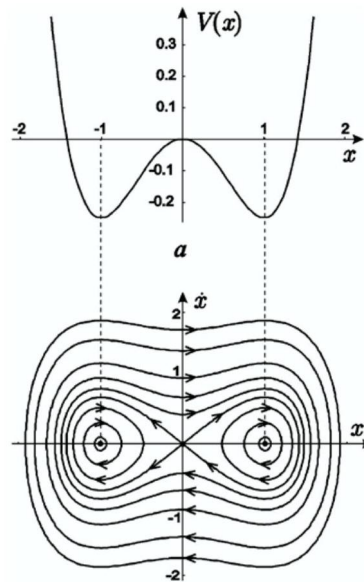
1. Осциллятор Дуффинга

Значительно дальше в аналитическом изучении нелинейных эффектов можно продвинуться, перейдя от нелинейного осциллятора вообще к слабонелинейному осциллятору в частности. В этой лекции мы рассмотрим общие свойства слабонелинейного осциллятора, типичный пример которого доставляет нам математический маятник при малых колебаниях. Слабое отклонение от линейности осциллятора можно рассматривать как следующий за квадратичным член разложения $U(x)$ в ряд Тейлора вблизи дна ямы - точки равновесия осциллятора. В приложениях чаще всего встречается случай, когда потенциал симметричен $U(-x) = U(x)$, а сила, соответственно, антисимметрична $f(-x) = -f(x)$. Сюда относится и упомянутый выше математический маятник, и «нелинейная пружина», и прочее (см. Задачи к этой лекции). Это связано с тем, что в реальных физических системах силы, как правило, симметричны относительно отражения. Поэтому для учета нелинейных эффектов следует учесть следующий за квадратичным член четвертой степени в $U(x)$. Таким

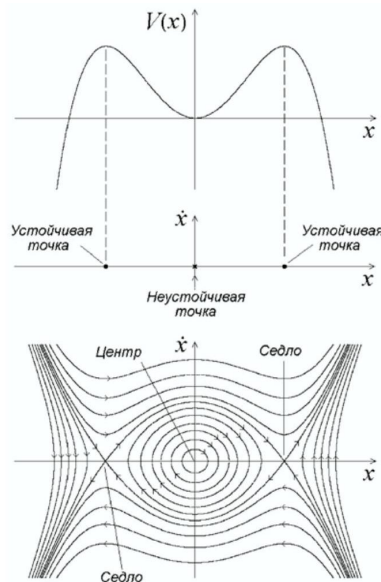
образом, мы приходим к универсальной модели слабонелинейного осциллятора, колебательному уравнению с кубической нелинейностью уравнению Дуффинга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

Такой осциллятор с кубической нелинейностью является универсальной моделью описания консервативных колебаний в том случае, когда амплитуда колебаний в потенциальной яме не столь мала, чтобы можно было ограничиться линейным приближением в разложении возвращающей силы, но и не столь велика, чтобы стали существенны следующие члены ее разложения в ряд Тейлора. В таких случаях принято говорить о слабой нелинейности. Мы сохраняем ее, чтобы найти новые нелинейные эффекты, но держим ее еще достаточно малой, чтобы не сделать расчетные трудности непреодолимыми. Осциллятор с кубической нелинейностью (5.1) называется осциллятором Дуффинга. Он представляет собой универсальный математический образ слабонелинейных колебаний, удобный полигон для тренировочных вычислений. Уравнение Дуффинга возникло как удобная модель любых слабонелинейных колебаний общего характера.



Гносеологические корни уравнения Дуффинга можно усмотреть в том числе и в математическом маятнике $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$. Синус при малых колебаниях немного нелинеен $\sin x = x - x^3/6 + \dots$, что и приводит к уравнению Дуффинга с $\beta = -\omega_0^2/6$. При этом рассматриваются колебания математического маятника с амплитудой, с одной стороны, малой, так что можно использовать разложение в ряд. С другой стороны, достаточно большой, так, что уже нельзя пренебречь нелинейными эффектами. Это значит, что хотя его колебания слабонелинейные, но они таковы, что уже нужно учитывать член $\sim x^3$, содержащийся в разложении в ряд $\sin x$. Этот учет и приводит к анггармонизму осциллятора Дуффинга. Провести точный расчет анггармонизма в общем случае затруднительно, однако можно получить приближенное решение уравнения Дуффинга. Оно дает достаточно ясное представление о характере колебаний.



Итак, наша дальнейшая программа заключается в том, чтобы оценить неизохронность и анггармонизм осциллятором Дуффинга путем приближенного решения уравнения Дуффинга (5.1).

2. Период колебаний осциллятора Дуффинга

Уравнение Дуффинга может быть приведено к безразмерному виду. Это радикально упрощает исследование (5.1) и последующий анализ полученных решений. Пусть для определенности начальные условия к (5.1) есть $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Используя преобразования растяжения, перейдем к новым координате $\sqrt{\beta}x/\omega_0 \rightarrow x$ и времени $\omega_0 t \rightarrow t$ в случае положительного коэффициента $\beta > 0$. Тогда уравнение (5.1) в новых переменных примет вид

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0$$

с начальными условиями $x(0) = \sqrt{\beta}x_0/\omega_0, \dot{x}(0) = 0$. В новой постановке задача содержит всего лишь один безразмерный параметр $\sqrt{\beta}x_0/\omega_0$, представляющий комбинацию, составленную из параметров исходной задачи. Теперь достаточно исследовать поведение решения (5.2) в зависимости от этого единственного параметра, входящего только в начальные условия. Параметр $\sqrt{\beta}x_0/\omega_0$, следовательно, является для нашей задачи критерием подобия.

Рассмотренный нами случай $\beta > 0$ в механической интерпретации отвечает осциллятору с «жесткой» пружиной. Обезразмеривание уравнения Дуффинга для случая «мягкой» пружины $\beta < 0$ проводится аналогично и дает

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0$$

с тем же начальным условием $x(0) = \sqrt{-\beta}x_0/\omega_0, \dot{x}(0) = 0$. Это позволяет далее анализировать решения (5.2), (5.3) одновременно.

Безразмерная потенциальная энергия осциллятора Дуффинга есть

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^4}{4}$$

где знак плюс или минус выбирается в зависимости от «жесткости» (5.2) или «мягкости» (5.3) пружины. В обоих случаях на фазовой плоскости уравнения Дуффинга точка $x = 0$ соответствует особой точке типа центр. На фазовом портрете центр охватывают замкнутые траектории, соответствующие периодическим колебаниям.

Наше начальное условие $x(0) = \tilde{x}_0$ соответствует энергии осциллятора $e = \tilde{x}_0^2/2 \pm \tilde{x}_0^4/4$. Тогда из закона сохранения энергии для верхней ветви фазовой траектории $\dot{x} = +\sqrt{2(e - U(x))}$ получаем

$$\dot{x} = \sqrt{(\tilde{x}_0^2 - x^2) \left(1 \pm \frac{\tilde{x}_0^2 + x^2}{2}\right)}.$$

Осуществляя для верхнего знака под корнем (5.5) замену $x = \tilde{x}_0 \cos \varphi$, а для нижнего $x = \tilde{x}_0 \sin \varphi$, получаем

$$dt = \frac{1}{\sqrt{k_{\pm}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m_{\pm}^2 \sin^2 \varphi}}$$

где $m_{+}^2 = \tilde{x}_0^2/2 (1 + \tilde{x}_0^2)$, $k_{+} = 1 + \tilde{x}_0^2$ для верхнего знака и $m_{-}^2 = \tilde{x}_0^2/(2 - \tilde{x}_0^2)$, $k_{-} = 1 - \tilde{x}_0^2/2$ для нижнего. Это дает нам выражения для периода колебаний осциллятора Дуффинга:

$$T = \frac{4}{\sqrt{K_{\pm}}} K(m_{\pm})$$

где $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода (см. Приложение к Лекции 2, Колебания).

Используя асимптотику при малых значениях модуля $m \ll 1$ эллиптического интеграла $K(m) = \pi/2 + \pi m^2/8 + \dots$, для поправок к периоду на слабую неизохронность получаем выражение

$$T = 2\pi \left(1 \mp \frac{3}{8} \tilde{x}_0^2 + \dots\right)$$

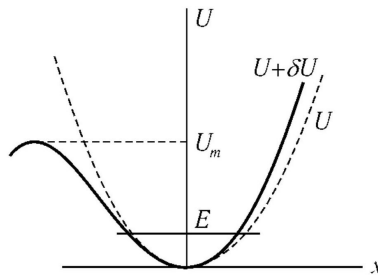
Например, для математического маятника, которому соответствует уравнение Дуффинга (5.1) с $\beta = -1/6$, $\omega_0 = 1$ это дает относительное увеличение периода на $\delta T/T = x_0^2/16$, в полном соответствии с полученным ранее результатом (см. Лекцию 2, Колебания).

3. Вариация периода колебаний δT при возмущении потенциала $\delta U(x)$

Консервативный осциллятор с потенциальной энергией $U(x)$ и энергией E совершает колебания с периодом $T(E)$. Определим изменение периода его колебаний δT при той же энергии E , вызванное малым возмущением потенциальной энергии $\delta U(x)$. Изменение периода равно

$$\frac{\delta T}{\sqrt{2m}} = \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \right) = \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

где точки поворота определяются соотношением $U(x_{1,2}) = E$. Поскольку варьирование происходит при фиксированном E , сдвиг точек поворота определяется условием $\delta x_{1,2} = -\delta U(x_{1,2})/U'(x_{1,2})$.



Раскладывая подынтегральное выражение (5.9) в ряд по δU нельзя, так как получающиеся при этом интегралы и добавочные слагаемые расходятся в точках поворота. Однако остроумные люди придумали, как обойти эту трудность. Разложение (5.9) до линейного члена по $\delta U(x)$ можно провести, если представить δT в виде

$$\frac{\delta T}{\sqrt{2m}} = 2 \frac{\partial}{\partial E} \left(\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U(x) - \delta U} - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx \right).$$

Отсюда с учетом того, что подынтегральная функция в точках поворота зануляется, получаем

$$\frac{\delta T}{\sqrt{2m}} = - \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Время движения вблизи точек поворота дает небольшой вклад в период колебаний (см. Задачу 1), поэтому (5.11) дает хорошее приближение вариации периода.

Заметим, что $dx \sqrt{m/2(E - U(x))}$ представляет собой дифференциал времени dt . Это позволяет придать формуле (5.11) вид среднего по периоду

$$\delta T = - \frac{\partial}{\partial E} (T \langle \delta U \rangle)$$

где $\langle \delta U \rangle = T^{-1} \int_0^T \delta U(x(t)) dt$. Описанная процедура позволяет вычислить и следующие поправки по возмущению потенциала. Действуя аналогично (5.10), получаем

$$\delta T = \sqrt{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{[\delta U(x)]^n dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

4. Неизохронность осциллятора Дуффинга

Теперь у нас все готово, чтобы найти частоту колебаний осциллятора Дуффинга по теории возмущений. В качестве невозмущенного рассмотрим движение в гармоническом потенциале $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2$, а возмущение потенциала выберем в виде $\delta U(x) = m\beta x^4/4$. Тогда, с одной стороны, полный возмущенный потенциал $U(x) + \delta U(x)$ дает уравнение Дуффинга (5.1). С другой стороны, формула (5.11) позволяет получить вариацию периода δT такого движения. Невозмущенное движение имеет вид $x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Фазу φ можно без ограничения общности положить равной нулю $\varphi = 0$. Это просто соответствует сдвигу отсчета времени. Тогда из (5.12) получаем

$$\frac{\delta T}{T_0} = - \frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{m\beta}{4} \left(\frac{2E}{m\omega_0^2} \right)^2 \sin^4 \omega_0 t dt.$$

С учетом того, что $\sin^4 x = (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)/8$, безразмерный интеграл равен $\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx = 6\pi/8$. Кроме того, $2E/m\omega_0^2 = a^2$ и, следовательно,

$$- \frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta \omega}{\omega_0} = \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0^2}.$$

Это значит, что слабая нелинейность колебаний $\beta a^2 \ll \omega_0^2$ приводит к небольшому сдвигу частоты $\delta \omega \ll \omega_0$. Если в (5.15) положить $\beta/\omega_0^2 = -1/6$ и $a = \varphi_m$, то мы

воспроизведем результат увеличения периода математического маятника $\delta T/T_0 = +\varphi_m^2/16$, полученный ранее (см. Лекцию 2, Колебания). Итак, из (5.15) следует, что

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0^2} + \dots \right)$$

Формула (5.16) описывает неизохронность осциллятора Дуффинга, то есть сдвиг его частоты вследствие нелинейности.

5. Анггармонизм осциллятора Дуффинга

Помимо неизохронности, важным свойством осциллятора Дуффинга является генерация высших гармоник. Этот анггармонизм требует отдельного рассмотрения. Проведем его следующим образом. Предпримем попытку прямого решения нелинейного уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

в предположении, что оно слабо нелинейно, т.е. параметр β мал. Выше мы выяснили, что из-за малости амплитуды колебаний в этом предположении нет необходимости. Фактически, малым параметром разложения является не β , а амплитуда колебаний a . Если $\beta a^2 \ll \omega_0^2$, то нелинейность в (5.17) можно считать малой. Для простоты дальнейших выкладок положим $\omega_0 = 1$. Для того чтобы снова вернуться к размерным единицам, нужно сделать замену $t \rightarrow \omega_0 t$ и $\beta \rightarrow \beta/\omega_0^2$.

Будем искать решение (5.17) в виде ряда, представляющего собой прямое разложение по малому параметру

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t) + \dots$$

Этот важный момент связан с предположением об аналитичности функции $x(t, \beta)$ по переменной β и требует отдельного комментария (см. пункт 6, Приложение). Подставляя (5.18) в (5.17)

$$(\ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2) + \beta (x_0^3 + 3x_0^2 \beta x_1 + \dots) = 0, \quad (5.19)$$

раскладываем слагаемые на кучки по степеням β , то есть группируем в коэффициенты при каждой степени β . Тождество (5.19) можно обеспечить только если все эти кучки по отдельности равны нулю. Действительно, поскольку уравнение (5.19) должно удовлетворяться при любых значениях β , коэффициенты при каждой степени должны обращаться в нуль независимо. Приравнявая в (5.19) каждую сумму членов с одинаковыми степенями β к нулю, получаем рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -x_0^3, \end{aligned}$$

Для простоты дальнейших выкладок ищем решение при $x(0) = 0$ и произвольном $\dot{x}(0)$. Тогда решение первого из уравнений (5.20) дает нулевое приближение $x_0 = a \sin(t + \varphi)$, в котором мы положим $\varphi = 0$. Этого всегда можно добиться подходящим выбором начала отсчета времени. Таким образом, в нулевом приближении мы имеем решение (5.17) в виде $x_0 = a \sin t$. Подставляя его во второе уравнение (5.20), получаем уравнение для первого приближения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{3}{4}a^3 \sin t + \frac{1}{4}a^3 \sin 3t$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\sin^3 x = 3 \sin x/4 - \sin 3x/4$. Уравнение (5.21) содержит в правой части резонансное слагаемое, поэтому в его решение входит секулярный член. Воспользовавшись полученным в прошлой лекции выражением (4.39), имеем:

$$x_1(t) = \frac{3}{8}ta^3 \cos t - \frac{a^3}{32} \sin 3t$$

Здесь для простоты мы подобрали начальные условия для первого приближения так, чтобы секулярный член не сопровождал гармоника основного тона. В итоге получаем решение (5.17) с точностью до членов второго порядка малости по β :

$$x(t) = a \sin t + \beta \left[\frac{3}{8}a^3 t \cos t - \frac{a^3}{32} \sin 3t \right] + \dots$$

Наличие в (5.23) секулярного члена $\sim t \cos t$ приводит к серьезной трудности. Секулярный член при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, тогда как из предыдущего рассмотрения мы знаем, что решение (5.17) носит колебательный характер и ограничено при любом t . Таким образом, полученное решение (5.23) не является равномерно пригодным. Значит, примененная в лоб «наивная» теория возмущений (5.18) в данном случае дает неприемлемый ответ.

О чем это говорит? Страшно ли это, как к этому относиться? Отсутствие равномерной пригодности говорит только о неудобстве прямого разложения (5.18) в этом случае. На самом деле, ряд вида (5.23) представляет собой ограниченную функцию t , просто это нелегко сразу увидеть. Простой иллюстрирующий пример доставляет нам ряд

$$\sin t + \beta t \cos t - \frac{\beta^2 t^2}{2} \sin t - \frac{\beta^3 t^3}{6} \cos t + \frac{\beta^4 t^4}{24} \sin t + \dots$$

в котором далеко не сразу можно узнать ограниченную периодическую функцию $\sin(1 + \beta)t$. В качестве второго примера можно привести ряд

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \dots$$

в котором также трудно сразу угадать такую простую функцию, как $\exp(-x/2)$. Итак, мы не можем пользоваться конечным фрагментом ряда (5.18) и не можем угадать ограниченную функцию в бесконечном ряде (5.18). Значит, нам нужно так видоизменить теорию возмущений, чтобы она стала удобной для вычислений. Для этого изменим разложение (5.18).

Новый метод называется методом перенормировки частоты или методом Линдштедта-Пуанкаре. Видоизменим рассмотренный выше метод прямого разложения (5.18). Трудности, связанные с наличием секулярных членов, можно устранить, если учесть открытую нами ранее неизохронность осциллятора Дуффинга - зависимость его частоты ω от амплитуды колебаний a . Для этого и саму частоту решения ω следует искать в виде разложения

$$\omega = 1 + \beta\omega_1 + \beta^2\omega_2 + \dots$$

что позволит исключать секулярные члены в каждом порядке по β . Это можно сделать, представив (5.17) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\beta x^3 + (\omega^2 - 1)x,$$

где частота ω пока не определена. Подставляя разложение (5.18) и возведенное в квадрат равенство (5.26) $\omega^2 = 1 + 2\beta\omega_1 + \dots$ в (5.27), получаем в каждом порядке по β следующие рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -x_0^3 + 2\omega_1 x_0,\end{aligned}$$

Из первого уравнения (5.28), как и прежде, получаем $x_0 = a \sin \omega t$. Подставляя это во второе уравнение (5.28) и снова учитывая, что $\sin^3 x = 3 \sin x/4 - \sin 3x/4$, получаем

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4}a^3 \sin \omega t + \frac{1}{4}a^3 \sin 3\omega t + 2\omega_1 a \sin \omega t.$$

Секулярный член порождается первой гармоникой $\sim \sin \omega t$ в правой части (5.29). В нашем новом подходе выбор поправки ω_1 должен определяться необходимостью устранения секулярных решений. Избавиться от секулярных решений в (5.29) можно, наложив условие $-3a^3/4 + 2\omega_1 a = 0$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка, для сдвига частоты снова получаем формулу

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\beta a^2 + \dots$$

совпадающую с поправкой на неизохронность колебаний (5.16). Оставшийся в правой части (5.29) нерезонансный член дает в решение вклад в виде третьей гармоники:

$$x(t) = a \sin \omega t - \frac{\beta a^3}{32} \sin 3\omega t + \dots$$

Таким образом, нелинейность вызывает анггармонизм, т.е. появление высших гармоник. Важно подчеркнуть, что именно нелинейность в уравнении (5.17) приводит к возникновению зависимости частоты первой гармоники от ее амплитуды и к появлению нечетных гармоник. Так, если бы в (5.17) была квадратичная нелинейность, то решение содержало бы четные гармоники. Следуя описанной процедуре, ряд (5.31) легко продолжить дальше (см. Задачу 2).

Важным обстоятельством также является то, что ряд (5.31) фактически оказался рядом не по β , а по a . Действительно, амплитуда мала $\beta a^2 \ll 1$, и это позволяет считать коэффициент β не обязательно малым ($\beta \approx 1$). Подтвердим это конкретным примером. Для малых колебаний математического маятника эквивалентным уравнением Дуффинга является уравнение с $\beta = -1/6$. Из формулы (5.30) получаем то же соотношение $\omega = 1 - a^2/16 + \dots$, что и ранее (см. Лекцию 2, Колебания). Оно верно при конечной величине β в силу того, что амплитуда мала $\beta a^2 \ll 1$.

6. Приложение. Асимптотические решения

Аналитическая теория дифференциальных уравнений дают нам все, что нужно для асимптотического исследования нелинейных колебаний методом разложения в ряд (5.18). Она гарантирует асимптотическую сходимость таких рядов, если функции, входящие в дифференциальное уравнение колебаний аналитичны.

Асимптотические методы позволяют отыскивать приближенные решения дифференциальных уравнений, близких к таким уравнениям, решения которых известны. В таких случаях асимптотические методы часто позволяют найти решение с нужной точностью. Разложение решения по степеням малого параметра - один из наиболее употребительных асимптотических методов. Теория возмущений в обыкновенных дифференциальных уравнениях посвящена исследованию возможностей

разложения в ряды их решений $x(t, \beta)$ по степеням малого параметра β , то есть является асимптотической теорией возмущений.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений рассматривает их с точки зрения теории аналитических функций. В ТФКП рассматривают обыкновенные дифференциальные уравнения вида $dx/dt = f(t, \beta)$, в котором $f(t, \beta)$ - аналитическая функция. Это уравнение с комплексным временем t , т. е. независимая переменная изменяется на комплексной плоскости. Решением уравнения в комплексной области называется локально однозначная аналитическая функция $x(t, \beta)$, обращающая уравнение в тождество. Однозначную разрешимость задачи Коши гарантирует теорема существования и единственности Коши - решение существует в некоторой окрестности начального времени. Аналитическое продолжение решения уравнения также является его решением.

В соответствии с теоремой Пуанкаре о разложении, решение $x(t, \beta)$ аналитично по β , если функция $f(t, \beta)$ аналитически зависит от своих аргументов. Тогда его можно представить в виде ряда $x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t) + \dots$, а частичные суммы этого ряда аппроксимируют решение $x(t, \beta)$ сколь угодно точно. В общем случае ряд вовсе не обязательно оказывается сходящимся. Основная задача нашей теории возмущений - построение асимптотики решения обыкновенного дифференциального уравнения с параметром. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют члены $x_0(t), x_1(t), x_2(t) \dots$ асимптотик, оказываются, как правило, существенно проще исходных уравнений. Асимптотические разложения позволяют эффективно исследовать поведение решений при малых β несмотря на то, что асимптотические ряды часто оказываются не сходящимися. Асимптотические методы исследования решений дифференциальных уравнений успешно дополняются численными методами.

3.0.8 P.6. Duffing Oscillator. Anharmonicity

1. Параметрические колебания. Уравнение Хилла

Выше мы рассмотрели два способа возбуждения колебательной системы. Осциллятор можно либо ударить, т.е. передать ему энергию за счет начальных условий. Либо раскачать его за счет действия внешней силы, что наиболее эффективно в условиях резонанса. Теперь рассмотрим еще один способ возбуждения осциллятора, когда за счет внешних источников энергии изменяются его параметры. Можно привести много примеров таких параметрических колебаний в механических, электрических, лазерных и других системах. При этом может возникать параметрический резонанс, классическим примером которого является девочка на качелях. Приседая и выпрямляясь в такт колебаниям с нужной частотой, она может сильно раскачать качели.

Все подобные колебания описываются с единых позиций на основе уравнения Хилла:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

При этом такие параметрические системы естественным образом разделяются на три группы, характеризующиеся различным поведением.

1). Адиабатические. В этом случае собственная частота изменяется медленно, за времена, значительно превышающие собственный период колебаний осциллятора. Это означает, что характерное время изменения параметров $\sim \omega/\dot{\omega}$ значительно больше периода собственных колебаний осциллятора $\sim \omega^{-1}$. Отсюда получаем критерий медленности изменения собственной частоты $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Анализ решений $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ удобно проводить ВКБ-методом, а сохраняющимися при движении величинами

являются адиабатические инварианты $\oint p dx$. В случае гармонического осциллятора приближенно сохраняющейся величиной является $E(t)/\omega(t)$.

2). Резонансные. Это системы, для которых характерное время изменения параметров того же порядка, что и период собственных колебаний системы $\dot{\omega} \sim \omega^2$. В таких параметрических осцилляторах возможно возникновение параметрического резонанса.

3). Системы в быстро осциллирующем поле. Это системы, на которые действуют быстро переменные силы с $\dot{\omega} \gg \omega^2$. Классическим примером здесь является маятник Капицы. Быстро переменное воздействие может приводить к тому, что старые, стационарные положения равновесия осциллятора теряют устойчивость и возникают новые, устойчивые положения равновесия.



Мы начнем рассмотрение параметрических осцилляторов с первого случая - осциллятора Хилла с медленно меняющимися параметрами. Поскольку мы хотим «дергать» за все возможные параметры, то в общем случае параметрические колебания описываются уравнением

$$\frac{d}{dt}m(t)\frac{dx}{dt} + 2\gamma(t)\frac{dx}{dt} + k(t)x = 0$$

Но разве можно менять массу? Нет, это затруднительно (см. пункт 8), но вот момент инерции можно менять легко. Именно это и делает девочка на качелях. Замена $dt/m(t) \rightarrow dt$ приводит уравнение к виду

$$\frac{d}{(dt/m)}\frac{dx}{(dt/m)} + 2\gamma(t)\frac{dx}{(dt/m)} + m(t)k(t)x = 0$$

Такой заменой мы изменили размерность времени. Чтобы вернуть времени привычную размерность можно поделить (6.3) на подходящую постоянную величину размерности квадрата массы. Получаем уравнение с изменяющимся трением и частотой.

$$\ddot{x} + 2\gamma(t)\dot{x} + \omega_0^2(t)x = 0,$$

в котором точки означают дифференцирование по новому времени. Избавиться от трения помогает замена

$$x(t) = y(t) \exp \left(- \int_0^t \gamma(t') dt' \right),$$

так что окончательно получаем

$$\ddot{y} + [\omega_0^2(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t)] y(t) = 0$$

уравнение Хилла:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

в котором мы переобозначили $\omega^2 - \gamma^2 - \dot{\gamma} \rightarrow \omega^2$ и $y \rightarrow x$. Уравнением Хилла описывается большое число систем разной природы. Это и движение частицы в изменяющемся магнитном поле, и маятник с изменяющейся длиной подвеса, и осцилляторы с изменяющимися параметрами, и сакраментальная девочка на качелях и т.д.

2. Адиабатический инвариант осциллятора

Пусть параметры осциллятора в уравнении Хилла $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ меняются настолько медленно, что в течение нескольких периодов колебаний можно считать, что они практически неизменны. Это означает, что характерное время изменения параметров $\sim \omega/\dot{\omega}$ значительно больше периода собственных колебаний осциллятора $\sim \omega^{-1}$, то есть $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Видно, что это соотношение заведомо нарушается вблизи нулей функции $\omega(t)$, поэтому мы будем полагать, что в рассматриваемых нами колебательных системах таких точек нет.

Оказывается, что в этом случае существуют величины, которые изменяются медленнее, чем параметры системы. Другими словами, скорость их изменения есть величина более высокого порядка малости, чем скорость изменения самих параметров. Такие динамические переменные, которые остаются практически постоянными при медленном изменении параметров системы, называются адиабатическими инвариантами. Для получения такого инварианта рассмотрим в качестве примера параметрический осциллятор, описываемый уравнением Хилла (6.7).

Считая, что скорость изменения собственной частоты мала, $\dot{\omega} \ll \omega^2$, вычислим усредненную по периоду колебаний среднюю энергию этого осциллятора. Для этого введем текущую энергию осциллятора

$$E(t) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2(t)x^2}{2}$$

и вычислим ее производную по времени

$$\frac{dE}{dt} = (\ddot{x} + \omega^2 x) \dot{x} + \omega \dot{\omega} x^2$$

Здесь последнее слагаемое играет роль добавки к мощности работы внешней силы, которое не возникает в непараметрических системах. Первое слагаемое в (6.9) обращается в ноль в силу уравнения движения (6.7). Уравнение (6.9) следует усреднить по квазигармоническим колебаниям с медленно изменяющейся амплитудой $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$. При таком усреднении на фоне быстрых колебаний $x(t)$ величины $\dot{\omega}$ и ω можно считать постоянными. При быстро осциллирующих колебаниях для средней энергии из (6.8) получаем $\langle E \rangle(t) = \omega^2(t) \langle x^2 \rangle$, после чего усредненное уравнение (6.9) приобретает вид

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \langle E \rangle$$

Этот же результат легко получить и по теореме вириала (см. Лекцию 2, Колебания). Поскольку потенциальная энергия является однородной функции степени $n = 2$, то

$$\frac{\omega^2 \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{\langle E \rangle}{2}.$$

Интегрируя (6.10) и опуская угловые скобки для обозначения среднего, получаем адиабатический инвариант

$$\frac{E(t)}{\omega(t)} = \text{const}$$

Мы пришли к важному соотношению. Если частота изменяется медленно, то энергия осциллятора меняется со временем пропорционально изменению его частоты.

Адиабатический инвариант имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Это площадь $S = \oint p dx$, ограниченная замкнутой траекторией на фазовой плоскости, где интегрирование ведется вдоль траектории по одному ее витку. В такой форме выражение для адиабатического инварианта справедливо не только для осциллятора, но и для любой динамической системы с одной степенью свободы, совершающей колебания (см. следующий параграф).

Adiabatic ideas in quantum mechanics

(???? understand it better!!)

При создании квантовой механики именно адиабатические инварианты были приглашены на роль квантующихся величин. Рассмотрим эту квантово-механическую аналогию на примере осциллятора. Энергия одного кванта возбуждения равна $\hbar\omega$, поэтому величина $E/\hbar\omega$ есть число квантов. При медленном изменении параметров число квантов не изменяется. На их рождение или уничтожение просто не хватает интенсивности возмущения. Полная энергия может измениться только за счет рождения целого кванта, а при медленном возмущении системы этого не происходит. Именно поэтому адиабатический инвариант равен целому числу квантов.

3. Адиабатический инвариант гамильтоновой системы

Итак, адиабатический инвариант - это физическая величина, которая не меняется при плавном, «адиабатическом», изменении некоторых параметров системы. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения гораздо больше характерного времени процессов, происходящих в самой системе.

В гамильтоновой системе с одной степенью свободы, которая осуществляет периодическое движение с периодом T , адиабатичность изменения ее параметра $\lambda(t)$ определяется условием $T d\lambda/dt \ll \lambda$. Функция Гамильтона $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, p, \lambda)$ системы зависит от ее динамических переменных x и p и параметра $\lambda(t)$. Координата x и импульс p меняются со временем быстро, с периодом T . Энергия же системы $E = \mathcal{H}(x, p, \lambda)$ является интегралом движения при неизменном параметре λ . При изменении параметра $\lambda(t)$ во времени имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

Из (6.13) видно, что если бы параметр λ не зависел от времени ($\dot{\lambda} = 0$), то энергия системы сохранялась бы ($\dot{E} = 0$), а движение было бы строго периодическим с периодом $T(E)$. При усреднении (6.13) по времени в течение периода T можно считать, что параметр λ почти неизменен. Ввиду медленности изменения λ , производную $\dot{\lambda}$ можно вынести из-под знака усреднения

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{d\lambda}{dt} \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right\rangle,$$

где усреднение по периоду определяется как

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} dt$$

Удобно перейти от интегрирования по времени к интегрированию по координате x с учетом уравнения Гамильтона $dt = dx/(\partial \mathcal{H}/\partial p)$. Тогда период T равен

$$T = \oint \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^{-1} dx$$

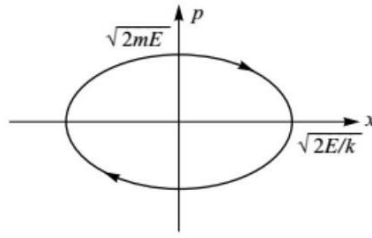
где интегрирование проводится вперед и назад в пределах изменения координаты за период движения. Записывая импульс $p = p(x, E, \lambda)$ как функцию энергии E , координаты x и параметра λ , из (6.14), (6.15), (6.16) получаем

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dx = 0.$$

Окончательно (6.17) можно записать в виде $\langle dS/dt \rangle = 0$, где величина

$$S = \oint p dx$$

и будет адиабатическим инвариантом.



Интеграл (6.18) приобретает простой геометрический смысл, если обратиться к представлению о фазовом пространстве и фазовой траектории системы в нем. В рассматриваемом случае система имеет одну степень свободы, поэтому фазовое пространство представляет собой фазовую плоскость, образуемую множеством точек с координатами p и x . Поскольку система совершает периодическое движение, то ее фазовая траектория является замкнутой кривой на этой плоскости. Соответственно интеграл (6.18) берется вдоль этой замкнутой кривой. Отсюда следует, что интеграл $\oint p dx$ равен площади фигуры, ограниченной фазовой траекторией системы. Площадь можно выразить также и в виде двумерного интеграла, тогда для адиабатического инварианта можно записать: $S = \oint dx dp$

4. Примеры адиабатических инвариантов

Oscillator

В качестве примера снова рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с частотой ω , функция Гамильтона которого имеет вид

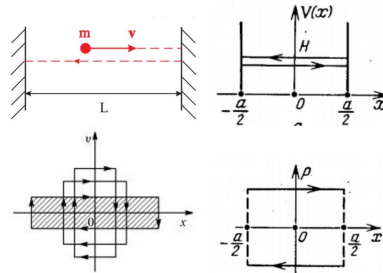
$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Уравнение фазовой траектории определяется законом сохранения энергии $H(x, p) = E$ и имеет вид $p^2/2m + m\omega^2 x^2/2 = E$. Траектория представляет собой эллипс с

полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Соответственно, его площадь равна $2\pi E/\omega$. Таким образом, величина E/ω является адиабатическим инвариантом гармонического осциллятора: когда параметры осциллятора изменяются медленно, его энергия изменяется пропорционально частоте. Это совпадает с выводом, к которому мы пришли в предыдущем параграфе.

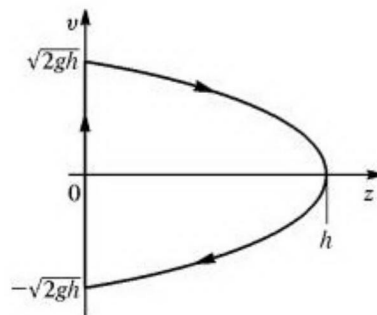
4.1. Частица между сближающимися стенками.

Частица движется перпендикулярно двум параллельным стенкам, упруго отражаясь от них. Стенки медленно сближаются. Адиабатическим инвариантом является произведение скорости частицы на расстояние между стенками $v(t)a(t) = \text{const}$. Критерием медленности сближения стенок является условие $\dot{a} \ll v$.



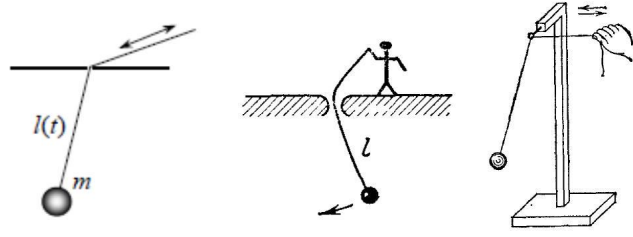
4.2. Подпрыгивающий шарик.

Шарик подпрыгивает, упруго отскакивая от пола поднимающегося лифта. Лифт поднимается со слабо варьирующимся около нуля ускорением так, что эффективное ускорение свободного падения шарика $g(t)$ есть медленно меняющаяся функция времени. Адиабатическим инвариантом здесь является величина $h^3(t)g(t) = \text{const}$, где $h(t)$ - высота подскока шарика. Критерием медленности изменения ускорения свободного падения является условие $\dot{g}h^{1/2} \ll g^{3/2}$.



4.3. Маятник с изменяющейся длиной.

Длина нитки $l(t)$, на которой подвешен математический маятник, медленно изменяется со временем. Энергия маятника равна $mgl(t)\varphi_m^2/2$, а его частота равна $\sqrt{g/l(t)}$. Тогда адиабатическим инвариантом является величина $\varphi_m(t)l^{3/4}(t) = \text{const}$, где $\varphi_m(t)$ - максимальный угол отклонения маятника. Критерием медленности изменения длины нитки является условие $\dot{l} \ll \sqrt{lg}$.

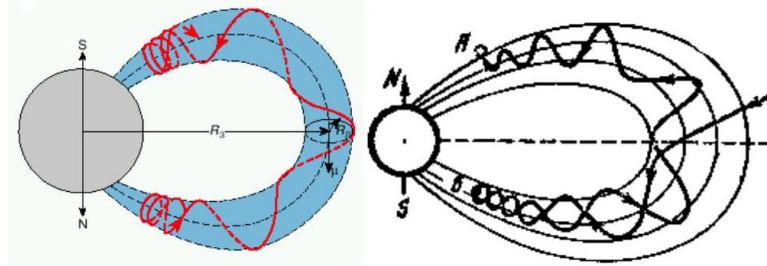


4.4. Магнитное зеркало.

При медленном изменении положения центра ларморовского круга, по которой движется заряженная частица в слабо неоднородном магнитном, поле остается постоянным следующий адиабатический инвариант. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, периодически, то одним из адиабатических инвариантов является интеграл

$$\oint \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{r} = \text{const}$$

взятый по периоду движения, т.е. по ларморовскому кружку.



В первом слагаемом $\mathbf{p}$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$, ко второму следует применить теорему Стокса. С учетом $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ это дает

$$2\pi r p - \frac{e}{c} B \pi r^2 = \text{const}$$

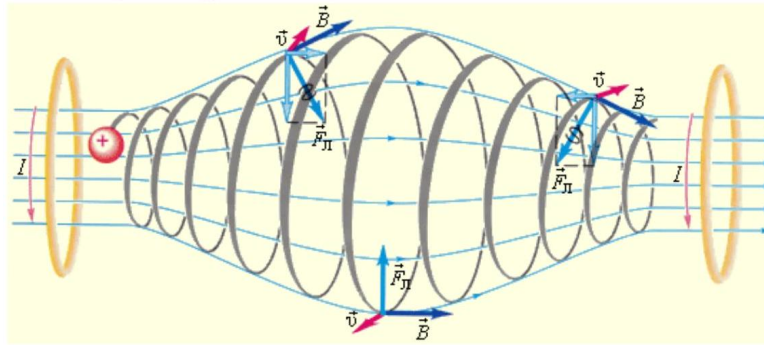
где $r = v_{\perp}/\omega$ - радиус орбиты. Знак минус возник потому, что векторы магнитного поля и площади ларморовского кружка направлены в противоположные стороны. Он связан с диамагнитностью отклика заряженной частицы на поле. Из (6.21) получаем сохраняющуюся величину

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const}$$

Критерием медленности изменения магнитного поля в пространстве является условие $mc v_{\perp} |\nabla B| \ll e B^{3/2}$.

Значит, когда частица движется по винтовой линии в постоянном, но слабо неоднородном магнитном поле (поле мало меняется на расстояниях, сравнимых с радиусом и шагом винтовой орбиты), она выталкивается из области сильного поля. Возникает эффект магнитного зеркала, или иначе, пробки в магнитной бутылке. При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально $1/\sqrt{B}$, а ее шаг - пропорционально $v_{\parallel}$. С другой стороны, сила Лоренца не совершает работу, поэтому полная кинетическая энергия частицы сохраняется $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = \text{const}$. При достижении траекторией границы, на которой $v_{\parallel}$ обращается нуль, частица отражается от нее. Продолжая вращаться в прежнем направлении, она начинает двигаться обратно, в сторону уменьшения поля.

Этот же результат можно получить и из простых качественных соображений. Частица быстро вращается вокруг силовой линии с циклотронной частотой $\omega = eB/mc$ и медленно движется в область сгущения силовых линий. Вращающаяся частица представляет собой круговой ток $i = e\omega/2\pi$ с магнитным моментом $\mu = is/c$. Здесь $s = \pi r^2$ - площадь, а $r = v_\perp/\omega$ - радиус ларморовского кружка, то есть $\mu = mv_\perp^2/2B$. Следовательно, на вращающуюся частицу действует сила $\mathbf{F} = (\mu\nabla)\mathbf{B}$, выталкивающая её из области сильного поля. Выталкивающая сила тормозит продольное движение частицы вдоль силовой линии (ось z) так, что $Fdz = \mu dB = d(mv_\parallel^2/2)$. Поскольку сила Лоренца не совершает работу, полная кинетическая энергия частицы сохраняется $v_\parallel^2 + v_\perp^2 = \text{const}$. Отсюда получаем $dB/B = -d(v_\perp^2)/v_\perp^2$, что и означает сохранение адиабатического инварианта $v_\perp^2/B = \text{const}$.



(??? write in field theory about it more!!!)

4.5. Стохастическое ускорение Ферми.

Красивым и сравнительно простым проявлением существования адиабатического инварианта является стохастический механизм ускорения (стохастического нагрева) частиц. Он был предложен Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах. Идея Ферми заключалась в том, что при столкновении заряженных частиц с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве частица должна в среднем ускоряться. Рассматривая облако как гигантскую частицу большой массы, причину ускорения можно понять следующим образом. При единичных актах столкновения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется ли облако навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, то столкновений будет больше с теми телами, скорость которых направлена навстречу частице, так как частица встречает их чаще. Отсюда следует, что частица будет чаще приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение частиц, называемое ускорением Ферми.

В свете сказанного выше, ускорение происходит при столкновении и отражении заряженной частицы от магнитного зеркала. Имеется два вида ускорения Ферми - первого и второго рода. Оба работают в бесстолкновительной среде, иначе столкновения с плазмой межзвездной среды приведут к потерям, которые нивелируют процесс ускорения.

Ускорение Ферми первого рода происходит в ударных волнах, распространяющихся в межзвездной среде. Перед фронтом ударной волны и позади нее, как правило, есть магнитные неоднородности, которые способны отражать заряженные частицы. Многократное отражение между двумя неоднородностями приводит к значительному ускорению частиц. Результирующий энергетический спектр частиц имеет степенную

форму с показателем степени минус два. Ускорение пропорционально скорости ударной волны. Ускоряться будут только те частицы, энергия которых на порядок больше тепловой энергии в межзвездной плазме: мало энергичные частицы не смогут пересечь ударный фронт. Следовательно, ускорения с нуля не происходит; исходные частицы должны быть инжектированы в район ударного фронта с некоторой начальной скоростью.

Ускорение Ферми второго рода описывает ускорение частиц при столкновении с регулярно или хаотически движущимися «магнитными зеркалами». Частица приобретает энергию при отражении от движущегося навстречу магнитного зеркала или теряет энергию при столкновении с убегающим зеркалом. Вероятность столкновения со встречным зеркалом выше, чем с убегающим, поэтому в целом частицы будут ускоряться. Приращение энергии пропорционально квадрату средней скорости магнитных зеркал. Альтернативное название ускорения Ферми второго рода - стохастическое ускорение.

5. Связь адиабатического инварианта и периода колебаний

В общем случае адиабатически сохраняющуюся величину $S = \oint p dx$ можно записать как площадь, ограниченную замкнутой фазовой кривой осциллятора $S = \iint dp dx$. Важным свойством адиабатического инварианта $S(E)$ является то, что его производная по энергии $\partial S(E)/\partial E$ равна периоду колебаний

$$\frac{\partial S}{\partial E} = T$$

или $\partial E/\partial S = \omega/2\pi$. С помощью канонических преобразований можно сделать адиабатический инвариант новой переменной, которая называется переменной действия. В новой системе переменных она играет роль импульса. Канонически сопряженная к ней переменная называется угловой переменной. Переменные действие-угол играют важную роль в теории колебаний. В силу сохранения адиабатического инварианта (импульса) угловая переменная становится игнорируемой (циклической).

Докажем (6.23) сначала для нелинейного осциллятора. Из интеграла движения $E = m\dot{x}^2/2 + U(x)$ для периода колебаний $T = \oint dt$ получаем выражение

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx.$$

Здесь $x_{1,2}(E)$ - точки поворота, определяемые соотношением $U(x_{1,2}) = E$. Отсюда с учетом того, что $p = m\dot{x} = \sqrt{2m(E - U(x))}$, получаем для $S = \oint p dx = 2\sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx$ соотношение (6.23).

Этот же результат остается справедливым и для любой гамильтоновой системы. Представим выражение (6.16) для периода колебаний T в виде

$$T = \oint dt = \oint \frac{dx}{\dot{x}} = \oint \frac{dx}{(\partial \mathcal{H}/\partial p)}.$$

Одновременно с этим продифференцируем по энергии величину адиабатического инварианта $S(E) = \oint p dx$:

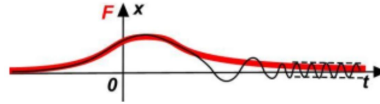
$$\frac{\partial}{\partial E} \oint p dx = \oint \frac{dx}{(\partial E/\partial p)}.$$

Сравнивая (6.25) и (6.26), с учетом связи между координатой и импульсом $p = p(x, E)$, следующей из интеграла движения $E = \mathcal{H}(x, p)$, и получаем искомое соотношение (6.23).

Точность сохранения адиабатического инварианта

Адиабатические инварианты изменяются медленнее, чем параметры системы. Скорость их изменения есть величина более высокого порядка малости, чем скорость изменения самих параметров (??? how exactly??). Из приведенных выше соображений создается впечатление, что точность сохранения адиабатического инварианта порядка $\sim (\dot{\omega}/\omega^2)^2$ (??? why??). Однако оказывается, что в типичных адиабатических ситуациях инвариант сохраняется с более высокой, экспоненциальной $\sim \exp(-\omega^2/\dot{\omega})$ точностью.

Адиабатический инвариант - это физическая величина, которая не меняется при плавном, «адиабатическом», изменении некоторых параметров системы. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения гораздо больше характерного времени процессов, происходящих в самой системе. Вопрос о точности сохранения адиабатического инварианта проще всего рассмотреть, выбрав в качестве параметра медленно изменяющуюся силу. Физически это эквивалентно медленному смещению центра осциллятора.



Рассмотрим ограниченное во времени воздействие на осциллятор. В случае локализованной во времени силы ее зависимость $F(t)$ может быть разложена в интеграл Фурье, содержащем все временные гармоники. Однако в пределе $t \rightarrow \infty$ «выживает» только гармоника с собственной частотой осциллятора ω_0 . Рассмотрим в качестве примера медленное «адиабатическое» включение и выключение внешней силы (см. Задачу 12). В случае медленного включения и выключения внешней силы будем моделировать ее функцией $f = f_0 / (1 + (t/\tau)^2)$ с $\tau \gg 2\pi/\omega_0$ и воспользуемся формулой (???????? see LL1 or what??)

$$x(t \rightarrow \infty) = \text{Im} \frac{f_0}{m\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t/T} dt}{1 + (t/\tau)^2} = \frac{\pi f_0 \tau}{2m\omega_0} e^{-\tau/T} \cos \omega_0 t.$$

При вычислении интеграла мы воспользовались теорией вычетов. Т.е. даже при очень медленном выключении силы остаются колебания на основной частоте с экспоненциально малой амплитудой.

6. Принцип соответствия

Общее свойство (6.23) адиабатических инвариантов $\partial S(E)/\partial E = T$ имеет важную квантово-механическую аналогию. Оно выражает знаменитый принцип соответствия, согласно которому на верхних квазиклассических уровнях ($n \gg 1$) при переходе на соседний нижний уровень излучается квант $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ с частотой, соответствующей классическому периоду обращения при этой же энергии $\omega = 2\pi/T_{\text{кл}}$. Действительно, учитывая правило квантования Бора-Зоммерфельда $\oint p dx = 2\pi\hbar(n + 1/2)$, получаем из (6.23)

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{S_{n+1} - S_n}{E_{n+1} - E_n} = \frac{2\pi}{\omega}$$

приведенное выше соотношение $E_{n+1} - E_n = 2\pi\hbar/T_{\text{кл}}$.

Важность адиабатических инвариантов в квантовой теории основана на идее Эренфеста (1914). Рассмотрим квантованные переменные механической системы, принимающие только дискретные значения. Если систему подвергнуть слабому возмущению, то новая возмущенная система должна подчиняться тем же квантовым законам, что и прежняя, невозмущенная. Таким образом, рассматриваемые величины должны сохранить свой квантовый, дискретный характер. Следовательно, под действием возмущения они должны либо остаться неизменными, либо скачком измениться на целое число квантов. Неизменными эти величины при слабом, медленно нарастающем возмущении будут в том случае, если они являются адиабатическими инвариантами. Таким образом, весьма правдоподобно, что квантуются только адиабатические инварианты. По крайней мере, в квазиклассическом, высококвантовом пределе, когда действует принцип соответствия. Идея Эренфеста позволила сформулировать правило квантования Бора-Зоммерфельда до создания квантовой механики.

7. Квазиклассическое приближение для уравнения Хилла

Уравнение Хилла $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ возникает при рассмотрении многих задач теоретической физики. Например, в квантовой механике это уравнение Шредингера, в котором роль координаты осциллятора $x(t)$ играет волновая функция $\psi(x)$, а квадрату частоты $\omega^2(t)$ соответствует разность полной и потенциальной энергии $2m(E - U(x))/\hbar^2$. Поэтому важно научиться решать уравнение Хилла хотя бы приближенно. Характер решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ существенно зависит от знака $\omega^2(t)$. Действительно, если $\omega^2(t)$ - положительная величина, то решение имеет осциллирующий характер; например, для $\omega(t) = \text{const}$ это $x(t) = \exp(\pm i\omega t)$. Если $\omega^2(t) < 0$, то решение экспоненциально растет или затухает; при $\omega(t) = \text{const}$ получаем $x(t) = \exp(\pm |\omega|t)$. При произвольной зависимости $\omega(t)$ от t решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ имеют смешанный характер.

Если $\omega^2(t)$ для интересующих нас значений t - большое положительное число, то приближенное решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ имеет вид

$$x(t) = f(t) \exp \left\{ \pm i \int \omega(t) dt \right\}$$

где $f(t)$ - медленно изменяющаяся функция. Действительно, в этом случае $\dot{x} \approx \pm i\omega(t)x$ и $\ddot{x} \approx -\omega^2(t)x$. Если $\omega(t)$ - достаточно гладкая функция t , то решение (6.28) приближенно удовлетворяет уравнению $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$. Можно найти и следующую поправку. Так как $\dot{x} = x f' / f \pm i\omega x$ и $\ddot{x} \simeq -\omega^2 x \pm i\dot{\omega} x \pm 2i\omega x f' / f$, то, подставляя x и $\ddot{x}$ в $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$, находим $2\omega f' + f\dot{\omega} = 0$ или, что то же, $f' / f = -\dot{\omega} / 2\omega$, откуда $f \sim 1/\sqrt{\omega}$. Итак, приближенное решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ имеет вид

$$x(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left\{ \pm i \int \omega(t) dt \right\}, \quad \omega^2(t) > 0,$$

$$x(t) \approx \frac{1}{\sqrt{|\omega(t)|}} \exp \left\{ \pm i \int |\omega(t)| dt \right\}, \quad \omega^2(t) < 0.$$

Такое приближение называется квазиклассическим или приближением.

В качестве примера рассмотрим уравнение Эйри: $\ddot{x} + \alpha t x = 0$. Исследуем сначала случай $t > 0$. Тогда $\omega^2(t) = \alpha t > 0$ и согласно (6.29) решение при больших t имеет вид

$$x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha t}} \exp \left[\pm \frac{2}{3} i \sqrt{\alpha t^3} \right]$$

Решение при $t < 0$ можно получить аналитическим продолжением (6.30):

$$x(t) \underset{|t| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt[4]{\alpha|t|}} \exp \left[\pm \frac{2}{3} \sqrt{\alpha|t|^3} \right].$$

Дополнительная фаза $\exp(-\pi i/4)$ в (6.31) возникает при обходе на комплексной плоскости точки ветвления $t = 0$. (??? how???)

В заключение отметим, что в силу допущений, сделанных при выводе (6.29), относительная точность ВКБ-приближения порядка $\sim (\omega\tau)^2 \ll 1$, где τ - характерное время изменения частоты $\omega(t)$. Таким образом, точность ВКБ-приближения составляет $\sim (\dot{\omega}/\omega^2)^2 \sim (\pi n)^{-1}$, где n - число осцилляций функции $x(t)$ в области применимости. В приложении к квантовой механике n - номер уровня энергии E_n . Поскольку правило квантования Бора-Зоммерфельда получено именно в квазиклассическом приближении, то его точность составляет $\sim (\pi n)^{-1}$. Поэтому слагаемое $1/2$ следует сохранять.

8. Колебания осциллятора с изменяющейся массой

Особая ситуация возникает тогда, когда масса осциллятора или маятника изменяется со временем. Изменение массы может происходить как за счет отделения, так и за счет присоединения новой массы к осциллятору. Так, у плавающей льдины масса убывает за счет таяния, а у планеты масса увеличивается за счет падения на нее метеоритов. Обе причины изменения массы могут действовать одновременно. Например, при движении самолета с воздушно-реактивным двигателем воздух засасывается через воздухозаборник, а затем выбрасывается с большей скоростью вместе с продуктами сгорания топлива. Движение тела с изменяющейся массой может не описываться вторым законом Ньютона. Установим уравнение, описывающее его движение.

Для этого рассмотрим изменение импульса системы тело + отсоединяющаяся от него масса в инерциальной системе отсчета в близкие моменты времени. Пусть в момент времени t масса тела m , а скорость $\mathbf{v}$. В момент времени $t + dt$ масса тела изменилась и стала $m + dm$, а скорость стала $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Это произошло за счет того, что к телу присоединилась масса dm со скоростью $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ - скорость присоединившейся массы относительно тела. Тогда изменение импульса всей системы равно импульсу $\mathbf{f}dt$ внешней силы, действующей на тело:

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - m\mathbf{v} - dm(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}dt.$$

Мы считаем, что взаимодействие тела с присоединяющейся массой происходит только в момент присоединения (гипотеза контактного взаимодействия). Отсюда получаем уравнение Мещерского для тела переменной массы:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Кроме того, учитывая сложный характер истечения или присоединения массы к телу, следует проинтегрировать второе слагаемое в (6.33) по поверхности тела. Разумеется, (6.33) справедливо как для присоединения $dm/dt > 0$, так и для отсоединения $dm/dt < 0$ массы. Однако результирующий вид уравнения движения в этих двух случаях получается разным. Это важное различие возникает по следующим причинам. Отвлечемся от набившего оскомину уравнения реактивного движения. Если не принимать его во внимание, то изменение массы движущегося тела во всех практически важных случаях происходит по двум причинам. В первом случае это уменьшение массы тела за счет его испарения, таяния или абляции. Отсоединение массы при этом

происходит с нулевой относительно тела скоростью $\mathbf{u} = 0$. Следовательно, уравнение движения (6.33) имеет такой же вид

$$m(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$$

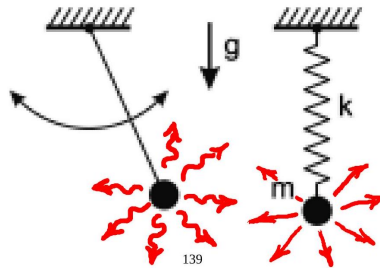
как уравнение Ньютона для тела с постоянной массой.

Во втором случае это увеличение массы тела за счет осаждения, конденсации на нем частиц окружающей среды. Присоединение массы при этом происходит с относительной скоростью $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$. Уравнение движения (6.33) в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m(t)\mathbf{v}) = \mathbf{f}$$

совпадающий с оригинальной формулировкой, данной Ньютона.

Полученные здесь формулы (6.34), (6.35) позволяют находить периоды колебаний маятников и осцилляторов с переменной массой (см. Задачи 8, 9, 10). В качестве примера рассмотрим адиабатический инвариант маятника с изменяющейся массой. Математический маятник с постоянной длиной подвеса l совершает малые колебания с медленно изменяющейся массой $m(t)$. Найдем адиабатический инвариант такого маятника при а) возрастании массы за счет конденсации из окружающей среды; б) уменьшении массы за счет испарения.



Прежде всего, установим критерий медленности изменения массы. Поскольку характерное время изменения массы $\sim m/\dot{m}$, а период колебаний маятника $\sim \sqrt{l/g}$, то условием медленности будет $m\sqrt{g/l}/\dot{m}\sqrt{l} \ll 1$. Адиабатическим инвариантом при малых колебаниях является величина E/ω . При возрастании массы в силу (6.35) частота колебаний $\sim \sqrt{g/l}$ не зависит от массы, и период не будет меняться $T = \text{const}$. В силу адиабатического инварианта энергия $E \sim ma^2$ также не будет меняться. Следовательно, амплитуда изменяется со временем как $a \sim m^{-1/2}$.

При убывании массы в силу (6.34) адиабатическим инвариантом является величина $E/m\omega$. Частота колебаний $\sim \sqrt{g/l}$ не зависит от массы, и период не будет меняться $T = \text{const}$. Из адиабатического инварианта следует, что $E/m \sim a^2$, поэтому амплитуда колебаний изменяться не будет $a = \text{const}$.

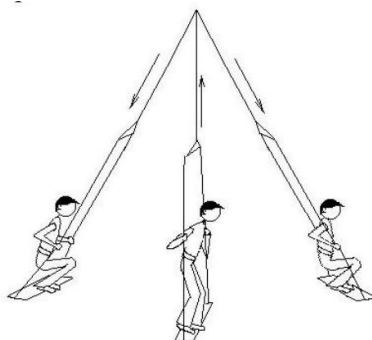
3.0.9 Р.7. Осциллятор Матье. Параметрический резонанс

1. Параметрические колебания

Существует несколько способов, которыми можно сообщить энергию колебательной системе. С некоторыми из них мы уже познакомились в предыдущих лекциях. Во-первых, можно сделать это в начальный момент времени, выведя осциллятор из положения равновесия или толкнув его, т.е. использовать начальные условия. Второй способ гораздо более эффективен. Он состоит в действии на осциллятор внешней силы, находящейся с ним в резонансе. Сейчас мы рассмотрим третий способ, который

заключается в изменении параметров осциллятора во времени. При определенных условиях это может приводить к появлению неустойчивости в системе, а также к ряду других интересных физических эффектов. Существует еще четвертый способ возбудить осциллятор, с которым мы познакомимся позже. Можно реализовать систему с отрицательным трением, когда положение равновесия станет неустойчивым. За счет создания в осцилляторе положительной обратной связи возникают его автоколебания.

В прошлой лекции мы рассмотрели третий из этих способов в том случае, когда собственная частота изменяется медленно (адиабатически), за времена, значительно превышающие период собственных колебаний осциллятора $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Мы убедились, что сохраняющимися при движении величинами являются адиабатические инварианты. Теперь мы рассмотрим резонансные параметрические системы, для которых характерное время изменения параметров того же порядка, что и период собственных колебаний системы $\dot{\omega} \sim \omega^2$. В таких параметрических осцилляторах возможно появление параметрической неустойчивости и возникновение параметрического резонанса. В следующей лекции мы рассмотрим системы в быстро осциллирующем поле. Это системы, на которые действуют быстро переменные силы с $\dot{\omega} \gg \omega^2$. Таким образом, будут исчерпаны все возможные случаи параметрических колебаний осциллятора.



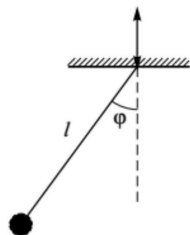
Наиболее популярным наглядным образом параметрического резонанса является девочка на качелях. С детства всем хорошо знакома такая старинная забава, как качели. Когда малыша, сидящего на качелях, раскачивает кто-то из взрослых, стоящий рядом, то такой механизм поддержания колебаний нами уже подробно изучен - это вынужденные колебания под действием внешней периодической силы. Но на качелях можно раскачиваться и самостоятельно, сидя или стоя на них. Процедура раскачивания в этом случае заключается в том, что девочка, стоящая на качелях, периодически, в нужные моменты, приседает и встает. При этом периодически изменяются параметры самой колебательной системы: расстояние от точки подвеса до центра масс и момент инерции. Поэтому такие незатухающие колебания называются параметрическими. Простейшим уравнением, описывающим эти колебания, может быть знакомое нам уравнение гармонических колебаний, в котором сама частота является периодической функцией времени.

2. Качественный анализ

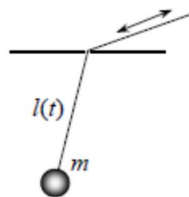
Сначала рассмотрим параметрические колебания качелей с энергетической точки зрения. Когда девочка приседает и встает, она совершает работу, поэтому, в принципе, может увеличивать амплитуду колебаний и компенсировать неизбежные потери механической энергии на трение и сопротивление воздуха. В рассматриваемом случае источник энергии находится «внутри» самой колебательной системы, причем этот источник должен расходовать энергию «сознательно», включаясь и выключаясь в нужные моменты времени. Движение девочки относительно качелей должно быть

периодическим, то есть время от времени она должна возвращаться в исходное положение (сколько раз присела, столько раз и встала). Используем эти общие соображения для описания раскачивания качелей. Предельно упростим ситуацию - будем считать девочку материальной точкой, расстояние от которой до оси вращения может изменяться в некоторых небольших пределах «сознательно», то есть в нужные моменты времени. Для того чтобы максимально увеличить механическую энергию колебаний, девочка должна вставать, когда для этого требуется приложить максимальное усилие, так как при этом будет совершена максимальная работа. Очевидно, что это условие достигается, когда качели проходят нижнюю точку. Если девочка будет приседать в другой момент, то потери механической энергии при этом будут меньше, чем работа, совершенная при вставании в нижней точке. Таким образом, имеется возможность поддерживать незатухающие колебания.

Пусть в момент прохождения нижней точки центр масс девочки очень быстро поднимается на некоторую высоту, при этом скорость качелей возрастет до некоторой величины. Ясно, что после этого максимальный угол отклонения качелей будет больше начального. Далее, в верхней точке девочка должна быстро присесть с тем, чтобы опять подняться в нижней точке. Девочка должна приседать в верхней точке, где скорость качелей равна нулю, поскольку на основании закона сохранения момента импульса потерь энергии колебаний не произойдет! Если же приседать в другой точке траектории, то скорость колебаний уменьшится, что и послужит причиной потерь механической энергии. Таким образом, за половину периода колебаний угол отклонения качелей увеличится, и при этом тело девочки вернется в исходное нижнее положение относительно качелей.



Легко показать, что увеличение энергии системы равно работе, совершенной при вставании. В проведенном рассуждении мы пренебрегли силами трения в оси вращения качелей и сопротивлением воздуха. Понятно, что в установившемся режиме рассмотренный механизм «подкачки» энергии (совершение работы при вставании) восполняет потери механической энергии. Мы показали, что периодическое изменение параметров системы может приводить к возникновению и поддержанию незатухающих параметрических колебаний в колебательных системах с трением и другими силами сопротивления.



При этом потери механической энергии компенсируются работой сил, изменяющих параметры системы. На примере рассмотренного движения качелей видно, что их максимальное раскачивание достигается в том случае, когда частота изменения параметра в два раза превышает собственную частоту колебаний системы - за один

период девочке нужно дважды присесть и дважды встать. Можно проделывать это и пропуская период-другой или даже несколько периодов. Таким образом, условие возникновения параметрического резонанса есть

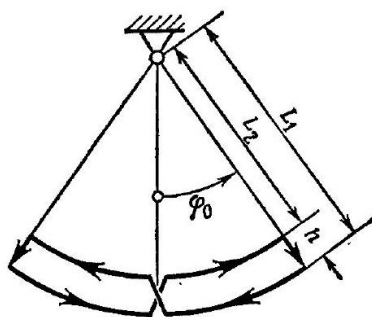
$$\omega_0 = \frac{\omega n}{2}$$

где ω_0 - частота колебания качелей, ω - частота приседаний девочки, $n = 1, 2, \dots$

Это правило является общим и для других механических, электрических, оптических и т.п. систем, которые совершают параметрические колебания. Такое возрастание амплитуды колебаний называется параметрическим резонансом. Главное его отличие от резонанса при вынужденных колебаниях заключается в том, что параметрический резонанс наступает в том случае, когда частота изменения параметров системы составляет кратную долю от собственной частоты колебаний (7.1).

3. Скорость развития неустойчивости

Рассмотренный нами типичный пример параметрически самовозбуждающейся системы, доставляемый нам девочкой на качелях, допускает простую качественную оценку темпа раскачки. Качели раскачиваются таким ритмическим сгибанием и выпрямлением тела девочки, что центр тяжести системы поднимается, когда качели проходят через низшую точку, и опускается, когда качели достигают высшей точки, соответствующей максимальному углу отклонения. Это соответствует перемещению центра тяжести системы в радиальном направлении. Качели вместе с качающейся на них девочкой представляют собой математический маятник, длина которого периодически меняется. Для качественного анализа ситуации и придания ей большей наглядности будем считать, что перемещение центра тяжести происходит очень быстро. При этом получается следующая идеализированная модель. Длина маятника (расстояние от точки подвеса до центра масс) принимает два значения l_1 и l_2 . Большее значение l_2 соответствует движению от точки максимального отклонения качелей к наинизшей точке, т.е. фазе спуска. Меньшее значение l_1 соответствует фазе подъема. Таким образом, траектория центра тяжести представляет собой две петли в форме изогнутой восьмерки.



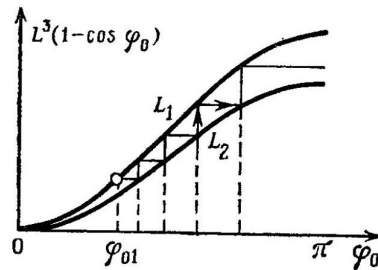
Такая простая и наглядная модель легко позволяет оценить темп раскачки качелей. В силу закона сохранения энергии при колебаниях с неизменной длиной маятника l_2 кинетическая энергия в нижней точке равна потенциальной энергии при максимальном угле отклонения φ_n :

$$\frac{L_2^2}{2ml_2^2} = mgl_2(1 - \cos \varphi_n).$$

Здесь $L_2 = mv_2l_2$ - момент импульса маятника в нижней точке, а индекс n означает n -ое по счету колебание маятника. В тот момент, когда заканчивается фаза спуска и

начинается фаза подъема, т.е. в нижней точке, происходит быстрое изменение длины маятника с l_2 до l_1 . Девочка, выпрямляясь, совершает работу, причем силы действуют в радиальном направлении и не создают момента относительно точки подвеса. Это значит, что момент импульса маятника после того, как девочка выпрямится, не изменится $L_1 = L_2$. Это позволяет для следующей фазы, фазы подъема, записать закон сохранения энергии, аналогичный (7.2):

$$\frac{L_1^2}{2ml_1^2} = mgl_1 (1 - \cos \varphi_{n+1})$$



Таким образом, из (7.2) и (7.3) получаем связь между последовательными значениями максимальных отклонений качелей φ_{n+1} и φ_n :

$$l_1^3 (1 - \cos \varphi_{n+1}) = l_2^3 (1 - \cos \varphi_n)$$

Темп возрастания φ_n легко проиллюстрировать наглядно, изобразив левую и правую части (7.4) графически, как функции φ . Мы можем найти значения всей последовательности φ_n , начиная с заданной начальной амплитуды φ_0 , по ступенчатой ломаной, заключенной между этими двумя графиками. В частности, пока углы раскачки качелей невелики, из (7.4) получаем, что угол максимального отклонения растет в геометрической прогрессии $\varphi_{n+1} = (l_2/l_1)^{3/2} \varphi_n$, то есть

$$\varphi_n = \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^{3n/2} \varphi_0.$$

В отличие от вынужденных колебаний, параметрические колебания не являются самовозбуждающимися - необходимо некоторое начальное отклонение системы от положения равновесия, чтобы начался процесс развития параметрической неустойчивости. Действительно, из (7.5) следует, что при отсутствии начального угла отклонения $\varphi_0 = 0$ нарастание колебаний невозможно.

4. Асимптотическое решение уравнения Матье

Итак, мы пришли к необходимости рассмотреть случай, когда частота изменения параметра (частоты) и частота колебаний соизмеримы (7.1). Наиболее важен самый простой вид параметрических колебаний, когда частота системы сама изменяется по гармоническому закону. Этот частный случай уравнения Хилла называется уравнением Матье:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos \omega t) x = 0.$$

Здесь ω и ε - параметрические частота и модуляция собственной частоты, соответственно. Точные решения уравнения Матье выражаются через специальные функции, называемые функциями Матье, непосредственный анализ которых затруднителен. Поэтому в целях наглядности вычислений используют различные

приближенные аналитические методы. В их основе лежит предположение о малости амплитуды модуляции $\varepsilon \ll 1$ и близости частот к резонансу $|\omega_0 - n\omega/2| \ll 1$. Учет малости этих величин позволяет получить приближенное асимптотическое решение уравнения Матье (7.6).

Рассмотрим сначала случай точного основного резонанса $n = 1$, $\omega = 2\omega_0$. При $\varepsilon = 0$ решение (7.6) в нулевом приближении известно $x_0(t) = a \sin \omega_0 t$. Есть надежда, что и при не нулевом, но малом $\varepsilon \ll 1$ решение (7.6) будет мало отличаться от нулевого приближения, а поправки можно будет вычислить по теории возмущений. Будем искать решение (7.6) в виде прямого разложения

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Этот ряд может сходиться асимптотически. Это значит, что сумма конечного числа членов (7.7) стремится к точному решению при стремлении к нулю малого параметра $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставим (7.7) в (7.6) и сгруппируем члены при одинаковых степенях ε . Уравнение (7.6) можно удовлетворить тождественно только если каждая такая группа по отдельности будет равна нулю. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \omega_0^2 x_0 \cos \omega t,\end{aligned}$$

Мы приходим к рекуррентной системе уравнений (7.8), в которой каждое следующее приближение определяется предыдущими. Каждое из уравнений (7.8) представляет собой уравнение гармонического осциллятора, на который действуют гармонические силы. Например, для поправки первого приближения, с учетом $x_0 = a \sin \omega_0 t$ получаем

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 a \sin \omega_0 t \cos 2\omega_0 t.$$

Видно, что вынуждающая сила в правой части (7.9) содержит две гармоники с частотами ω_0 и $3\omega_0$. Решение вида (7.7) имеет смысл только в том случае, когда все поправки $x_1, x_2 \dots$ к нулевому приближению x_0 не нарастают со временем, то есть являются равномерно пригодными. Но из (7.9) мы видим, что в условиях точного основного резонанса ($n = 1, \omega = 2\omega_0$) в решении (7.7) как раз и появляются секулярные члены $\sim t \sin \omega_0 t$, неограниченно возрастающие со временем. Поэтому разложение (7.7) не является равномерно пригодным.

Почему мы потерпели неудачу? Как исправить решение (7.7), чтобы им можно было пользоваться и в условиях параметрического резонанса? В прошлой лекции мы столкнулись с аналогичной трудностью. Там нас выручило соображение о том, что частота сдвигается с основной гармоники ω_0 . Поэтому, единственный выход из положения - считать амплитуду и фазу нулевого приближения $x_0(t)$ не постоянными величинами, а медленно меняющимися функциями времени. Тогда подбором соответствующих зависимостей можно так отсуммировать резонансные члены во всех порядках теории возмущений, чтобы секулярные решения исключились. В этом и заключается основная идея большинства асимптотических методов теории нелинейных колебаний.

5. Метод медленных амплитуд

Итак, причина нашей неудачи в том, что мы неправильно устроили теорию возмущений. Если вспомнить условие параметрического резонанса (7.1), то становится ясно, что в задаче, помимо $\varepsilon \ll 1$, есть еще один малый параметр $\delta = (\omega_0 - n\omega/2)$, $|\delta| \ll \omega_0$. Последовательный учет малости обеих величин ε и δ/ω_0 позволяет получить пригодное приближенное решение уравнения Матье (7.6).

Покажем, как сделать это для случая основного резонанса $n = 1$, $\delta = (\omega_0 - \omega/2)$. Решение (7.6) будем искать в виде

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}$$

Смысл этого приближения таков. Если $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$, то выражение (7.10) дает точное решение (7.6), причем a и b - постоянные. Если же эти параметры малы $\varepsilon \ll 1$ и $|\delta| \ll \omega_0$, то величины $a(t)$ и $b(t)$ становятся медленно меняющимися (по сравнению с синусом и косинусом) функциями времени, подлежащими определению. Таким образом, замена (7.10) представляет собой переход к медленным амплитудам.

Одна неизвестная функция $x(t)$ определяется одним дифференциальным уравнением (7.6). Введение двух действительных функций $a(t)$ и $b(t)$ вместо одной действительной функции $x(t)$ дает некоторый произвол в их определении. Его можно исключить, потребовав, чтобы они удовлетворяли какому-нибудь выгодному для расчетов функциональному соотношению. В этом и заключается метод переопределения неизвестной.

6. Метод переопределения

Яркую иллюстрацию того, как действует метод переопределения неизвестной, доставляет нам решение кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$. Идея проста: ищем решение в переопределенном виде $x = \alpha + \beta$. Тогда кубическое уравнение приобретает вид

$$\alpha^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + \beta^3 + q = 0.$$

Переопределенность неизвестной позволяет нам наложить дополнительное условие, чтобы вернуться к определенности. Нужно выбрать такое условие, которое резко упрощает задачу. В данном случае наложим условие $3\alpha\beta + p = 0$ или $\beta = -p/3\alpha$. Это сводит задачу (7.11) к квадратному уравнению

$$\alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} + q = 0$$

которое легко решается. Оба его корня $\alpha_{1,2}^3 = -q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$ и представляют собой переопределенные неизвестные $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \alpha_2$. Для корня кубического уравнения $x = \alpha_1 + \alpha_2$ получаем формулу Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Метод переопределения блестяще справился с поставленной задачей.

Вернемся к нашей попытке решить уравнения (7.6) подстановкой (7.10). Наложим на $a(t)$ и $b(t)$ дополнительное условие

$$\dot{a}(t) \cos \frac{\omega t}{2} + \dot{b}(t) \sin \frac{\omega t}{2} = 0.$$

Почему оно выгодно? Вычислим, используя условие (7.14), первую и вторую производную от (7.10):

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega}{2} \left[a(t) \sin \frac{\omega t}{2} - b(t) \cos \frac{\omega t}{2} \right] + \underbrace{\frac{\dot{a}(t) \cos \frac{\omega t}{2}}{2} + \frac{\dot{b}(t) \sin \frac{\omega t}{2}}{2}}_{=0},$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\omega}{2} \left[\dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} - \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2} \right] - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \left[a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \right].$$

Отметим, что сюда не входят вторые производные $\ddot{a}$ и $\ddot{b}$. Именно с этой целью мы и наложили связь (7.14). Подставляя эти формулы в исходное уравнение (7.6), получим

$$-\frac{\omega}{2} \dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} + \frac{\omega}{2} \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2} = - \left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right] \left[a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \right] - \varepsilon \omega_0^2 \left[a(t) \cos \omega t \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \cos \omega t \sin \frac{\omega t}{2} \right].$$

Уравнения (7.14) и (7.16) позволяют выразить величины $\dot{a}(t)$ и $\dot{b}(t)$ по отдельности:

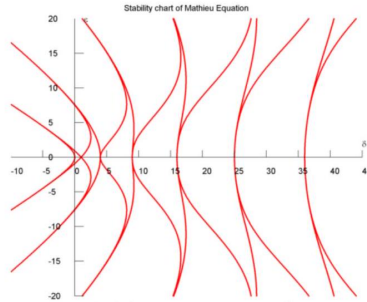
$$\dot{a}(t) = \delta [a(t) \sin \omega t - b(t) \cos \omega t + b(t)] + \frac{\varepsilon \omega_0}{4} [a(t) \sin 2\omega t - b(t) \cos 2\omega t + 2b(t) \cos \omega t - b(t)],$$

$$\dot{b}(t) = \delta [a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t - a(t)] - \frac{\varepsilon \omega_0}{4} [a(t) \cos 2\omega t + b(t) \sin 2\omega t + 2a(t) \cos \omega t + a(t)].$$

Здесь мы учли малость расстройки $|\delta| \ll \omega_0$ и положили $\omega_0^2 - (\omega/2)^2 = (\omega_0 - \omega/2)(\omega_0 + \omega/2) = (\omega + \delta)\delta \approx \omega\delta$. Правые части формул (7.17) пропорциональны малым множителям ε и δ/ω_0 . Следовательно, производные $\dot{a}(t)$ и $\dot{b}(t)$ малы, что оправдывает использование приближенного решения (7.10). Система уравнений (7.17) все еще сложна для решения. Существует значительное число приближенных методов для ее решения, но если ограничиться только первым приближением по малым параметрам, то проще всего использовать метод усреднения.

7. Метод усреднения

Метод усреднения применительно к уравнениям (7.17) основан на следующих соображениях. В правых частях (7.17) содержатся как медленно меняющиеся слагаемые, пропорциональные только амплитудам $a(t)$ и $b(t)$, так и быстро осциллирующие функции вида $a(t) \sin \omega t$, $a(t) \cos \omega t$ и т.д. Поэтому функции $a(t)$ и $b(t)$ можно представить как сумму плавно меняющихся со временем главных частей и быстро осциллирующих добавок, имеющих малую амплитуду.



Усредним уравнения (7.17) по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$. При усреднении выражений, подобных $a(t) \sin \omega t$, можно считать $a(t)$ и $b(t)$ постоянными, так как за время T они практически не изменяются. В результате все такие слагаемые дадут при усреднении нуль. Ненулевой вклад останется от величин $a(t)$ и $b(t)$, они дадут при

усреднении плавно меняющиеся средние значения $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$. Из тех же соображений в левых частях (7.17) можно записать $\overline{\dot{a}(t)} = \dot{\bar{a}}(t)$ и $\overline{\dot{b}(t)} = \dot{\bar{b}}(t)$. В результате применения такой процедуры уравнения (7.17) переходят в уравнения

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= \left(\delta - \frac{\varepsilon\omega_0}{4} \right) b(t), \\ \dot{b}(t) &= - \left(\delta + \frac{\varepsilon\omega_0}{4} \right) a(t),\end{aligned}$$

где для $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ сохранены старые обозначения без знаков усреднения.

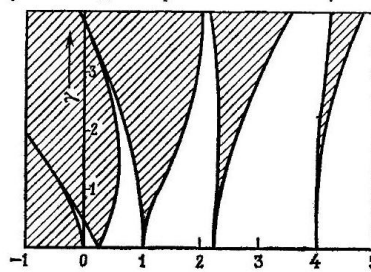
Уравнения (7.18) имеют постоянные коэффициенты, их решение можно искать обычным образом, используя подстановку $a(t) = a_0 \exp(\lambda t)$, $b(t) = b_0 \exp(\lambda t)$. Тогда из (7.18) следует

$$\begin{pmatrix} \lambda & -(\delta - \varepsilon\omega_0/4) \\ (\delta + \varepsilon\omega_0/4) & +\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0,$$

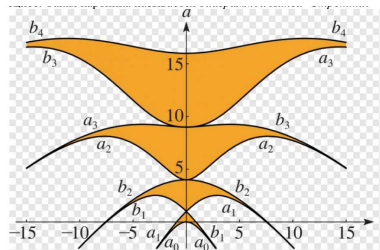
откуда $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(\varepsilon\omega_0/4)^2 - \delta^2}$. В системе будет возникать неустойчивость, если корни $\lambda_{1,2}$ действительные. Тогда одна из экспонент $\exp(\lambda_{1,2}t)$ будет нарастающей. Это реализуется при

$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{4} < \delta < \frac{\varepsilon\omega_0}{4}.$$

Максимальный инкремент нарастания неустойчивости достигается при $\delta = 0$, он равен $\lambda_{\max} = \varepsilon\omega_0/4$. Таким образом, характерное время развития параметрической неустойчивости $\sim (\varepsilon\omega_0)^{-1}$. Так как ε мало, то время развития неустойчивости велико. Неустойчивость слабая, что согласуется со сделанным предположением о медленности изменения амплитуд $a(t)$ и $b(t)$.



При $|\delta| > \varepsilon\omega_0/4$ значения λ получаются чисто комплексные, решение (7.10) при этом остается ограниченным. Граница параметрической неустойчивости (7.20) определяется условием $|\delta| = \varepsilon\omega_0/4$. На Плоскости параметров $(\omega_0/\omega, \varepsilon)$ зона неустойчивости вблизи основного резонанса $2\omega_0 = \omega$ ограничена двумя отрезками прямых, выходящими из точки $1/2$ на оси абсцисс. Такая картинка называется диаграммой Айнса-Стретта.



Parametrical instability of a system with losses

Как на параметрическую неустойчивость влияют потери? Уравнение Матье с учетом потерь

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x(t) = 0,$$

как отмечалось в прошлой лекции, можно свести к уравнению Хилла. Воспользовавшись преобразованием (6.5), слагаемое с первой производной можно исключить. Коэффициент γ не зависит от времени, поэтому замена переменных имеет вид $x(t) = \exp(-\gamma t)y(t)$. В результате для $y(t)$ получается уравнение Матье, в котором собственная частота ω_0 сдвинута на относительную величину порядка γ^2/ω_0^2 . В рассматриваемом приближении ($\gamma \sim \delta \sim \varepsilon$) этот сдвиг можно не учитывать. Следовательно, неустойчивость для $x(t)$ возникнет при условии $\gamma < |\lambda_{1,2}|$ или $\gamma < \sqrt{(\varepsilon\omega_0/4)^2 - \delta^2}$. Граница зоны параметрического резонанса определяется уравнением

$$\delta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2,$$

которое задает на диаграмме Айнса-Стретта ветвь гиперболы. Таким образом, учет затухания приводит к тому, что зона неустойчивости становится отделенной от оси абсцисс порогом возбуждения неустойчивости $\varepsilon_{\min} = 4\gamma/\omega_0 = 2/Q$. При высших резонансах зона параметрической неустойчивости резко сужается, а для величины порога возбуждения неустойчивости получается $\varepsilon_{\min} \propto Q^{-1/n}$.

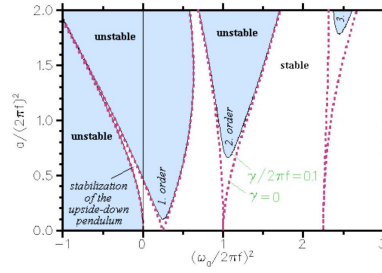
8. Уравнение Матье - это уравнение Шредингера

Выше мы уже отмечали (см. Пухов-л.6, Колебания), что уравнение Хилла в теории колебаний $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ математически совершенно эквивалентно уравнению Шредингера в квантовой механике $\psi'' + 2m\hbar^{-2}(E - U(x))\psi = 0$. Уравнение Хилла - это уравнение Шредингера, в котором роль координаты осциллятора $x(t)$ играет волновая функция квантовой частицы $\psi(x)$, а квадрату частоты осциллятора $\omega^2(t)$ соответствует разность полной и потенциальной энергии частицы $2m(E - U(x))/\hbar^2$. Недолгое созерцание уравнения Матье (7.6) показывает, что математически оно так же эквивалентно уравнению Шредингера

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\psi = 0$$

для движения квантовой частицы в периодическом потенциале $U(x) = U_0 \cos(2\pi x/L)$. Роль постоянной периода потенциала $2\pi/L$ играет частота модуляции ω , а роль амплитуды потенциала U_0 - амплитуда модуляции ε .

Если амплитуда потенциала мала $U_0 \ll E$, то есть мала амплитуда модуляции $\varepsilon \ll 1$, то зоны параметрической неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта соответствуют запрещенные зоны в зонной структуре спектра при движении квантовой частицы в одномерном кристалле. Если амплитуда велика $U_0 \gg E$, то есть амплитуда модуляции велика $\varepsilon \gg 1$, то квантовая частица заперта в параболической яме. Зоны отсутствия параметрической неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта соответствуют эквидистантные уровни гармонического осциллятора. Оба эти предельные случаи хорошо видны на диаграмме Айнса-Стретта.



9. Теорема Флоке о линейно независимых решениях уравнения Хилла

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами всегда можно привести к виду уравнения Хилла (см. Пухов-л.6, Колебания):

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0$$

где $\omega^2(t)$ - действительная периодическая функция с периодом T .

У уравнения (7.24) существует два линейно независимых решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, так что любое другое решение представимо в виде их линейной комбинации. Делая в (7.24) замену $t \rightarrow t + T$, мы вновь получаем то же самое уравнение, следовательно, функции $x_1(t + T)$ и $x_2(t + T)$ также должны являться его решениями. Поэтому можно записать:

$$\begin{pmatrix} x_1(t + T) \\ x_2(t + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

где коэффициенты матрицы a_{ij} - ненулевые постоянные действительные числа. Матрица a называется матрицей отображения за период.

Детерминант матрицы a равен единице, $\det a = 1$. Действительно, умножим первое из уравнений

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2(t)x_1(t) = 0, \quad \ddot{x}_2(t) + \omega^2(t)x_2(t) = 0$$

на $x_2(t)$, а второе - на $x_1(t)$ и вычтем одно из другого. В результате получим $\ddot{x}_1x_2 - x_1\ddot{x}_2 = d(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)/dt = 0$, т.е. постоянство вронскиана $\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2 = \text{const}$. Приравнявая вронскиан в моменты времени t и $t + T$ и используя (7.25), получаем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det a = 1$$

Собственные числа матрицы отображения за период μ_1 и μ_2 называются мультипликаторами и определяются из уравнения

$$\det(a - \mu e) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

или $\mu^2 - (\text{tr } a)\mu + \det a = 0$. Таким образом, с учетом (7.27) получаем, что мультипликаторы μ_1 и μ_2 равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr } a \pm \sqrt{(\text{tr } a)^2 - 4} \right).$$

Так как функция $\omega^2(t)$ действительна, то коэффициенты матрицы a - также действительные числа. Поэтому в зависимости от величины $\text{tr } a$ возможны два случая.

1). Если $|\text{tr } a| < 2$, то мультипликаторы комплексно сопряжены, причем $\mu_1\mu_2 = 1$. То есть оба мультипликатора лежат на единичной окружности в комплексной плоскости $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\varphi T)$. С помощью линейного преобразования $(x_1x_2) \rightarrow (u_1u_2)$ перейдем к

представлению, в котором матрица a диагональна. Тогда общее решение уравнения (7.24) имеет вид

$$u_{1,2}(t) = \mu_{1,2} \Phi_{1,2}(t) = e^{\pm i\varphi t} \Phi_{1,2}(t)$$

где $\Phi_{1,2}(t)$ - периодические с периодом T функции. На больших временах эти решения остаются ограниченными. Это значит, что параметрическая неустойчивости в системе нет.

2). Если $|\operatorname{tr} a| > 2$, то из соотношения (7.29) получаются два действительных мультипликатора, один из которых по модулю обязательно больше $\mu_1 > 1$, а другой - меньше $\mu_2 < 1$ единицы. В этом случае в силу (7.30) ограниченности решения (7.24) нет. Поэтому при произвольных ненулевых начальных условиях система будет экспоненциально быстро уходить от положения равновесия, что соответствует параметрической неустойчивости. Граница между устойчивым и неустойчивым поведением системы определяется соотношением $\operatorname{tr} a = \pm 2$.

Линейно независимые решения уравнения Хилла вида (7.30) называются решениями Флоке, а их вид составляет содержание теоремы Флоке. В квантовой механике уравнение Хилла (7.24) совпадает с уравнением Шредингера в периодическом потенциале, а (7.30) называется теоремой Блоха. Важно отметить, что нахождение матрицы отображения за период представляет собой не менее сложную задачу, чем решение самого уравнения (7.24). Ценность теоремы Флоке заключается в качественной классификации решений и оценке условий возникновения параметрической неустойчивости.

Действительно, предположим, что функция $\omega^2(t)$ зависит от малого параметра ε так, что при $\varepsilon = 0$ имеем $\omega^2(t) = \omega_0^2 = \text{const}$. Зададимся вопросом, как ведет себя система при достаточно малых ε . На плоскости параметров $(\omega_0 T, \varepsilon)$ каждой точке соответствует либо устойчивое, либо неустойчивое движение системы. Граница между устойчивой и неустойчивой областями определяется соотношением $|\operatorname{tr} a| = 2$.

При $\varepsilon = 0$ матрицу a легко вычислить в явном виде. Действительно, в этом случае система есть просто гармонический осциллятор, для которого два линейно независимых решения есть $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$. Таким образом, по определению имеем

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_0(t+T) \\ \sin \omega_0(t+T) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 T & -\sin \omega_0 T \\ \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{pmatrix},$$

откуда $\operatorname{tr} a = 2 \cos \omega_0 T$. Следовательно, если $\omega_0 T \neq \pi n, n = 1, 2, \dots$, то $|\operatorname{tr} a| < 2$, поэтому все точки на оси ω_0 , кроме точек, для которых выполняется условие

$$\frac{T}{T_0} = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

соответствуют устойчивому поведению системы. Кроме того, все системы, отличающиеся от них на бесконечно малое значение ε , также устойчивы. Зоны неустойчивости на плоскости параметров $(\omega_0 T, \varepsilon)$ могут подходить к оси абсцисс только в точках (7.32). Таким образом, (7.32) представляют собой условия возникновения параметрического резонанса. Оно, естественно, совпадает с условием резонанса (7.1), полученным в начале лекции из качественных соображений.

3.0.10 Kapitza Oscillator. Motion in a Rapidly Varying Field: Basics

(???? i DON'T KNOW, WHY IT IS MISSING????)

3.0.11 Kapitza Oscillator: Other Model and Approaches

(I'll write extra knowledge about it)

3.0.12 Motion in a Rapidly Varying Field: Other Model and Approaches

(I'll write extra knowledge about it)

3.0.13 P.9. Nonlinear Resonance

1. Поведение математического маятника при гармоническом воздействии

Реакция нелинейных систем на гармоническое воздействие не является синусоидальной, про нее в общем случае невозможно сформулировать какие-либо универсальные и общие утверждения. Отклик нелинейной системы зачастую неоднозначен - установившееся движение может иметь разный характер в зависимости от начальных условий. Спектр вынужденных колебаний содержит субгармонические частоты. В некоторых случаях отклик нелинейной системы на регулярное воздействие может быть хаотическим, а малое изменение частоты или амплитуды воздействия может привести к качественному изменению отклика системы. В этом смысле контраст с поведением линейных систем существен.

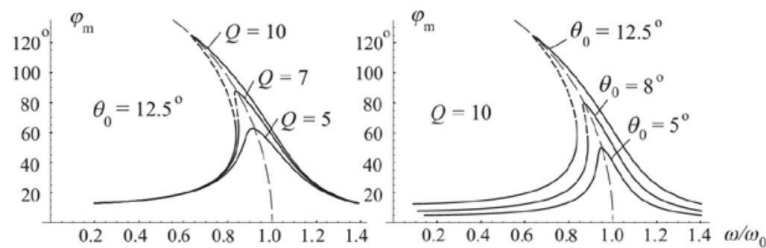
Может показаться, что обычный математический маятник под действием синусоидальной силы должен демонстрировать вполне понятное поведение, хорошо согласующееся с нашей интуицией. Но, несмотря на кажущуюся простоту, всем нам знакомый маятник, будучи нелинейной системой, обнаруживает весьма необычные движения, многие из которых еще до конца не изучены. Рассмотрим нелинейный резонанс маятника подробнее.

2. Уравнение вынужденного движения маятника

Дифференциальное уравнение движения математического или физического маятника под действием синусоидальной внешней силы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = f_0 \cos \omega t$$

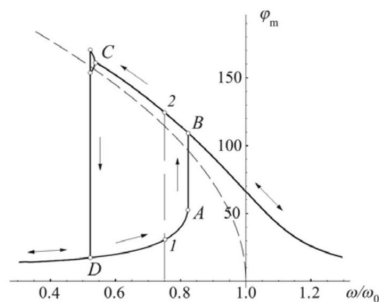
Здесь x - угол отклонения маятника, ω_0 - собственная частота, ω - частота внешнего воздействия, γ - постоянная затухания, эквивалентная добротности $Q = \omega_0/2\gamma$, f_0 - внешняя сила на единицу массы. Когда внешняя сила невелика $f_0/\omega_0^2 \ll 1$, вызываемое ею отклонение маятника также невелико $x \ll 1$, и можно положить $\sin x = x$. Это значит, что статический угол x_0 отклонения маятника под действием малой постоянной силы равен $x_0 = f_0/\omega_0^2$. В пределе низкой частоты внешней силы $\omega \ll \omega_0$ первыми двумя слагаемыми в (9.1) можно пренебречь. Маятник квазистатически следует за изменениями внешней силы, то есть при низкой частоте $\omega \ll \omega_0$ и малой амплитуде вынуждающей силы $f_0/\omega_0^2 \ll 1$ установившиеся вынужденные гармонические колебания маятника происходят с амплитудой f_0/ω_0^2 .



3. Резонансные кривые установившихся колебаний маятника

Итак, установившиеся вынужденные колебания маятника происходят с малой амплитудой, если внешняя сила невелика $f_0/\omega_0^2 \ll 1$ и ее частота ω достаточно далека от резонансной частоты ω_0 . Это следствие того, что для малых колебаний уравнение (9.1) становится линейным. Описываемая таким уравнением физическая система является линейным осциллятором. Установившееся движение линейного осциллятора под действием гармонической внешней силы представляет собой гармоническое колебание с частотой внешнего воздействия и амплитудой, резонансным образом зависящей от частоты этого воздействия (см. Лекцию 3). Поэтому при $f_0/\omega_0^2 \ll 1$ и не слишком слабом трении $\gamma \sim \omega_0$ реакция маятника на синусоидальное воздействие достаточно хорошо описывается резонансной кривой линейного осциллятора. При заданной амплитуде внешней силы f_0 отклик осциллятора максимален, если ее частота близка к собственной частоте осциллятора $\omega \approx \omega_0$.

Если же амплитуда внешней силы не мала и/или трение достаточно слабое, резонансная кривая маятника изгибается в сторону меньших частот. Приближенную теоретическую резонансную кривую для маятника можно получить на основе следующих эвристических соображений. Возьмем выражение для резонансной кривой линейного осциллятора (3.24), и в него в качестве ω_0 подставим зависящую от амплитуды a частоту собственных колебаний маятника $\omega(a)$. При такой оценке принимается, что вынужденные колебания большой амплитуды попрежнему, как и для малых амплитуд, остаются почти гармоническими, но их частота $\omega(a)$, в отличие от изохронного линейного осциллятора, уменьшается с ростом амплитуды.



Для зависимости частоты собственных колебаний математического маятника от амплитуды $\omega(a)$ можно воспользоваться приближенным выражением $\omega(a) \approx \omega_0(1 - a^2/16)$ (см. Лекцию 5). Пик резонансной кривой смещается в сторону низких частот и принимает вид, характерный для нелинейных систем с «мягкой» возвращающей силой. Это так называемая «скелетная» зависимость. Когда амплитуда внешней силы превышает некоторое критическое (при данной добротности Q) значение, левый склон резонансного пика становится «нависающим». Это значит, что в определенном интервале частот имеется три решения для амплитуды установившихся колебаний. Такой перегиб резонансной кривой ведет к бистабильности, то есть к существованию двух режимов установившихся колебаний с разными амплитудами при

одной и той же частоте и амплитуде внешнего воздействия. Третье, промежуточное, значение амплитуды соответствует неустойчивому режиму.

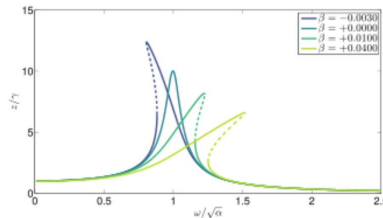
Традиционный способ изучения резонансных явлений заключается в медленном изменении частоты внешнего воздействия, т.е., сканировании частоты без прерывания процесса вынужденных колебаний. При этом амплитуда внешнего воздействия поддерживается неизменной, в то время как частота проходит через пик резонансной кривой с одного его склона на другой. В отличие от линейного осциллятора, для которого каждому значению частоты возбуждения соответствует определенная амплитуда, маятник демонстрирует гистерезисное поведение. Когда при сканировании частота подходит к границе области сосуществования нескольких режимов, амплитуда установившихся колебаний изменяется скачкообразно, причем эти скачки, «срывы» амплитуды, происходят при разных значениях частоты в зависимости от направления сканирования. Возникает гистерезис сканирования резонансной кривой.

4. Качественный анализ

Сформулированная в предыдущем разделе качественная картина позволяет приближенно оценить амплитуду отклика нелинейного осциллятора количественно. Отклик линейного гармонического осциллятора имеет резонансный характер. Когда частота воздействия ω близка к собственной частоте осциллятора ω_0 , а трение мало, амплитуда колебаний оказывается большой. При малой добротности $Q \ll 1$:

$$a^2(\omega) \approx \frac{f^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Учет диссипации ограничивает этот бесконечный рост. В случае нелинейного осциллятора частота собственных колебаний осциллятора ω_0 становится зависящей от амплитуды a , он проявляет неизохронность. Например, для осциллятора Дуффинга собственная частота равна $\omega(a) = \omega_0 + 3\beta a^2/8\omega_0$. Для качественной оценки амплитуды вынужденных колебаний нелинейного осциллятора $a(\omega)$ подставим это выражение в резонансную амплитуду (9.2). При $\beta a^2 \ll \omega_0^2$ это дает нам оценку для амплитуды $a \approx f/|\omega^2 - \omega_0^2 - 3\beta a^2/4|$. Это соотношение позволяет качественно понять «скелетную» форму кривой нелинейного резонанса. Она существенно зависит от того, «жесткая» это $\beta > 0$ или «мягкая» $\beta < 0$ нелинейность. Если $\beta > 0$, то рост амплитуды приводит к эффективному сдвигу «резонансной» частоты $\omega(a)$ вправо, в сторону ее увеличения $\omega(a) = \omega_0 + 3\beta a^2/8\omega_0$. С точки зрения внешнего вида резонансной кривой это означает, что ее пик загибается в ту или другую сторону в зависимости от знака β , а его вершина смещается на частоту $\Delta\omega \approx 3\beta a^2/8\omega_0$.



Теперь реализуем эту идею в том случае, когда мы учитываем диссипацию. Для оценки амплитуды вынужденных колебаний $a(\omega)$ нелинейного осциллятора с трением и получения конкретных выражений воспользуемся соотношением (3.24), в которое вместо ω_0 подставлена «сдвинутая» по амплитуде частота $\omega(a) = \omega_0 + 3\beta a^2/8\omega_0$, или, что тоже $\omega^2(a) = \omega_0^2 + 3\beta a^2/4\omega_0$:

$$a^2 \approx \frac{f^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - 3\beta a^2/4)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Соотношение (9.3) задает зависимость a от ω в неявном виде. Еще раз отметим разный вид резонансной кривой осциллятора с кубической нелинейностью при положительном и отрицательном значении параметра нелинейности β . Если частота свободных колебаний возрастает с ростом амплитуды ($\beta > 0$), то верхняя часть графика резонансной кривой наклонена вправо, если же убывает ($\beta < 0$), то влево.

Как нарисовать нелинейную резонансную кривую? Для того, чтобы представить себе, как выглядит резонансная кривая и изобразить ее графически, удобнее всего нарисовать зависимость ω^2 от a . Для этого представим (9.3) в виде $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta a^2/4 \pm \sqrt{f^2/a^2 - 4\gamma^2 \omega^2}$ и, чтобы разобраться, сначала пренебрежем трением $\gamma = 0$. В этом случае в осях (a, ω^2) нарисует параболу $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta a^2/4$ и две гиперболы $\omega^2 = \pm f/a$. Сложив их вместе графически, получим «скелетную» резонансную кривую, качественно описанную выше. Если теперь учесть трение $\gamma \neq 0$, то гиперболы не будут тянуться до бесконечности по $a \rightarrow \infty$. Они уткнутся в ноль при $a \approx f/2\gamma\omega_0$. Это и сформирует изогнутый пик резонансной кривой конечной высоты.

Отметим также, что в отличие от линейного случая без трения ($\gamma = 0$), амплитуда вынужденных нелинейных колебаний остается конечной даже при $\omega = \omega_0$. Причина этого заключается в неизохронности собственных колебаний нелинейного осциллятора. С ростом амплитуды увеличивается сдвиг частоты, и резонансное условие нарушается. Вследствие этого нарастание амплитуды колебаний ограничивается. Такое поведение системы называется нелинейным резонансом. При этом зависимость амплитуды от частоты может быть неоднозначной. Это, в свою очередь, приводит к явлению гистерезиса при плавном изменении частоты возбуждения.

5. Нелинейный резонанс в осцилляторе Дуффинга

Изложенные выше качественные соображения полностью подтверждаются прямым нахождением асимптотического решения для уравнения нелинейных вынужденных колебаний. Рассмотрим его на конкретном примере осциллятора Дуффинга:

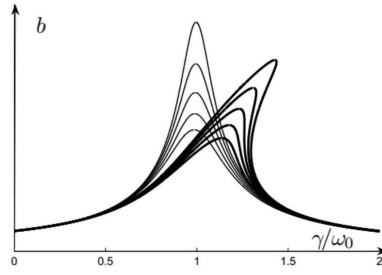
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t$$

Для успеха предпринимаемых вычислений будем считать, что расстройка $\delta = \omega - \omega_0$ мала $|\delta| \ll \omega_0$. Члены в (9.4), отвечающие за диссипацию γ , нелинейность β и внешнее воздействие f , также полагаются малыми. Поэтому решение (9.4) нужно искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой, близкого к невозмущенному нелинейным слагаемым решению

$$x(t) = \text{Re} [A(t) \exp(i\omega_0 t)]$$

На медленно меняющуюся амплитуду $A(t)$, как обычно, накладывается дополнительное условие (см. (7.14)):

$$\text{Re} [\dot{A}(t) \exp(i\omega_0 t)] = 0$$



Действуя в духе изложенных в Лекциях 5 и 7 асимптотических методов, получим для $A(t)$ укороченное уравнение. Представляя внешнюю силу в виде $f \cos \omega t = \text{Re}[f \exp(i\omega t)]$, подставляем (9.5) в (9.4). Усредняя полученное уравнение по быстрым осцилляциям, подобно тому, как это делалось для уравнения Матье в Лекции 7, оставляем только медленно изменяющиеся слагаемые. Тогда укороченное уравнение для амплитуды $A(t)$ имеет вид

$$\dot{A} = -\gamma A - \frac{3i\beta}{2\omega_0} |A|^2 A - \frac{if}{2\omega_0} e^{i\delta t}.$$

В отсутствие внешнего воздействия ($f = 0$) уравнение (9.7) переходит в укороченное уравнение для автономного осциллятора Дуффинга.

Переходя к действительным переменным, амплитуде и фазе, $A(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$, отделяем в (9.7) действительную и мнимую части. Вводя еще для удобства новую фазу $\psi(t) = t\delta - \varphi(t)$, получаем автономную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} + \gamma a &= \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \delta - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \psi. \end{aligned}$$

В установившемся режиме вынужденных колебаний амплитуда постоянна $\dot{a} = 0$, а частота равна частоте внешнего воздействия $\dot{\psi} = 0, \psi = \text{const}$. Действительно, из (9.7) легко проверить, что в этом случае $x(t) = a \cos(\omega t - \psi)$. Тогда, полагая в (9.8) $\dot{a} = \dot{\psi} = 0$ и избавляясь от ψ , получаем уравнение на амплитуду установившихся колебаний:

$$\gamma^2 + \left(\delta - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} \right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2 a^2}.$$

В рамках выбранного приближения, соотношение (9.9) представляет собой уравнение резонансной кривой с учетом трения, совпадающее с полученным ранее из качественных соображений (9.3).

6. Общие черты нелинейных и нелинейных параметрических резонансов

Нелинейные и нелинейные параметрические резонансы имеют много общего. Проиллюстрируем общие черты этих резонансов на примере нелинейного электрического контура под действием внешней электродвижущей силы, частота которой близка к собственной частоте контура или вдвое больше. Обычно колебательный контур характеризуется тремя основными параметрами: индуктивностью L , ёмкостью C и сопротивлением R . Если все эти параметры не зависят от токов и напряжений в контуре, то система является линейной. Вынужденные колебания в таком контуре описываются линейным дифференциальным уравнением, поэтому характерные свойства вынужденных колебаний в этой системе таковы, как они описаны в Лекции 3. Частота колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы. При воздействии на систему

нескольких сигналов отклик системы равен сумме откликов на каждый из сигналов (принцип суперпозиции). Из него следует, что при увеличении амплитуды внешней электродвижущей силы в несколько раз амплитуда колебаний возрастает во столько же раз.

Если какой-либо из параметров контура L , C или R зависит от величины сигнала в нём, то уравнение контура становится нелинейным. При вынужденных колебаниях в нелинейном контуре нарушаются оба отмеченные выше свойства линейных систем. Вынужденные колебания в нелинейном контуре происходят не только на частоте внешней силы, но и на её гармониках и субгармониках. Поэтому резонанс в нелинейном контуре позволяет смешивать частоты нескольких внешних сил, что приводит к характерным искажениям амплитудных характеристик вынужденных колебаний. Резонансные кривые в нелинейном контуре наклоняются и становятся неоднозначными (реактивная нелинейность) либо приобретают широко используемые в ограничителях плоские вершины (нелинейные потери), когда амплитуда колебаний почти не зависит от амплитуды вынуждающей силы.

В нелинейных контурах нет принципиального различия между воздействием на систему внешней электродвижущей силы и параметрическим воздействием. Действительно, под влиянием внешней электродвижущей силы периодически изменяются токи и напряжения в контуре, а это приводит к периодическому изменению параметров нелинейных элементов. Периодическое изменение параметров при достаточной интенсивности и соответствующей частоте вызывает параметрическое возбуждение колебаний в системе. Таким образом, весьма сходен анализ резонансных кривых нелинейного контура при нелинейном резонансе (частота внешнего воздействия близка к частоте собственных колебаний контура) и при параметрическом резонансе (частота параметрического воздействия близка к удвоенной частоте собственных колебаний контура).

Нелинейный резонанс. Частота собственных колебаний контура зависит от амплитуды его колебаний. При увеличении амплитуды колебаний собственная частота нелинейного контура, равная ω_0 при малых амплитудах, увеличивается или уменьшается при изменении амплитуды в зависимости от знака величины нелинейного параметра контура. Пусть нелинейным параметром является ёмкость. Если с ростом амплитуды колебаний средняя ёмкость контура увеличивается, то частота падает. Если же средняя ёмкость падает с ростом амплитуды, то частота растёт. В связи с этим резонансные кривые могут быть двух видов. Кривые одного вида соответствуют значениям амплитуды внешней силы, меньшим некоторой критической величины, и характеризуются однозначной зависимостью амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы. Резонансные кривые этого вида представляют собой несколько деформированные резонансные кривые для обычного линейного контура. Максимум у них смещён в сторону больших или меньших частот в зависимости от знака параметра нелинейности.

Другой вид резонансных кривых соответствует амплитудам внешней силы, большим некоторого критического значения. У резонансных кривых этого вида имеются участки с неоднозначной зависимостью амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия. В области частот, где резонансные кривые являются трехзначными, среднее значение амплитуды неустойчиво, поэтому при экспериментальном исследовании резонансных кривых наблюдаются скачки амплитуды при достижении границ неустойчивой области.

При противоположном знаке нелинейности резонансные кривые будут иметь наклон в противоположную сторону. В системах с нелинейными потерями изменение амплитуды колебаний не влияет на собственную частоту колебательного контура. Поэтому

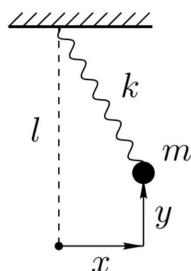
резонансные кривые таких систем не имеют наклона. Характерной особенностью резонансной кривой контура с нелинейными потерями является наличие плоской вершины, поскольку потери обычно увеличиваются с ростом амплитуды. В системах с нелинейными элементами, например с полупроводниковыми диодами, могут одновременно меняться активные и реактивные параметры. По форме резонансной кривой, полученной экспериментально, можно судить о том, какой из нелинейных параметров играет в контуре большую роль.

Нелинейный параметрический резонанс. Параметрическим резонансом называется явление возбуждения колебаний за счет периодического изменения какого-либо параметра колебательной системы. Проще всего явление параметрического резонанса наблюдать, когда частота внешней силы ω близка к удвоенной собственной частоте ω_0 резонансной системы, т.е. когда $\omega \approx 2\omega_0$. Если в контуре с нелинейным конденсатором происходят вынужденные колебания, то под их влиянием модулируется емкость нелинейного конденсатора. Частота и амплитуда модуляции емкости определяются частотой и амплитудой вынужденных колебаний. Параметрическое возбуждение колебаний возникает, если $\omega \approx 2\omega_0$ и глубина модуляции емкости имеет достаточно большую величину. Последнее условие выполняется лишь при достаточно большой амплитуде вынужденных колебаний с частотой ω .

При параметрическом возбуждении колебаний в контуре будут одновременно наблюдаться два процесса: вынужденные колебания с частотой ω и параметрически возбужденные колебания с частотой $\omega/2 \approx \omega_0$. Амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний зависит от частоты ω внешней силы следующим образом. Она отлична от нуля только в полосе частот, в пределах которой возможно параметрическое возбуждение колебаний. При уменьшении амплитуды внешнего воздействия полоса сужается, при некоторой амплитуде внешней силы возбуждение становится невозможным. Эта особенность отличает нелинейный параметрический резонанс от нелинейного резонанса.

7. Резонанс Ферми

Особый тип нелинейного резонанса возникает при внутреннем нелинейном взаимодействии в системе. В этом случае возможно возникновение внутреннего нелинейного резонанса. Этот резонанс называется резонансом Ферми, и условием его возникновения является совпадение комбинационных частот.



Действительно, в предыдущих лекциях для нелинейного осциллятора в первом приближении мы получили смещение основной частоты колебаний (нелинейный резонанс) и колебания на удвоенной частоте (параметрический резонанс). При колебаниях связанных нелинейных осцилляторов с частотами ω_1 и ω_2 возникает принципиально новое явление колебания с комбинационными частотами $|\omega_1 \pm \omega_2|$.

Для иллюстрации того, как возникают нелинейные поправки в случае связанных колебаний и к каким результатам они приводят, рассмотрим простой пример маятника массы m на пружинке жесткости k в поле тяжести g . Будем рассматривать лишь

колебания этого маятника в вертикальной плоскости. Длина ненапряженной пружинки равна l_0 , в положении равновесия маятника длина пружинки равна $l = l_0 + (mg/\kappa)$. Такой маятник типа «качающаяся пружина» представляет собой механическую модель резонанса Ферми в молекуле CO_2 , приводящего к расщеплению линии колебательного спектра.

В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты x и y отклонения маятника от положения равновесия. Функцию Лагранжа маятника

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\kappa}{2} \left[\sqrt{(l-y)^2 + x^2} - l_0 \right]^2 - mgy$$

разложим в ряд по малым отклонениям до третьего порядка включительно :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2 + \dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2 + 2\alpha x^2 y),$$

где введены обозначения $\omega_x = \sqrt{g/l}$, $\omega_y = \sqrt{\kappa/m}$, $\alpha = \kappa l_0 / 2ml^2$. Решение уравнений движения маятника

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2 x &= 2\alpha xy \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= \alpha x^2 \end{aligned}$$

следующих из лагранжиана (9.11), ищем методом последовательных приближений $x = x_1 + x_2 + \dots$, $y = y_1 + y_2 + \dots$ по параметру нелинейности α . В качестве первого приближения получаем гармонические колебания с частотами ω_x и ω_y :

$$x_1 = a \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y_1 = b \cos(\omega_y t + \varphi_y).$$

Во втором приближении получаем из первого уравнения (9.12)

$$\ddot{x}_2 + \omega_x^2 x_2 = 2\alpha x_1 y_1 = \alpha ab [\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)]$$

где $\omega_{\pm} = \omega_y \pm \omega_x$, $\varphi_{\pm} = \varphi_y \pm \varphi_x$.

Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с комбинационными частотами $\omega_{\pm}$:

$$x_2 = \frac{\alpha ab}{2\omega_y (2\omega_x + \omega_y)} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{\alpha ab}{2\omega_y (2\omega_x - \omega_y)} \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

Подобным же образом из второго уравнения (9.12) получаем

$$y_2 = \frac{\alpha a^2}{2\omega_y^2} - \frac{\alpha a^2}{2(4\omega_x^2 - \omega_y^2)} \cos(2\omega_x t + 2\varphi_x).$$

Таким образом, у $y(t)$ во втором порядке появился постоянный сдвиг и колебание с удвоенной частотой $2\omega_x$.

Полученные решения (9.15), (9.16) справедливы, пока частота ω_y не близка к удвоенной частоте $2\omega_x$. При $\omega_y = 2\omega_x$ ангармонические поправки перестают быть малыми и могут приводить к значительной перекачке энергии из колебания по оси x в колебания по оси y и обратно. Именно этот случай имеет отношение к связи продольных и изгибных колебаний молекулы CO_2 , когда возникает резонанс Ферми, и к удвоению частоты света в нелинейной оптике. Функция Лагранжа в этом случае ($\omega_y = 2\omega_x = 2\omega$) равна

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 + \dot{y}^2 - 4\omega^2 y^2 + 2\alpha x^2 y),$$

а уравнения движения таковы

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= 2\alpha xy, \\ \ddot{y} + 4\omega^2 y &= \alpha x^2.\end{aligned}$$

Решение (9.18) ищем в приближении медленно изменяющихся амплитуд в виде

$$\begin{aligned}x &= p e^{i\omega t} + p^* e^{-i\omega t} + \delta x \\ y &= q e^{2i\omega t} + q^* e^{-2i\omega t} + \delta y,\end{aligned}$$

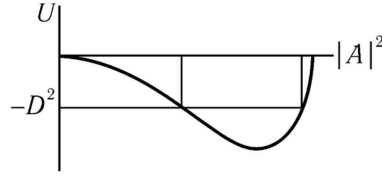
полагая, что $p(t)$ и $q(t)$ - медленно изменяющиеся амплитуды колебаний. Более быстро осциллирующими слагаемыми δx и δy можно пренебречь. Тогда имеют место соотношения:

$$|\dot{p}| \ll \omega |p| \ll \omega^2 |p|, \quad |\dot{q}| \ll \omega |q| \ll \omega^2 |q|, \quad \delta x \sim \delta y \ll |p|,$$

Которые принято называть приближением вращающейся волны. Подставим (9.19), (9.20) в (9.18). Сохраняя в этом приближении из (9.19) только слагаемые с $e^{i\omega t}$, а из (9.20) только слагаемые с $e^{2i\omega t}$ и пренебрегая величинами $|\dot{p}|$ и $|\dot{q}|$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -i\beta q p^*, \\ 4\dot{q} &= -i\beta p^2,\end{aligned}$$

где введен малый параметр $\beta = \alpha/\omega$.



У системы (9.22), (9.23) есть два интеграла движения. Один из них представляет собой закон сохранения энергии:

$$|p|^2 + 4|q|^2 = A = \text{const}$$

Постоянство величины A легко проверить прямым дифференцированием (9.24) по времени. Используя уравнения (9.22), (9.23), получаем

$$\frac{dA}{dt} = -i\beta (B - B^*)$$

где $B = p^{*2}q + p^2q^*$. Величина B вещественна, поэтому энергия сохраняется $dA/dt = 0$. Действуя аналогично, легко показать, что интегралом движения является также и величина $B = \text{const}$.

Используя эти два интеграла движения, можно найти закон изменения со временем энергии $e(t)$ колебаний по оси x . Эта энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний $e(t) = |p(t)|^2$. Используя уравнение (9.22), находим

$$\frac{de}{dt} = i\beta (p^{*2}q - p^2q^*)$$

Возведем уравнение (9.26) в квадрат и учтем интегралы движения A, B :

$$\dot{e}^2 = -\beta^2 \left[(p^{*2}q + p^2q^*)^2 - 4|p|^4|q|^2 \right] = -\beta^2 \left[B^2 - |p|^4 (A - |p|^2) \right].$$

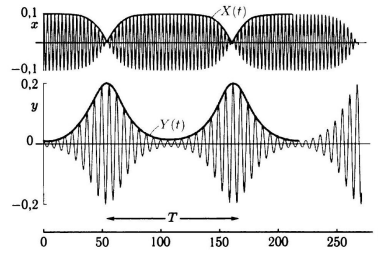
Это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{e}^2 + \beta^2 u(e) = -\beta^2 B^2, \quad u(e) = (e - A)e^2,$$

аналогичном закону сохранения энергии при одномерном движении частицы с координатой $e = |p|^2$ и энергией $-\beta^2 B^2$ в потенциальном поле $\beta^2 u(e)$. Отсюда ясно, что изменение величины $|p(t)|^2 = e(t)$ удобно исследовать с помощью графика $u(|p|^2) = (|p|^2 - A)|p|^4$. Из него видно, что амплитуда $|p|$ испытывает колебания в границах $e_1 \leq |p|^2 \leq e_2$, определяемых условием $u(e_{1,2}) = -B^2$. Иными словами, происходят биения с перекачкой энергии из колебаний вдоль оси x в колебания вдоль оси y и обратно. Период τ таких биений может быть найден из уравнения (9.28):

$$\tau = \frac{2}{\beta} \int_{e_1}^{e_2} \frac{de}{\sqrt{-B^2 - u(e)}}.$$

Зависимость амплитуд $|p|$ и $|q|$ от времени может быть выражена через эллиптические функции. Отметим, что, в отличие от колебаний осцилляторов с линейной связью (см. Лекцию 4), в данном случае от начальных амплитуд и фаз зависит не только глубина модуляции биений, но и их период τ



3.0.14 P.10 Van der Pol Oscillator, Self-Oscillations

2. Осцилляторы Ван дер Поля и Рэлея

Наиболее просто реализацию этих требований можно увидеть в системах томсоновского типа, которые описываются уравнением $\ddot{x} + \varepsilon f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$ со слабой нелинейностью $\varepsilon \ll 1$. В этой лекции мы будем для простоты вычислений считать, что $\omega_0 = 1$. Поскольку нелинейность слабая, то автоколебания являются квазигармоническими (т.е. близкими к гармоническим). Это позволяет применять к описанию таких систем всю мощь методов усреднения. Подходящее к изложенным выше требованиям об обратной связи разложение функции имеет вид $f(x, \dot{x}) \approx (\alpha + \beta x^2 + \dots)\dot{x}$. В этом разложении отсутствует член $\sim$, потому что $x(t)$ - быстро осциллирующая функция и не даст вклада в амплитуду автоколебаний осциллятора. После очевидных замен получаем уравнение Ван дер Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, в общем виде описывающее квазигармонические автоколебания.

Однако такая форма уравнения не удобна для анализа возникновения автоколебаний из-за сингулярности, возникающей в точке бифуркации $\varepsilon = 0$. Поэтому более употребительна другая форма уравнения Ван дер Поля, не имеющая особенностей в точке бифуркации. После очевидных замен $\sqrt{\varepsilon}x \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow \lambda$ получаем уравнение вблизи точки бифуркации $\lambda = 0$

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0,$$

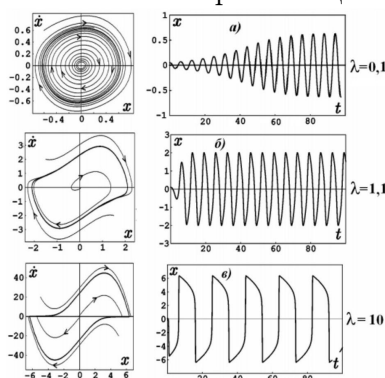
являющееся стандартной формой уравнения Ван дер Поля. Оно описывает множество автоколебательных систем самой различной природы, и, поэтому, служит

основной моделью для анализа квазигармонических автоколебаний. Заменой $\dot{y} = x/\sqrt{3}$ уравнение (10.1) приводится к уравнению Рэля, когда обратная связь осуществляется не по координате, а по скорости:

$$\ddot{y} + (\dot{y}^2 - \lambda) \dot{y} + y = 0$$

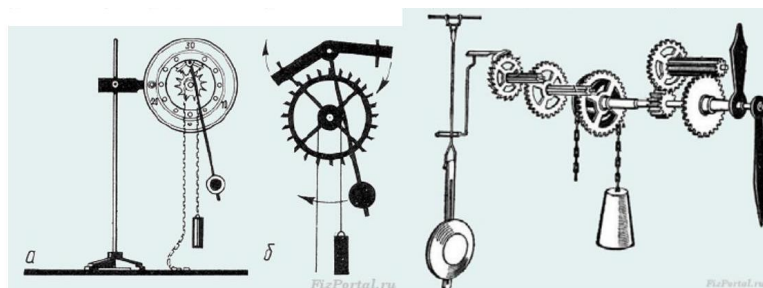
Поэтому принципиальной физической разницы между предсказаниями уравнений (10.1) и (10.2) нет. Уравнение Ван дер Поля (10.1) является универсальным. Оно доставляет нам самую простую модель бифуркации рождения предельного цикла. Именно поэтому в представлении медленно меняющейся амплитуды оно совпадает с уравнением Гинзбурга-Ландау - общей модели фазовых переходов и критических явлений. Теперь построим фазовый портрет Ван дер Поля.

Уравнение Ван дер Поля (10.1) имеет единственную особую точку $x = \dot{x} = 0$. Она является устойчивым фокусом при $-2 < \lambda < 0$, неустойчивым фокусом при $0 < \lambda < 2$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 2$. При $\lambda > 0$ на фазовой плоскости возникает предельный цикл, отвечающий режиму автоколебаний. Точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации Хопфа рождения цикла, а условие $\lambda > 0$ является условием самовозбуждения осциллятора. При $\lambda \ll 1$ автоколебания являются квазигармоническими. При $\lambda \gg 1$ автоколебания становятся существенно негармоничными, когда на фазовой кривой предельного цикла можно выделить участки быстрого и медленного изменения переменной x . Такие автоколебания называются релаксационными.



3. Квазигармонические автоколебания

Начнем с анализа квазигармонических автоколебаний, когда параметр λ в уравнении (10.1) мал $\lambda \ll 1$. Воспользуемся методом усреднения, который был придуман Ван дер Полем именно для этого случая. Его физическую сущность хорошо иллюстрирует следующий пример.



4. Метод усреднения в действии: парадокс спутника

(тут какое-то рассуждение особо ни о чем, мб когда-то посмотрю, но вроде как просто пустой параграф. быстро просмотрел его)

Спутник летит по круговой орбите на высоте h над поверхностью Земли. В результате трения в верхних слоях атмосферы спутник испытывает тормозящее действие воздуха. Энергия спутника слегка убывает виток за витком, его орбита при этом остается примерно круговой. Этот пример иллюстрирует основную идею метода усреднения. Как со временем изменяется радиус орбиты $r(t)$, скорость $v(t)$ и энергия $E(t)$ спутника? Энергия спутника E складывается из его кинетической и потенциальной энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r}$$

В нулевом приближении, в пренебрежении трением об атмосферу, орбита круговая, а скорость спутника связана с радиусом соотношением

$$\frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

Таким образом, в этом приближении энергия однозначно определяется как радиусом орбиты, так и его скоростью:

$$E = -\gamma \frac{mM}{2r} = -\frac{mv^2}{2}$$

Это в свою очередь связывает темпы потери усредненной таким образом энергии и радиуса и роста скорости:

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{r}}{r} = +2\frac{\dot{v}}{v}$$

Здесь $\dot{E} < 0$, а $\dot{E}/E > 0$, поскольку энергия спутника отрицательна. Спутник наматывает виток за витком и слегка теряет энергию.

Однако, нас ожидает сюрприз. Из (10.6) видно, что скорость тормозящегося спутника со временем растет. Под влиянием торможения об атмосферу происходит перераспределение кинетической и потенциальных энергий в общей энергии спутника. Трение об атмосферу приводит к тому, что спутник начинает потихоньку падать. По мере приближения к Земле его скорость и, следовательно, кинетическая энергия растут, а потенциальная энергия убывает. Полная энергия также уменьшается. Дело в том, что с уменьшением радиуса орбиты убывание потенциальной энергии идет быстрее, чем полной. А это, в свою очередь, приводит к росту кинетической энергии. Так возникает аэродинамический парадокс - разгон спутника при его торможении об атмосферу.

Чтобы найти зависимость скорости $v(t)$ и энергии $E(t)$ от времени, нужно рассмотреть физическую причину, сам механизм торможения. Он заключается в том, что аэродинамическая сила сопротивления равна $F = C_x \cdot S \cdot \rho v^2/2$, где S - мидель спутника, ρ - плотность атмосферы, $C_x \approx 1$ - коэффициент сопротивления. Тогда темп потери энергии есть $\dot{E} = -Fv$, минус связан с тем, что сила направлена против скорости. С учетом того, что $E = -mv^2/2$, получаем $mv\dot{v} = S\rho v^3$, или

$$\dot{v} = \frac{S\rho}{m}v^2.$$

Интегрируя (10.7) с учетом того, что в начальный момент скорость спутника равна первой космической $v(0) = v_0$, получаем закон роста скорости:

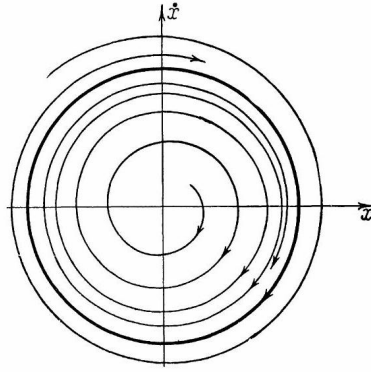
$$\frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_0} - \frac{S\rho}{m}t$$

Из (10.6) ясно, что радиус орбиты при этом убывает как $r(t) \propto v^{-2}(t)$.

Полученное соотношение верно только при слабом изменении скорости. Однако им можно воспользоваться для оценки характерного времени падения спутника τ по порядку величины:

$$\tau \approx \frac{m}{S\rho v_0}.$$

Если подставить характерные параметры спутника: массу $m \approx 10^3$ кг, мидель $S \approx 1\text{М}^2$ и скорость $v_0 \approx 8$ км/с, то полученная выше оценка $\tau \approx m/S\rho v_0$ при $\rho \approx 10^{-8}$ кг/м³ дает для времени падения спутника $\tau \approx$ месяц. Характерные цифры в этой ситуации таковы. Время жизни спутника быстро растет с высотой, что связано с резким разряжением атмосферы. Для высоты 150 км это примерно 1 сутки; 400 км - 1 год; 650 км - 100 лет.



5. Радиус предельного цикла. Бифуркация Хопфа

Уравнение Ван дер Поля - это уравнение маятника, в которое добавлено нелинейное трение, положительное при больших амплитудах и отрицательное при малых. В отличие от консервативного случая, фазовая кривая теперь не замкнута. А нелинейность трения приводит к ее стабилизации по амплитуде. В такой нелинейной неконсервативной системе возможно возникновение качественно нового явления - на фазовой плоскости возникает устойчивый предельный цикл. Чтобы узнать, приближается ли фазовая кривая к началу координат или уходит от него, рассмотрим изменение энергии невозмущенного трением осциллятора $E = \dot{x}^2/2 + x^2/2$ со временем. Поскольку энергия изменяется медленно, виток за витком, то можно воспользоваться методом усреднения.

Вычислим приращение энергии ΔE за один оборот (за период $T = 2\pi$), или, что то же самое, среднюю скорость изменения энергии $\overline{dE/dt}$. Нас главным образом будет интересовать знак этого приращения $\Delta E = (\overline{dE/dt}) \cdot T$ за период. Тогда из (10.1) получаем

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = (-x^2 + \lambda) \dot{x}^2,$$

что для средней скорости изменения энергии дает

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-x^2 + \lambda) \dot{x}^2 dt.$$

Таким образом, в нулевом приближении $dE^{(0)}/dt = 0$ и $x_0(t) = a \cos t$, а в первом приближении величина $dE^{(1)}/dt = \overline{dE/dt}$ дается выражением (10.11), в которое подставлено $x_0(t)$.

Поскольку в нулевом приближении осциллятор Ван дер Поля совершает гармонические колебания $x_0 = a \cos t$ с амплитудой a и скоростью $\dot{x} = -a \sin t$, из (10.11) получаем

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos^2 t + \lambda) \sin^2 t dt$$

Подставляя сюда $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$, $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ и учитывая то, что быстро осциллирующие косинусы вклада в (10.12) не дают, получаем

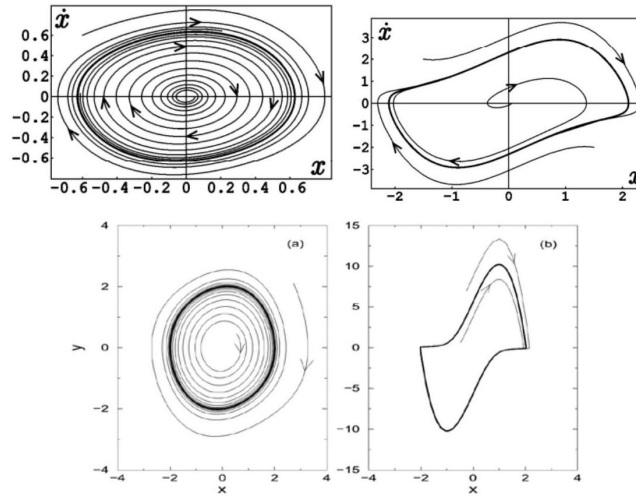
$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{a^2}{8} (-a^2 + 4\lambda).$$

Таким образом, темп изменения энергии меняет знак. Из (10.13) видно, что при $a > 2\sqrt{\lambda}$ фазовая кривая крутится и медленно падает, наматываясь на предельный цикл. При $a < 2\sqrt{\lambda}$ фазовая кривая раскручивается к этому же предельному циклу, также наматываясь на него. Таким образом, радиус предельного цикла равен $a = 2\sqrt{\lambda}$.

В общем случае, когда параметр λ проходит бифуркационное значение $\lambda_c = 0$, фазовый портрет системы существенным образом меняется. Его топология такова. При $\lambda < \lambda_c$ на фазовой плоскости осциллятора имеется единственное состояние равновесия - устойчивый фокус. При $\lambda > \lambda_c$ оно становится неустойчивым, и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл. Радиус этого предельного цикла (амплитуда автоколебаний) с ростом параметра λ увеличивается корневым образом $\sim \sqrt{\lambda}$. Такая бифуркация называется бифуркацией Хопфа, или бифуркацией рождения цикла. Поскольку амплитуда автоколебаний с ростом λ возникает и увеличивается плавно, говорят, что это мягкий режим самовозбуждения осциллятора. Для всех систем с мягким самовозбуждением закон роста радиуса предельного цикла $\sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ является универсальным. Это связано с топологическим характером перестройки фазового портрета осциллятора.

Релаксационные автоколебания

При сильной надкритичности ($\lambda \gg 1$) в уравнениях Ван дер Поля и Рэлея наблюдаются релаксационные автоколебания. В качестве примера удобнее рассмотреть уравнение Рэлея, поскольку это упрощает выкладки. Воспользуемся тем же приемом, который уже приводил нас к успеху в случае нелинейного осциллятора с сильной диссипацией (см. Лекцию 2). Он заключается в том, чтобы так преобразовать уравнение (10.2), чтобы в нем малый параметр стоял при старшей производной. Это позволяет разделить траекторию на фазовой плоскости на участки быстрых и медленных движений.



Для этого введем в (10.2) «медленное время» $\tau = t/\lambda$ и новую переменную $u = y/\lambda^{3/2}$. Тогда уравнение Рэлея (10.2) принимает вид

$$\varepsilon u'' + (u'^2 - 1) u' + u = 0$$

где штрихи обозначают дифференцирование по τ , а $\varepsilon = \lambda^{-2} \ll 1$ - малый параметр. Для приближенного решения (10.14), содержащего малый параметр при старшей производной, разделим быстрые и медленные движения. Для этого перепишем (10.14) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ \varepsilon v' &= (1 - v^2) v - u, \end{aligned}$$

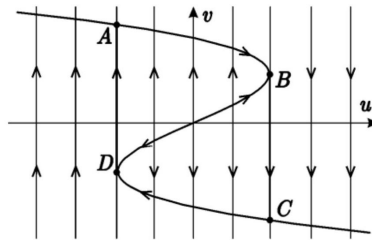
и построим качественный фазовый портрет такой системы.

Если правая часть второго уравнения (10.15) не близка к нулю, то система совершает быстрые движения. Это значит, что производная

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1 - v^2) v - u}{\varepsilon v}$$

велика, и фазовые траектории близки к вертикальным линиям. Если же фазовая траектория находится вблизи линии нуль-изоклины

$$u = v - v^3$$



то система совершает вдоль нее медленные движения. При этом в верхней полуплоскости (u, v) движение происходит слева направо, а в нижней наоборот. Таким образом, качественно фазовый портрет системы можно представить себе так. В начале координат имеется состояние равновесия типа неустойчивый узел. Кроме того, имеется устойчивый предельный цикл. Он состоит из двух симметричных участков кривой (10.17), соответствующих областям медленных движений, и двух вертикальных участков

быстрых движений, когда фазовая траектория скачком переходит с одной ветви медленного движения вдоль нуль-изоклины (10.17) на другую.

Период релаксационных автоколебаний T легко оценить, пренебрегая временем быстрых движений, т.е. вкладом участков быстрого «перескока» с одной ветви нуль-изоклины на другую. Тогда из первого уравнения (10.15) получим

$$d\tau = \frac{du}{v} = \frac{d(v - v^3)}{v}.$$

Интегрируя это выражение, для периода автоколебаний получаем

$$\tau = 2 \int_{v_A}^{v_B} \left(\frac{dv}{v} - 3v dv \right) = 2 \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{v_A}^{v_B},$$

где v_A и v_B - значение переменной v в точках перескока с ветви на ветвь нуль-изоклины (10.17). Значение v_B находим из условия $du/dv = 0$, что дает $v_B = 1/\sqrt{3}$. Вторым предел v_A есть корень уравнения

$$v - v^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Учитывая, что $-v_B = -1/\sqrt{3}$ является кратным корнем этого уравнения по определению, то уравнение (10.20) легко факторизовать $(v - v_A)(v + 1/\sqrt{3})^2 = 0$. Отсюда находим второй корень $v_A = 2v_B = 2/\sqrt{3}$. Теперь нетрудно определить период автоколебаний. Возвращаясь к исходному, обычному, времени, получаем

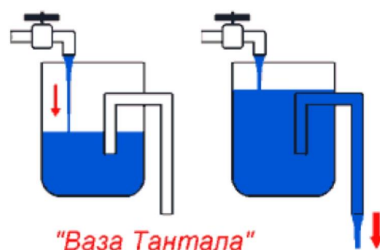
$$T = 2\lambda \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \lambda(3 - 2\ln 2).$$

Из (10.21) видно, что период релаксационных автоколебаний возрастает как $T \sim \lambda$. Что касается амплитуды этих автоколебаний, то она возрастает как $\sim \lambda^{3/2}$. Временная развертка автоколебаний представляет собой пилообразную кривую, изменяющуюся между v_A и v_B .

7. Кубок Тантала - налитие воды как пример

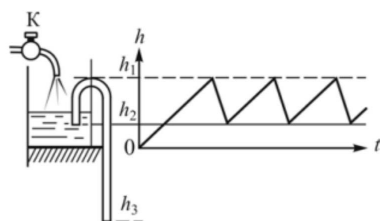
(??? не думаю, что это важно)

В качестве яркого примера системы с релаксационными автоколебаниями рассмотрим кубок Тантала. Это устройство является близким родственником сливного бачка унитаза. Гидравлическое устройство с сифоном, которое называют кубок Тантала, действительно соответствует древнегреческому мифу. В стакан с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 наливается вода со скоростью v . Через край стакана свешивается сифон, так, что срез внутреннего отрезка трубки находится на высоте h_2 , а верхний загнутый край трубки расположен на высоте h_1 . Сечение трубки сифона таково, что скорость опорожнения стакана значительно превышает скорость наполнения vS . Опишем фазовый портрет системы и найдем период установившихся автоколебаний. Будем считать, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.



Сосуд, в который вмонтирована согнутая трубка, заполняется с постоянной скоростью из крана водой. Уровень заполнения сосуда растет с течением времени линейно. Как только уровень воды достигнет высоты верхнего загнутого края трубки h_1 , срабатывает система сифона и уровень воды в сосуде быстро падает до значения h_2 , после чего сосуд снова начинает заполняться водой. Далее процесс периодически повторяется. Именно таким способом боги заставляли Тантала мучиться от жажды.

Скорость опорожнения сосуда через сифон значительно превышает скорость его наполнения через кран. Таким образом, предельный цикл автоколебаний состоит из быстрой и медленной фаз. Именно поэтому такие автоколебания называют релаксационными. В выбранном приближении период автоколебаний примерно равен $T \approx (h_1 - h_2) S_1 / v S_2$. Поправка к этой формуле δT возникает за счет учета конечности времени быстрого опорожнения стакана. Из формулы Торричелли получаем $\delta T = h S_2 / \sqrt{2g(H - h)} S_3$.



3.0.15 P.11. Synchronization of Oscillations

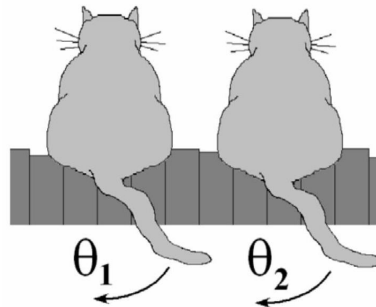
(мб больше раздел про это сделаю, пока не занимаюсь теорией)

Overview of phenomena of synchronization of oscillations

Рассмотрим автоколебательную систему под действием внешней гармонической силы, частота которой близка к частоте автономных автоколебаний системы. В этой ситуации наблюдается замечательное явление - синхронизация. В определенном интервале частоты внешней силы автоколебания системы синхронизируются по частоте с внешней силой. Упомянутый частотный интервал тем шире, чем интенсивней воздействие. Этот яркий эффект наблюдается в системах самой различной природы: радиотехнических и электронных устройствах, лазерах, механических системах, часах, колебательных химических реакциях, биологических сообществах и т.д. Возникает интригующий вопрос, кто кому навязет свою частоту, кто победит в этой конкуренции: автоколебание или внешняя сила?

Явление синхронизации известно очень давно. Синхронизация состоит в том, что несколько объектов, совершающих при отсутствии взаимодействия автоколебания с различными частотами, при слабом взаимодействии начинают колебаться с одинаковыми или соизмеримыми частотами и определенными фазовыми соотношениями. Физический механизм этого явления заключается в следующем. Периодические автоколебания в отсутствие внешнего воздействия характеризуются

фазой, значения которой равно допустимы. В результате периодического внешнего воздействия происходит сдвиг фаз автоколебаний, который накапливается после каждого периода воздействия. В результате такого дрейфа фазы собственных колебаний системы относительно внешнего воздействия могут возникать точки, отвечающие смене направления дрейфа относительной фазы. Эти точки являются положениями равновесия фазы. Если это равновесие устойчиво, то относительная фаза там и останется: происходит захват фазы. Это и есть режим синхронизации.



Ясно, что роль внешнего периодического воздействия может осуществлять другая автоколебательная система, слабо связанная с первой. В результате может возникать режим синхронных автоколебаний двух систем с одной и той же частотой. Этот эффект взаимной синхронизации впервые описан Гюйгенсом для механических часов, закрепленных на общем основании. Согласно легенде, это явление использовалось недобросовестными часовщиками для рекламы своей продукции в витринах часовых магазинов.

Поскольку автоколебательные системы могут демонстрировать не только периодические, но и стабильные хаотические режимы, то возможно расширенное проявление синхронизации. А именно, динамика второй системы может воспроизводить также и хаотические черты динамики первой. В этом случае можно говорить о генерации синхронного хаоса. Приведем наиболее известные экспериментальные факты и примеры синхронизирующихся автоколебательных систем.

2. Отклик осциллятора Ван дер Поля на гармоническую силу

Рассмотрим явление синхронизации подробнее и попробуем описать его простой моделью, дающей количественное описание этого фундаментального явления. Сначала будем моделировать синхронизирующее воздействие на осциллятор Ван дер Поля внешней гармонической силой

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x = f \sin \omega t$$

где f - амплитуда, ω - частота внешней силы, отнесенная к частоте малых автономных колебаний осциллятора Ван дер Поля. Здесь возникает своеобразная конкуренция между двумя эффектами: автономными автоколебаниями и вынужденными колебаниями осциллятора Ван дер Поля.

В Лекции 10 мы выяснили, что автономные автоколебания в (11.1) при $f = 0$ происходят с частотой 1 и амплитудой $2\sqrt{\lambda}$. В Лекции 3 мы убедились, что вынужденные колебания в (11.1) при $\lambda = 0$ происходят с частотой ω и амплитудой $f/|\omega^2 - 1|$. Какой из эффектов победит в этой конкуренции? Кто из них кому навязает свою частоту и амплитуду? Для ответа на этот вопрос нужно решить уравнение (11.1).

Если система находится вблизи порога бифуркации Хопфа возникновения автоколебаний ($\lambda \ll 1$), а частота воздействия близка к частоте автономных колебаний

($\omega \approx 1$), то для решения (11.1) можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд, уже приводившему нас к успеху в случае уравнения Матье (см. Лекцию 7).

Используем следующий вариант этого метода. Будем искать нулевое приближение решения (11.1) в комплексном виде $x(t) = \text{Re}(a(t) \exp(i\omega t))$ или

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}a^*(t)e^{-i\omega t},$$

где $a(t)$ - медленно изменяющаяся амплитуда. Как обычно, на комплексную амплитуду $a(t)$ удобно наложить дополнительное условие (см. Лекцию 7):

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^*e^{-i\omega t} = 0,$$

убирающее переопределенность решения (11.2). Далее действуем так, как это было описано в Лекции 7. Вычисляем $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ с учетом (11.3) и подставляем их в (11.1). Далее проведем усреднение за период, помня, что комплексная амплитуда $a(t)$ - медленно меняющаяся функция времени. В результате приходим к укороченному уравнению Ван дер Поля (11.1) для отклика на гармоническое воздействие:

$$\dot{a} + i\frac{\omega^2 - 1}{2\omega}a = \frac{\lambda a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} - \frac{f}{2\omega}.$$

Хотя уравнение (11.4) является приближенной формой (11.1) вблизи порога бифуркации, его можно рассматривать как самостоятельный объект исследования, непосредственно задающего определенную автоколебательную систему с периодическим внешним воздействием. Вблизи бифуркации Хопфа (11.4) представляет собой уравнение общего вида, поскольку его правая часть соответствует функционалу Гинзбурга-Ландау в теории фазовых переходов (????). Таким образом, $a(t)$ играет роль комплексного параметра порядка для этой бифуркации.

Далее удобно обезразмерить уравнение (11.4), введя новые время τ , безразмерную амплитуду b , параметры расстройки Δ и внешнего воздействия ε :

$$\tau := \lambda t/2, \quad b := a/2\sqrt{\lambda}, \quad \Delta := (\omega^2 - 1)/\lambda\omega, \quad \varepsilon := f/2\omega\lambda^{3/2}$$

Тогда в новых переменных (11.4) имеет вид

$$\dot{b} + i\Delta b = b - |b|^2 b - \varepsilon$$

где точка - дифференцирование по новому времени, ε - обезразмеренная амплитуда внешней силы, а Δ характеризует отстройку частоты воздействия от частоты автономных автоколебаний системы. Комплексную амплитуду b удобно представить в виде

$$b = r \exp(i\varphi).$$

Подставляя b в таком виде в (11.5) и отделяя действительную и мнимую части, получаем вместо (11.5) систему двух уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

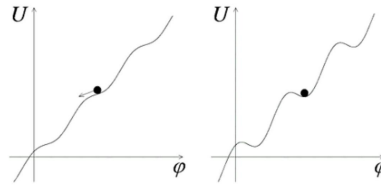
$$\begin{aligned} \dot{r} &= r - r^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \frac{\varepsilon}{r} \sin \varphi. \end{aligned}$$

3. Уравнение Адлера

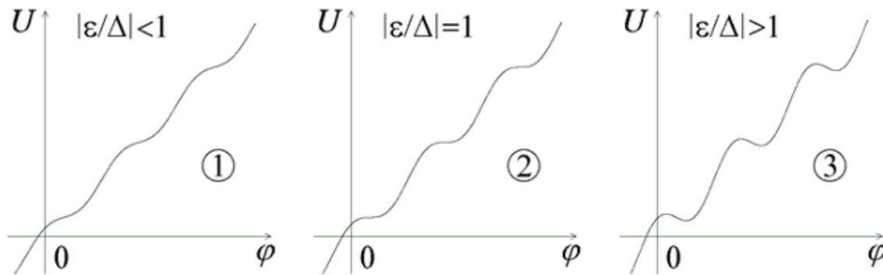
Для того чтобы продвинуться дальше в аналитическом исследовании системы уравнений (11.6), необходимо сделать дополнительные упрощения задачи, кроме тех, что были сделаны выше. Предположим дополнительно, что амплитуда воздействия $\varepsilon \propto f/\lambda^{3/2}$ невелика. Для применимости использованного выше метода медленно меняющихся амплитуд обе величины f и $\lambda^{3/2}$ должны быть малыми. Поэтому условием применимости дальнейших приближений будет двойное неравенство $f \ll \lambda^{3/2} \ll 1$. Тогда в нулевом порядке по ε из первого уравнения (11.6) найдем амплитуду установившихся колебаний $r = 1$. При подстановке ее в правую часть второго уравнения (11.6) достаточно ограничиться этим приближением. В результате, в первом приближении по ε получаем замкнутое уравнение для фазы колебаний системы φ :

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi$$

которое принято называть уравнением Адлера.

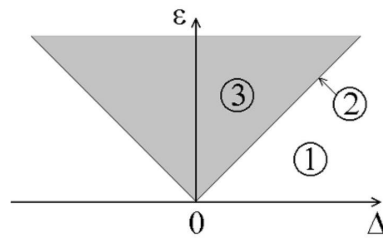


Вводя потенциал $U(\varphi) = \varphi\Delta + \varepsilon \cos \varphi$, уравнение (11.7) можно привести к виду уравнения движения передемпфированной частицы $\dot{\varphi} = -\partial U/\partial \varphi$. Форма потенциальной кривой $U(\varphi)$ зависит от отношения ε/Δ . При $|\varepsilon/\Delta| < 1$ потенциал $U(\varphi)$ монотонно зависит от φ . При $|\varepsilon/\Delta| > 1$ потенциальная функция немонотонна и имеет периодические максимумы и минимумы. Динамику фазы можно наглядно представить как вязкое скольжение частицы по потенциальному профилю $U(\varphi)$. В первом случае $|\varepsilon/\Delta| < 1$ имеет место однонаправленное движение частицы, скорость которой осциллирует. Во втором случае $|\varepsilon/\Delta| > 1$ частица соскальзывает в один из минимумов $U(\varphi)$. Фаза колебаний системы φ захватывается и перестает меняться относительно фазы воздействия. Это и есть режим синхронизации.



4. Язык Арнольда

Таким образом, синхронизация достигается в определенном интервале значений расстройки $-\varepsilon < \Delta < \varepsilon$. Это полоса синхронизации, ширина которой увеличивается (в данном приближении) прямо пропорционально амплитуде воздействия. Область в форме треугольника на плоскости параметров (Δ, ε) , отвечающая синхронизации, называется языком Арнольда.



Итак, внутри треугольного языка Арнольда установившийся режим системы - это синхронизация с внешним возмущением, которому отвечает устойчивая неподвижная точка уравнения (11.7). В режиме синхронизации амплитуда колебаний постоянна $r = 1$, частота равна частоте внешнего воздействия ω , а фаза φ фиксирована. Таким образом, в соревновании автономных автоколебаний с вынужденными колебаниями «выигрыш» распределяется следующим образом. Синхронизированные автоколебания происходят на частоте вынуждающей силы ω , но с амплитудой автономных автоколебаний $2\sqrt{\lambda}$. Здесь в конкуренции внешнее воздействие навязывает свою частоту автономным автоколебаниям, а автономные автоколебания сохраняют радиус своего предельного цикла. Результатом соревнования является «ничья». Вне языка Арнольда синхронизация отсутствует и возникают сложные колебания, близкие к хаотическим.

5. Взаимная синхронизация двух автогенераторов

(тут какая-то болтовня, возможно, удалю все это, не уверен, что тут что-то важное написано, но пока не прочитывал)

Синхронизировать друг друга могут также два взаимодействующих автогенератора. Задача о динамике двух связанных автогенераторов является ключевой для объяснения явления синхронизации. В отсутствие связи между автогенераторами каждый из них работает автономно, на своей частоте. При включении связи картина совместных колебаний существенно зависит от характера связи (реактивной или диссипативной) и расстройки генераторов по частоте. Простейшей такой системой, представляющей собой универсальную модель синхронизации, являются два связанных автогенератора. С высокой степенью общности и универсальности взаимодействие любых автогенераторов можно моделировать двумя осцилляторами Ван дер Поля. Это связано с тем, что осциллятор Ван дер Поля является простейшей базовой моделью, демонстрирующей бифуркацию Хопфа. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать автогенераторы и осцилляторы Ван дер Поля как синонимы.

При синхронизации два связанных автогенератора проявляют весьма разнообразную картину поведения. Это биения и взаимный захват осцилляторов при расстройке их парциальных частот. В случае диссипативной (резистивной) связи между автогенераторами возможно «гашение» (гибель) колебаний. При этом осцилляторы должны быть достаточно отстроены друг от друга по частоте. В противном случае диссипация не сможет скомпенсировать захват одного автогенератора другим и возникнет синхронизация. В случае реактивной связи (индуктивной и емкостной) этот эффект невозможен, для этого типа связи наблюдается бистабильность как при синфазной, так и противофазной синхронизации.

Таким образом, принципиально важным является характер связи автогенераторов. Опишем эту связь подробнее. Она может быть диссипативной (связь через скорости изменения переменных) или реактивной (связь через сами переменные). Если речь идет об электрических цепях, то первый случай реализуется сопротивлением (резистивная связь), а второй осуществляется через реактивный элемент (емкостная связь). При диссипативной связи разность фаз автогенераторов описывается уравнением Адлера. При небольших параметрах константы связи и расстройки происходит захват колебаний

одного автогенератора другим. При этом устойчивым оказывается режим синфазной синхронизации, а противофазный режим неустойчив. На плоскости расстройка-константа связи соответствующая область представляет собой треугольный язык Арнольда.

В случае диссипативной связи двух автогенераторов возникает характерный эффект гибели («гашения») колебаний. Он состоит в том, что положение равновесия системы в начале координат становится устойчивым и колебания затухают. Это явление пороговое и возникает при достаточно большой частотной расстройке генераторов. Кроме того, при неодинаковой накачке генераторов возникает явление широкополосной синхронизации. В этом случае на плоскости расстройка-константа связи возникает дополнительная полоса синхронизации, неограниченная по расстройке, являющаяся продолжением языка Арнольда.

Реактивная связь приводит к более сложной картине. Область синхронизации представляет собой язык Арнольда с более острым основанием. Кроме того, возникает фазовая бистабильность, когда возможно устойчивое сосуществование как синфазного, так и противофазного режимов. Еще один важный пример доставляет нам активная связь между автогенераторами. Этой ситуации отвечает отрицательный знак параметра связи между ними. Для этого необходимо включение в цепь отрицательного сопротивления, например, усилителя. В лазерной физике это связь лазеров через активную среду. В этом случае устойчивыми являются противофазные совместные колебания, а синфазные оказываются неустойчивыми.

Выше мы отметили, что различают синхронизацию взаимную и синхронизацию вынужденную. В первом случае речь идет о взаимодействующих генераторах, а во втором о возбуждении генератора внешней силой. Несмотря на различие в физической постановке, в рамках фазового приближения на языке уравнения Адлера обе эти задачи оказываются эквивалентными. При этом во втором случае роль константы связи выполняет нормированная амплитуда внешней силы.

Эффекты синхронизации и гашения колебаний наиболее просто проявляются в системе двух диссипативно связанных автогенераторов Ван дер Поля. Увеличение константы связи и расстройки частот приводит к подавлению автоколебаний в каждом из автогенераторов. При определенном соотношении между парциальными частотами автогенераторов наблюдается их взаимная синхронизация, играющая важную роль в приложениях. В определенной области параметров может осуществляться режим конкурентного подавления. При достаточно большой нелинейной связи между автогенераторами колебания одного из них могут быть полностью подавлены. Внутри области синхронизации амплитуды автоколебаний обоих автогенераторов одинаковы и достигают максимального значения при нулевой расстройке по частоте $\omega_1 = \omega_2$. Вне линии нулевой расстройки амплитуда автоколебаний одного из автогенераторов больше другого.

Это значит, что воздействие на первый автогенератор со стороны второго более сильное, чем обратное воздействие. В этом случае говорят, что первый автогенератор является захваченным, а второй - захватывающим. При этом амплитуда автоколебаний первого автогенератора больше, а амплитуда второго автогенератора меньше, чем амплитуды их автономных автоколебаний. Частота установившихся синхронных автоколебаний автогенераторов расположена между парциальными частотами автономных автогенераторов ω_1 и ω_2 , ближе к частоте захватывающего автогенератора. Теория синхронизации двух автогенераторов предсказывает также такие эффекты, как возможность взаимного захвата и режима биений при изменении частотной расстройки или величины константы связи.

6. Фазовая динамика двух связанных осцилляторов Ван дер Поля

Ничему из того, что стоит знать, научить невозможно. Оскар Уайльд

Фазовые уравнения. Рассмотрим систему двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля. Дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействие таких генераторов, имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} + (y^2 - \lambda)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Здесь x, y - координаты осцилляторов, λ - параметр возбуждения автономных осцилляторов, $\Delta/2$ - частотная расстройка осцилляторов, μ - коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора Ван дер Поля принята за единицу.

Если параметр возбуждения мал $\lambda \ll 1$, а также мала частотная расстройка $\Delta \ll 1$, то для анализа уравнений (11.8) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. С этой целью представим динамические переменные (координаты осцилляторов) в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}$$

Здесь $a(t), b(t)$ - комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем полагать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим обычные для метода медленно меняющихся амплитуд дополнительные условия (см. Лекцию 7):

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0.$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^*e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} + b^*e^{-it}).$$

Подставим соотношения (11.9)-(11.11) в уравнения (11.8), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение по периоду для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям для двух осцилляторов Ван дер Поля:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ \dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b - i\Delta b - \mu(b - a).\end{aligned}$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}a', \quad b = \sqrt{\lambda}b', \quad t = \frac{t'}{\lambda}, \quad \mu = \lambda\mu', \quad \Delta = \lambda\Delta'.$$

Для сокращения записи штрих у нормированных величин в дальнейшем будем опускать. Теперь новые отнормированные переменные и параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее $a = Re^{i\psi_1}, b = re^{i\psi_2}$, где R, r - действительные амплитуды, а $\psi_{1,2}$ - фазы осцилляторов Ван дер Поля. Тогда из (11.12), (11.13) получаем

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ \dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - 2r), \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{r}{R}\mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= -\Delta + \frac{r}{R}\mu \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}$$

В связи с малостью $\lambda \ll 1$ и $\Delta \ll 1$, в уравнениях (11.14) для фаз считаем, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных предельных циклов $R = r = 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= -\Delta + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}$$

Размерность системы (11.15) может быть понижена на единицу, если ввести относительную фазу осцилляторов $\varphi = \psi_1 - \psi_2$. Для относительной фазы получаем уравнение Адлера:

$$\dot{\varphi} = \Delta - 2\mu \sin \varphi,$$

Аналогичное (11.7). Это фазовое уравнение описывает взаимодействие автоколебаний двух связанных осцилляторов Ван дер Поля.

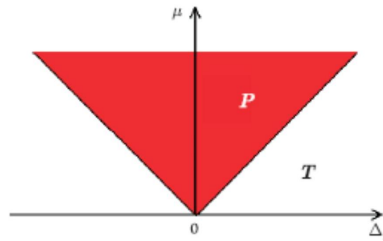
7. Язык Арнольда для двух связанных осцилляторов

Итак, (11.16) - это классическое уравнение Адлера (11.7), которое описывает фазовую динамику двух связанных автогенераторов. Оно показывает, что возможно два различных режима совместных колебаний: захват относительной фазы при $|\Delta| < 2\mu$ и режим хаотических биений при $|\Delta| > 2\mu$. На плоскости параметров частотная расстройка-константа связи (Δ, μ) указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда. Основание языка расположено в точке $\Delta = 0$, что отвечает резонансному условию в системе, когда собственные частоты первого и второго осцилляторов совпадают. При $\Delta \neq 0$ синхронизация осцилляторов уже не может происходить при сколь угодно малой константе связи. В фазовом приближении этими двумя типами поведения и исчерпываются все возможности для двух связанных осцилляторов Ван дер Поля.

Захват двух осцилляторов происходит на их центральной частоте $1 + \Delta/4$. Действительно, в наших обозначениях в этом случае скорость изменения относительной фазы равна нулю $\dot{\varphi} = 0$, так что $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$. Тогда из (11.16) и первого уравнения (11.15) получаем для частоты захвата

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{\Delta}{4}$$

что равно среднему арифметическому собственных частот первого и второго осцилляторов.



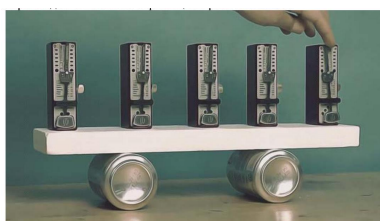
С физической точки зрения важна наблюдаемая частота колебаний. Она может быть вычислена как среднее значение скорости изменения фазы $\omega = \langle \dot{\psi} \rangle$. Если осцилляторы не связаны, то из (11.15) находим, что их собственные частоты ω_1 и ω_2 в принятых обозначениях и нормировке равны 1 и $1 + \Delta/2$. Это соответствует исходным уравнениям (11.8). Если осцилляторы связаны, то их совместная частота генерации равна

$$\omega = 1 + \frac{\Delta}{4}$$

8. Заключительные замечания

Подведем итоги, касающиеся рассмотренного в лекции фундаментального явления - синхронизации. Синхронизация весьма разнообразна в своих проявлениях. Синхронизация внешней силой наблюдается в системах самой разной природы: радиотехнических и электронных устройствах, лазерах, механических и акустических системах, в колебательных химических реакциях, биологических сообществах и т.д. Кроме синхронизации на частоте возбуждения, может возникать синхронизация на гармониках и субгармониках, когда частоты кратны друг другу или находятся в рациональном отношении.

Механизм синхронизации заключается в следующем. Автономные автоколебания происходят с равно допустимыми значениями фазы. Воздействие на автоколебательную систему приводит к сдвигу этой фазы. Если воздействие периодическое, то сдвиг фазы может накапливаться, фаза оказывается сдвинутой на значительную величину. При этом фаза собственных колебаний системы имеет возможность дрейфовать относительно фазы внешнего воздействия в разные стороны. В итоге система приходит в стационарную точку, отвечающую смене направления дрейфа фазы, и там и остается. Таким образом, процесс синхронизации всегда сопровождается захватом и фиксацией фазы колебаний.



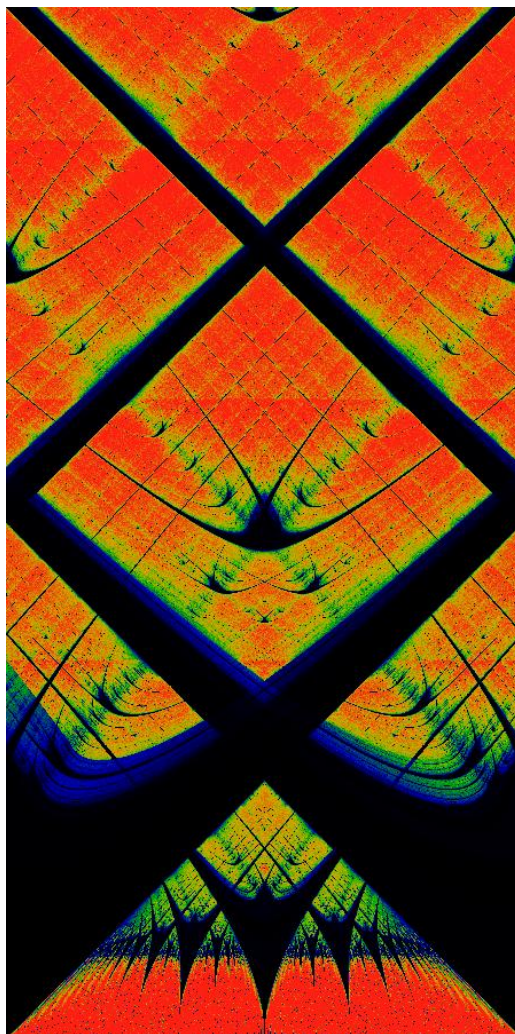
Помимо внешнего воздействия, автоколебательная система может синхронизироваться с другой автоколебательной системой. Они осуществляют внешнее воздействие друг на друга. Результатом может являться установившийся режим, в котором колебания обеих систем происходит синхронно, с одной и той же частотой. Возникает эффект взаимной синхронизации связанных систем. Если совокупность многих связанных автоколебательных элементов рассматривать как единую систему, то их взаимную синхронизацию можно рассматривать как внутреннюю синхронизацию автоколебательных мод составной системы.

Возможна также синхронизация хаотических автоколебательных систем. В этом случае происходит синхронизация автоколебательных систем внешним шумом. Кроме того, может возникать взаимная синхронизация хаотических автоколебательных систем. Также возможна синхронизация невзаимодействующих систем в присутствии воздействующего на них идентичного шумового сигнала. В обоих случаях происходит генерация синхронного хаоса, нового явления, перспективного для приложений.

Языки Арнольда (????)

(пока слабо ориентируюсь, где они нужны?)

(там графики есть, потом посмотрю)

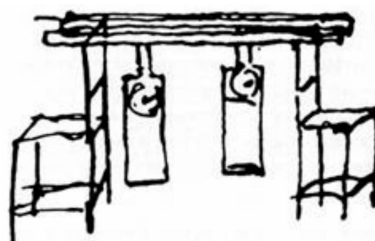


(см. вики)

Примеры синхронизации

Синхронизация маятников часов.

Первое описание явления взаимной синхронизации часов принадлежит Христиану Гюйгенсу. Он обнаружил, что пара часов, ходивших по-разному, самосинхронизировалась, когда их вместо стены прикрепляли к легкой балке. Это явление необычайно его поразило. «Двое часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Колебания обоих маятников так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушалось это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Колебания маятника передаются балке, и маятники сами согласуют ход обоих часов между собой».



Синхронизация органных труб.

Явление синхронизации акустических систем обнаружил Рэлей. Он заметил, что две параллельные органные трубы с расположенными напротив отверстиями при достаточно малой частотной расстройке звучат в унисон. Каждая из органных труб представляет собой автоколебательную систему. Если их частоты различаются мало, то обе трубы начинают издавать звук одной и той же частоты, т.е. происходит взаимная синхронизация обеих автоколебательных систем. Иногда это звучание в унисон выражается в том, что звук полностью исчезает: каждая из труб звучит, а вместе с тем никакого суммарного звука нет. Это соответствует тому, что трубы генерируют звук в точности одинаковых частот, но противоположных фаз. Аналогичное явление было обнаружено Рэлеем и для двух камертонов с электромагнитным возбуждением, связанных между собой либо электрически, либо механически при помощи упругой нити или посредством резонаторного ящика.

Синхронизация вращений электрогенераторов.

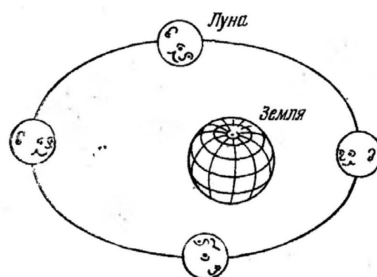
Важное прикладное значение явления синхронизации стало ясно при анализе работы нескольких электрогенераторов переменного тока в составе одной электрической сети. С появлением первых электростанций стали происходить разрушительные аварии. При работе на одну и ту же нагрузку фазы генерируемых напряжений не совпадали, и вместо того, чтобы совместно посылать ток в общую сеть, электрогенераторы пропускали его друг через друга и сжигали свои обмотки. В этой безнадежной ситуации выручило явление синхронизации. При не очень значительных расстройках частот электрогенераторы сами синхронизируют друг друга и вращаются согласованно с очень большой точностью.

Синхронизация при радиоприеме.

Явление синхронизации колебаний радиоприемника внешним слабым радиосигналом лежит в основе приема радиосигналов. Исследование этого явления обнаружило, что синхронизация генератора Ван дер Поля может происходить при сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия, если только расстройка частот также достаточно мала.

Синхронизация движений планет.

Явление синхронизации движений небесных тел было замечено сначала у планет Солнечной системы в виде удивительных связей между периодами их обращений и вращений. Объяснение этих непростых связей не завершено и в настоящее время. Закономерности состоят в наличии простых целочисленных соотношений между частотами орбитальных и собственных вращений планет. Кратность средних угловых скоростей вращений и обращений планет является ярким примером такой синхронизации.



Простейшая закономерность такого рода известна с древности. Луна обращена к Земле всегда одной стороной своей поверхности, что свидетельствует о точном равенстве средних угловых скоростей Луны в осевом и орбитальном движении (резонанс 1:1). Кассини впервые сформулировал законы вращения Луны, отражающие не только указанную закономерность, но и синхронизацию того же типа между движением оси вращения Луны и возмущенной прецессией ее орбиты. В настоящее время известно много таких соотношений между наблюдаемыми «средними движениями» небесных тел. Так, например, период обращения Меркурия (≈ 88 суток) относится к периоду его вращения (59 суток) как 3:2, а угловые скорости обращения Земли и Венеры ω_z и ω_v связаны с угловой скоростью вращения Венеры вокруг своей оси ω соотношением $\omega = 4\omega_v - 5\omega_z$. Это значит, что в моменты, когда центры Солнца, Земли и Венеры лежат на одной прямой линии, Венера всегда обращена к Земле одним и тем же участком своей поверхности. Такие моменты противостояния повторяются через каждые полтора года. Эмпирические законы Кассини соответствуют устойчивым решениям нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих в достаточно хорошем приближении движение планет.

Синхронизация сердечных сокращений.

Ритмичным сокращениям своего сердца мы обязаны синхронизации. Нарушение нормальной синхронизации сокращений мышечных волокон сердца ведет к аритмиям, в том числе к такой опасности, как фибрилляция. Сердце представляет собой связанные между собой генераторы Ван дер Поля, образующие проводящую возбудимую среду. При фибрилляциях по сердечной мышце начинают бегать беспорядочные волны сокращений мышц вместо синхронных ритмичных их сокращений.

Синхронизация биологических объектов.

Явления синхронизации характерны также для биологических объектов - от коллективов клеток до коллективов животных. Примерами, с одной стороны, могут служить синхронные колебания ядер клеток злокачественных опухолей, синхронизация при работе мышечных тканей, при передаче нервного возбуждения по нейронам и т.п. С другой стороны, это согласованное мерцание света, испускаемого несколькими жуками-светляками, синхронные взмахи крыльев при полете стаи птиц и плавников при движении косяка рыб. Синхронизация встречается также и в поведении людей в коллективах - примерами могут служить скандированные аплодисменты большой аудитории, а также хождение группы людей «в ногу». Явления синхронизации в биологических системах объясняются классическими моделями релаксационных автогенераторов Ван дер Поля и моделями систем «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры (см. Лекцию 1).

Об истории изучения синхронизации

О наблюдениях Гюйгенса

(укажу потом их тоже.)

3.0.16 P.12 Stochastic Resonance

(это по сути в кинетике написано, сюда вряд ли буду писать, но пусть побудет раздел, мб и напишу что-то, мб перенесу в дополнения это.)

3.0.17 P.13. Quantum Oscillations (!!!!!!)

(это в квантовой оптике написано, ну или в кинетике тоже, сюда вряд ли буду писать, но пусть побудет раздел, мб и напишу что-то, мб перенесу в дополнения это.)

Part III

Problems

4 Типичные задачи

(мб добавлю Пуховские задачи, просто они скорее по физике, а не по теории колебаний. но они крутые, так что потом пару разделов про них сделаю.)

4.1 Description of Typical Oscillations (???)

4.1.1 Problems about Linear Oscillator

Пухов-л3-з Заряженный мыльный пузырь.

Мыльный пузырь с массой $m = 0,01$ г и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0,01$ Н/м выдут через тонкую металлическую трубку, открытую с обоих концов. Трубка соединена с электростатическим генератором так, что заряд пузыря поддерживается постоянным $q = 5,4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Будет ли устойчиво равновесие пузыря? Если да, то чему равен период его малых колебаний? Оцените скорость, с которой разлетятся брызги, если заряд пузыря внезапно увеличить в десять раз?

Solution

(нужно доучивать термач про пов натяжения!!! встречается все-таки эта тема, 3 часа на ее додумывание, так оцениваю.)

Пухов-л3-з Маятник Жуковского.

Однородная доска массой m лежит на двух одинаковых вращающихся цилиндрах. Цилиндры горизонтальны, расстояние между их осями l , коэффициент трения между доской и цилиндрами k . Опишите движение доски при всех возможных направлениях вращения цилиндров.

Solution

(колебаться будет. механику доучу сперва!)

Пухов-л3-з Время удара мяча о стену.

Оцените время τ соударения футбольного мяча со стенкой. Масса мяча $m \approx 300$ г, радиус $R \approx 15$ см, избыток давления в камере $P \approx 1$ атм, скорость $v \approx 10$ м/с перпендикулярна стене. Оцените скорость мяча, при которой его деформация не будет малой.

Пухов-л3-

Задача Раби про часы. Раби очень гордился точностью хода своих наручных механических часов. Однажды, поднявшись на гору для эксперимента с космическими лучами, он обнаружил, что его часы стали несколько спешить. Раби предложил эту задачу Ферми, который тотчас дал объяснение этому эффекту и оценил порядок погрешности хода часов. А как быстро справитесь с этим Вы?

Пухов-л3-

Лэмбовский сдвиг. В модели Томсона атомарный электрон массы m совершает колебания в потенциале $m\omega^2 x^2/2$. Из-за потерь на излучение на него действует сила радиационного торможения $2e^2 \ddot{x}/3c^3$, возникающего из-за взаимодействия электрона с собственным полем излучения. Вычислите ширину линии γ , лэмбовский сдвиг $\Delta\omega$ и добротность Q такого осциллятора $m = 10^{-27}$ г, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СС, $\omega = 10^{15}$ с $^{-1}$.

Пухов-л3-з Жертвоприношение.

В шахту, прорытую по диаметру Земли ($R = 6400$ км, $g = 10$ м/с²), кинули студента.

а) Опишите его движение в пренебрежении сопротивлением воздуха, сравните с движением спутника, летящего над Землей по низкой круговой орбите.

б) Что будет, если мы учтем сопротивление воздуха в шахте в предположении, что её стенки теплоизолированы?

Пухов-л3-з Атомно-силовой микроскоп.

Датчик (игла) микроскопа укреплен на кантилевере и может колебаться в вертикальном направлении над исследуемой поверхностью. Его смещение z описывается уравнением $m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F \cos \omega t + f(h+z)$, где $m = 10^{-9}$ г - масса датчика, $k = 1$ Н/М - коэффициент упругости кантилевера, $b/m = 10^3$ с⁻¹ - удельный коэффициент затухания, ω - частота гармонической силы, с которой на кантилевер действует пьезоэлемент, f - сила, с которой датчик взаимодействует с поверхностью, расстояние до которой h . Это расстояние удобно измерять по слабому сдвигу резонансной частоты датчика.

а). Острие датчика несет электрический заряд $6e$. При сканировании над местом локализации электрона с зарядом e был зафиксирован максимальный сдвиг резонансной частоты $\Delta\omega = 20$ с⁻¹.

б). При сканировании над местом локализации атома с дипольным моментом 10 Дб, параллельным поверхности, был зафиксирован максимальный сдвиг резонансной частоты $\Delta\omega = 10$ с⁻¹. Принимая во внимание высокую добротность датчика $b^2 \ll km$ и малость его колебаний $z \ll h$, найдите расстояние h от его острия до исследуемой Поверхности.

Пухов-л3-з «Нормальные колебания».

Линейный осциллятор с диссипацией подвержен действию внешней силы: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Покажите, что введение «нормальных колебаний» $a = x + (\gamma + i\omega_1)\dot{x}/\omega_0^2$, a^* сводит задачу к уравнению первого порядка. Решите ее при начальных условиях $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Покажите, что такой кратковременный удар $f(t) = p\delta(t)$ придает осциллятору импульс p и энергию $p^2/2$.

Пухов-л3-з Медленное воздействие на осциллятор.

Получите закон движения осциллятора $x(t)$ (3.21) при медленном воздействии на него с $\tau \gg \gamma^{-1}, \omega_0^{-1}$ непосредственно из общего решения (3.19).

Пухов-л3-з Секулярные решения.

Линейный осциллятор без трения $\ddot{x} + x = f(t)$ движется под действием гармонической силы при а) $x(0) = \dot{x}(0) = 0, f(t) = \cos \omega t$; б) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = -1/2, f(t) = \sin \omega t$. Найдите закон его движения $x = x(t, \omega)$. Прямой предельным переходом получите секулярное решение $x(t) = \lim_{\omega \rightarrow 1} x(t, \omega)$ в резонансном случае $\omega = 1$.

4.1.2 Problems about Nonlinear Oscillator**Пухов-л2.31 Как восстановить вид $U(x)$ по фазовому портрету?**

Как по предъявленному фазовому портрету нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ установить, какому случаю диссипации (отсутствия $\gamma = 0$, слабой $\gamma^2 \ll m^{-1}U''$ или сильной $\gamma^2 \gg m^{-1}U''$) он соответствует? Как восстановить качественный вид потенциальной энергии $U(x)$ осциллятора?

Пухов-л2.32 Как нарисовать фазовый портрет по заданной $U(x)$?

Как нарисовать фазовый портрет нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ по предъявленному рисунку потенциальной энергии $U(x)$ для случаев: а) отсутствия ($\gamma = 0$), б) слабой ($\gamma^2 \ll m^{-1}U''$), в) сильной ($\gamma^2 \gg m^{-1}U''$) диссипации.

Пухов-л2.

Неизохронные осцилляторы. Найдите зависимость периода колебаний $T(E)$ для осциллятора с потенциальной энергией: а) $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(x/a)$, б) $U(x) = U_0 \operatorname{th}^2(x/a)$, в) $U(x) = -U_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/a)$ от его энергии E , отсчитываемой от дна ямы.

Пухов-л2.

Нелинейные изохронные осцилляторы. Найдите зависимость периода колебаний $T(E)$ для осциллятора с потенциальной энергией: а) $U(x) = m\omega^2(x)x^2/2$, $\omega(x) = \omega_1 + (\omega_2 - \omega_1)\eta(x)$, $\eta(x)$ – функция Хевисайда, б) $U(x) = U_0((x/a)^2 + (b/x)^2)$, в) $U(x) = U_0(x/a - b/x)^2$ от энергии E , отсчитываемой от дна ямы.

Пухов-л2.

Неизохронные малые колебания. Исследуйте одномерные колебания материальной точки массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0|x/a|^n$, $n > 0$. Определите зависимость периода колебаний T от энергии E (с точностью до числовой константы). Покажите, что при $n = 2$ колебания любой амплитуды изохронны. Определите для $n \neq 2$ характер зависимости T от амплитуды при ее стремлении к нулю.

Пухов-л2.

Математический маятник: движение по сепаратрисе. а) Математический маятник длиной l отклонили от верхнего положения равновесия на малый угол α . Вычислите период его колебаний T при $\alpha = 2^\circ$, $l = 0,5$ м. Подсказка: решите уравнение движения вблизи верхнего положения равновесия в линейном приближении, затем «сшейте» его с законом движения по сепаратрисе. б) Этот же математический маятник находится в верхнем положении равновесия. Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 10^{-3}$ м/с. Вычислите период его ротаций T .

Пухов-л2.

Математический маятник: период ротаций. Математический маятник длиной l совершает ротационные колебания так, что его скорость в верхней точке v . Оцените период его оборотов T в предельных случаях $v \ll \sqrt{gl}$ и $v \gg \sqrt{gl}$.

Пухов-л2.

Период колебаний осциллятора $T(E)$. Покажите, что период колебаний нелинейного бездиссипативного осциллятора равен $T(E) = \partial S(E)/\partial E$, где $S(E) = \oint p dx$ – площадь, заключённая внутри замкнутой фазовой кривой, соответствующей энергии осциллятора E . Укажите квантово-механическую аналогию этого соотношения, основанную на принципе соответствия.

Пухов-л2.

Вращение фазовых кривых. Покажите, что замкнутые фазовые кривые системы, описываемой уравнением Ньютона $\ddot{x} + \partial U/\partial x = 0$, «закручены» на фазовой плоскости по часовой стрелке.

Пухов-л2.

Обратная задача теории колебаний. По зависимости $T(E)$ для нелинейного осциллятора без трения восстановите вид его потенциальной энергии $U(x)$, полагая её симметричной функцией от x . Какую потенциальную энергию $U(x)$ предсказывает полученное Вами выражение для а) $T(E) = \text{const}$; б) $T(E) \propto \sqrt{E}$?

Пухов-л2.

Фазовый портрет маятника. Нарисуйте фазовый портрет математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ на плоскости и на цилиндре. Укажите сепаратрису, критерий возникновения режима быстрых ротаций.

Пухов-л2.

Фазовый портрет маятника с затуханием. Нарисуйте фазовый портрет математического маятника (с сильным $\gamma \gg 1$, слабым $\gamma \ll 1$ затуханием) $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \sin x = 0$. При каких значениях параметра γ начало координат будет представлять собой устойчивый фокус, а при каких устойчивый узел? Нарисуйте фазовый портрет математического маятника с отрицательным трением. $\gamma < 0$.

Пухов-л2.

Время падения маятника из вертикального положения. Оцените по порядку величины время падения математического маятника из положения, близкого к вертикальному. Здесь $\varphi(0) \ll 1$, $\dot{\varphi}(0) \ll \omega$, $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали, $\omega = \sqrt{g/l}$, l – длина маятника, g гравитационная постоянная.

4.1.3 Problems about Coupled Oscillations

Пухов-л4-з1 Двойной маятник.

Это плоский математический маятник длиной l_1 и массой m_1 с другим математическим маятником длиной l_2 и массой m_2 , прикрепленным шарнирно к его концу так, что вся система может двигаться в одной плоскости. Двойной маятник в режиме малых колебаний демонстрирует эффект биений. Найдите собственные частоты и моды его малых колебаний. При какой энергии колебания маятника становятся хаотическими?

Solution

Пухов-л4-з2 Карандаш, подвешенный на двух нитках.

Карандаш длины $2L$ подвешен на двух одинаковых нитках длины l к потолку за концы и висит горизонтально. Опишите моды его малых колебаний и найдите их частоты.

Solution

Пухов-л4-з3 Молекула азота.

В молекуле N_2 частота колебаний атомов $\approx 4 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, масса одного атома $\approx 2.3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$. Найдите:
а) коэффициент k квазиупругой силы, действующей между атомами;
б) вторую производную потенциальной энергии взаимодействия атомов $U''(r)$ в положении равновесия $U'(r) = 0$.

Solution

Пухов-л4-з4 Молекула углекислого газа.

В молекуле углекислого газа атомы расположены на одной линии, вдоль которой они совершают колебания. Из спектроскопических данных известны частоты двух мод колебаний молекулы: симметричная валентная мода, когда атом углерода покоится, и антисимметричная, когда атомы кислорода движутся в одну сторону, а атом углерода - в другую. Определите:

- а) какой именно моде соответствуют данные частоты $7134 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ и $3855 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$;
 - б) вторую производную парного потенциала взаимодействия атомов углерода и кислорода $U''(r)$ в положении равновесия;
 - с) отношение атомных весов кислорода и углерода.
- Сравните с отношением, следующим из таблицы Менделеева. Объясните причину небольшого отличия.

Solution

Пухов-л4-з5 Треугольная молекула M_3

Молекула M_3 состоит из трех одинаковых атомов массой m и представляет собой равносторонний треугольник. В приближении парного взаимодействия будем считать молекулу тремя шариками, соединенными пружинками. Частота симметричной моды плоских колебаний молекулы равна ω . Найдите остальные собственные частоты молекулы. Вычислите вторую производную парного потенциала взаимодействия атомов $U''(r)$ в положении равновесия.

Solution

Пухов-л4-з6 Водород и дейтерий

Как относятся частоты колебаний молекул H_2 и HD (D - атом дейтерия)?

Solution

Пухов-л4-з7 Линейная симметричная молекула.

Возможны два типа линейных колебаний молекулы углекислого газа CO_2 :

- а) ядра кислорода движутся в противоположные стороны, а ядро углерода остаётся на месте;

б) ядра кислорода движутся с одинаковыми скоростями в направлении, противоположном направлению движения ядра углерода.

Определите отношение частот этих колебаний. Сравните с экспериментальными значениями колебательных квантов 0,276 эВ и 0,163 эВ.

Solution

Пухов-л4-з Биения.

Вы находитесь в салоне двухмоторного прогулочного катера, валы которого вращаются со скоростью 5000 об/мин. Допустимое отличие угловой скорости их вращения составляет 10 об/мин. Каков период модуляции звука двигателей (в секундах), который Вы слышите?

Пухов-л4-з Фигуры Лиссажу.

Тело массой m может скользить без трения по горизонтальной плоскости и растянуто на четырех пружинках. Две вдоль оси x имеют жесткость κ_x , две другие вдоль оси y имеют жесткость κ_y . В состоянии покоя тела пружинки не растянуты. Найдите и опишите все возможные замкнутые траектории тела. Сколько точек поворота имеется у них в направлении x и y ?

Пухов-л4-

Классический эффект Зеемана. Найдите собственные частоты колебаний заряженного 3D-осциллятора, помещенного в однородное магнитное поле B . Частота осциллятора в отсутствие поля ω_0 , заряд e , масса m .

Пухов-л4-

Сферический маятник. Сферический маятник отличается от плоского тем, что материальная точка может двигаться не по дуге окружности, а по поверхности сферы. Иначе, это материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой сферической поверхности, обращенной выпуклостью вниз. а) Найдите период колебаний такого маятника T и угловую прецессию его орбиты $\Delta\varphi$ за оборот при произвольных начальных условиях. б) Найдите угловую прецессию его орбиты $\Delta\varphi$ за оборот при малых эллиптических колебаниях. Почему орбита отличается от фигуры Лиссажу 1:1 и поворачивается?

4.1.4 Problems about Duffing the Oscillator, Anharmonicity

Пухов-л5-

Движение вблизи точек поворота. Покажите, что в случае общего положения время движения частицы в потенциале $U(x)$ вблизи точек поворота составляет небольшой вклад в полный период ее колебаний.

Пухов-л5.2 Асимптотическое решение уравнения Дуффинга.

Покажите, что решение уравнения Дуффинга с точностью до членов третьего порядка по β имеет вид

$$x(t) = a \sin \omega t - \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2} \sin 3\omega t + \frac{\beta^2 a^5}{1024\omega_0^4} \sin 5\omega t + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta a^2}{4} - \frac{3\beta^2 a^4}{128\omega_0^2} + \dots$$

Solution

Это одна из самых обсуждаемых тем про Дуффинга.
(??? переделаю еще раз!)

Пухов-л5.3 Осциллятор Дуффинга.

Малые колебания осциллятора Дуффинга можно рассматривать как движение гармонического осциллятора $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, возмущенное малой добавкой к потенциалу $\delta U(x) = m\beta x^4/4$.

а) Используя формулу (5.12), найдите поправку к периоду δT . Сравните с эффективным изменением частоты $\delta\omega$, возникающим при решении уравнения Дуффинга методом Линдштедта-Пуанкаре.

б) То же для $\delta U(x) = m\beta x^3/3$.

с) То же для $\delta U(x) = m\beta x^2/2$.

Пухова-л5.4 Фазовый портрет Дуффинга.

Нарисуйте фазовый портрет уравнения Дуффинга $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$ для случаев а) «жёсткой» $\beta > 0$ и б) «мягкой» $\beta < 0$ нелинейности.

Пухова-л5-

Возмущение движения осциллятора. Движение линейного осциллятора без трения с массой m и периодом T возмущено малой добавкой к его потенциалу $\delta U(x) = \gamma x^n$. Найдите поправку на неизохронность $\delta T(a)$ к периоду его колебаний в зависимости от их малой амплитуды $a \ll (m/\gamma T^2)^{\frac{1}{n-2}}$ для $n = 3, 4$. Рассмотрите также случай $n = 2$, $\gamma \ll mT^{-2}$

Пухова-л5-

Высшие гармоники. Нелинейный осциллятор описывается уравнением $\ddot{x} + x + \beta x^n = 0$. При его малых колебаниях из-за нелинейности возникают высшие гармоники. Вычислите их частоты для $n = 2, 3, 4$.

Пухова-л5-

Амплитуды высших гармоник. Нелинейный осциллятор описывается уравнением $\ddot{x} + x + \beta x^n = 0$. При его малых колебаниях из-за нелинейности возникают высшие гармоники. Вычислите их амплитуды для $n = 2, 3, 4$.

Пухова-л5-

Сепаратриса. Найдите сепаратрису и закон движения по ней для осцилляторов: а) $\ddot{x} \pm \sin x = 0$; б) $\ddot{x} \pm x \mp x^2 = 0$; в) $\ddot{x} \pm x \mp x^3 = 0$.

Пухова-л5-

Неизохронность. Найдите поправку на неизохронность для осцилляторов: а) $\ddot{x} \pm \sin x = 0$; б) $\ddot{x} \pm x \mp x^2 = 0$; в) $\ddot{x} \pm x \mp x^3 = 0$.

Пухова-л5-

Линейные колебания нелинейной системы. а) Найдите период T малых (гармонических) колебаний системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - x + \beta x^n = 0$, $\beta > 0$, для $n = 2, 3, 4$. б) Вычислите поправку на неизохронность $\delta T(a)$ периода этих колебаний в зависимости от амплитуды $a \ll \beta^{1/(1-n)}$.

Пухова-л5-

Произвольное возмущение движения осциллятора. Движение линейного осциллятора без трения с массой m и периодом T возмущено малой добавкой к его потенциалу $\delta U(x)$. Найдите поправку на неизохронность $\delta T(a)$ к периоду его колебаний в зависимости от их малой амплитуды a .

Пухова-л5-

LC-контур с нелинейной индуктивностью. Найдите асимптотическое решение уравнения колебаний LC-контра с «мягкой» нелинейностью индуктивности вида $L = L_0(1 - I^2/I_0^2)$ при колебаниях с малой амплитудой тока $I_m \ll I_0$. Вычислите зависимость частоты $\omega(I_m)$ от амплитуды колебаний. Сопротивление контура равно нулю. 13. LC-контур с нелинейной емкостью. То же, что в предыдущей задаче для LC-контра с нелинейной вольт-кулоновской характеристикой конденсатора $C = C_0(1 + q^2/q_0^2)^{-1}$ при колебаниях с малой амплитудой заряда $q_m \ll q_0$. Сопротивление контура равно нулю.

4.1.5 Problems about the Hill Oscillator, an Adiabatic Invariant

Пухова-л6.3 Маятник Рэлея.

Длина математического маятника $l(t)$ медленно изменяется со временем по закону $l(t) = l_0 + v_0 t$. Сформулируйте критерий медленности. Как со временем изменяется амплитуда $\varphi_m(t)$ а) малых колебаний $\varphi_m(t) \ll 1$; б) колебаний произвольной амплитуды $\varphi_m(t) \sim 1$?

Solution

За одно колебание длина должна мало измениться, отсюда как-то должно получиться достать критерий.

По идее у нас длина маятника меняет частоту, а энергия делить на частоту - инвариант, т.о. для медленных колебаний получаем зависимость энергии.

Для произвольной амплитуды пока нет идей.

Пухов-лб.2 Адиабатический осциллятор.

Жесткость пружины $\kappa(t)$ осциллятора с массой m медленно изменяется по закону $\kappa(t) = \kappa_0(1 + t/\tau)$. Запишите критерий медленности. Как со временем изменяется амплитуда колебаний осциллятора $x_m(t)$?

Solution

По идее логика решения ровно как и прошлой задаче, проверю потом.

Пухов-лб.3 Инварианты солнечной системы.

Найдите адиабатические инварианты для задачи Кеплера. Выразите параметр p и эксцентриситет ε эллиптической орбиты через адиабатические инварианты задачи Кеплера.

Solution

(по идее у меня в механике решено про это через действие-угол, но нужно додумать)

Пухов-лб.4 Испарение звезды.

Планета массой m движется вокруг своей звезды массой M по эллипсу с осями a и b . Найдите адиабатические инварианты движения планеты, если: а) вследствие излучения масса звезды медленно уменьшается; б) гравитационная постоянная γ медленно изменяется во времени вследствие космологических причин.

Solution

Пухов-лб.

Магнитный адиабатический инвариант. Частица с зарядом и массой m движется в плоскости, перпендикулярной к однородному магнитному полю $B(t)$, медленно изменяющемуся по величине. Сформулируйте критерий медленности. Найдите адиабатический инвариант движения. Используя его, объясните эффект выталкивания частиц из областей сильного поля.

Solution

(см. теорпол, но нужно додумать еще раз это)

Пухов-лб. Магнитная бутылка

Частица с зарядом e и массой m движется в магнитной бутылке. Магнитная бутылка представляет собой цилиндрическую область почти однородного магнитного поля $B(z)$, концы которой $z = \pm l$ представляют собой магнитные пробки. В областях пробок (зеркал) поле сгущается. Сформулируйте критерий адиабатичности движения частицы в бутылке. Найдите три адиабатических инварианта, соответствующих движению частицы поперек (быстрое ларморовское вращение), вдоль (колебание между пробками) и медленному дрейфу по кругу поперек магнитного поля.

Solution

Пухов-лб.

Частица в яме. Частица массой m движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a . Найдите изменение энергии частицы $E(t)$ при медленном изменении $a(t)$. Укажите критерий медленности для случая $a(t) = a_0 - v_0 t$. Обобщите Ваш результат на 3D-случай.

Solution**Пухов-лб. Дырявое ведро.**

Маятник сделан из ведра с водой, подвешенного на длинной веревке. Вода медленно выливается через отверстие в дне ведра. Как с течением времени будет изменяться период колебаний такого маятника?

Solution

Масса уменьшается, центр масс опускается, эфф. длина увеличивается, отсюда меняется период, ибо известна формула частоты от длины.

(допишу потом)

Пухов-лб.9 Адиабатический маятник с изменяющейся массой.

Математический маятник с постоянной длиной подвеса l совершает малые колебания с медленно изменяющейся массой $m(t)$. Найдите адиабатический инвариант такого маятника при а) возрастании массы за счет конденсации из окружающей среды; б) уменьшении массы за счет испарения. Укажите критерий медленности изменения массы. Как будут меняться амплитуда и период колебаний маятника?

Пухов-лб.10. Адиабатический грузик с изменяющейся массой на пружинке

Одномерный осциллятор с постоянной жесткостью пружины κ совершает колебания с медленно изменяющейся массой $m(t)$. Найдите адиабатический инвариант такого осциллятора при а) возрастании массы за счет конденсации из окружающей среды или прилипания неподвижной пыли; б) уменьшении массы за счет испарения или таяния. Укажите критерий медленности изменения массы. Как будут меняться амплитуда и период колебаний такого осциллятора?

Пухов-лб.

Адиабатический инвариант математического маятника. Получите выражение для адиабатического инварианта математического маятника $\ddot{x} + \omega^2(t) \sin x = 0$ с медленно изменяющейся частотой $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Как изменяется со временем амплитуда колебаний маятника $x_m(t)$ когда она не мала $x_m(t) \sim 1$?

Пухов-лб.

Адиабатическое воздействие на линейный осциллятор. На одномерный гармонический осциллятор $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ действует ограниченная по времени сила $f = f_0 / (1 + (t/\tau)^2)$. Воздействие происходит адиабатически $\tau \gg 2\pi/\omega_0$. Найдите поведение осциллятора $x(t)$ при $x(t \rightarrow \infty)$. Покажите, что на больших временах «выживает» только гармоника с собственной частотой осциллятора ω_0 с экспоненциально малой амплитудой. Как изменится Ваш ответ при включении диссипации?

4.1.6 Problems about the Mathieu Oscillator. Parametric Resonance**Пухов-л7.**

Параметрический резонанс. Уравнение Маттье. Докажите теорему Флоке-Блоха для уравнения Маттье $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0$. Получите общее условие существования резонансов. Найдите область существования параметрической неустойчивости вблизи первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) резонанса.

Пухов-л7.3 Резонанс в уравнении Мейсснера

Найдите области параметрической неустойчивости осциллятора, описываемого уравнением Мейсснера $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \operatorname{sign}(\cos \omega t))x = 0$.

Solution

(Кстати, у Маркеева целая статья есть про это, которая гуглится, мб потом изучу и в другие темы теории добавлю. пока для меня это всего лишь маленькая задача и не больше.)

Пухов-л7.3 Параметрический резонанс осциллятора с импульсной частотой.

Найдите области параметрической неустойчивости осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon\omega_0^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) x = 0.$$

Solution**Пухов-л7.**

Параметрическая неустойчивость. Осциллятор Матье $\ddot{x} + 2r\dot{x} + (1 + p \cos qt)x = 0$ совершает параметрические колебания вблизи первого резонанса. Будет ли иметь место неограниченное возрастание амплитуды колебаний при а) $r = 0.01, p = 0.05, q = 2.05$; б) $r = 0.05, p = 0.01, q = 2.01$; в) $r = 0.01, p = 0.01, q = 1.95$; г) $r = 0.05, p = -0.05, q = 1.99$?

Solution**Пухов-л7.**

Параметрическая неустойчивость конденсатора. Емкость в колебательном контуре меняется через равные интервалы времени τ от C_1 до C_2 и обратно, причем $\Delta C = C_2 - C_1 \ll C_0 = (C_1 + C_2)/2$. На плоскости параметров $(\Delta C/C_0, \omega_0\tau)$, $\omega_0^2 = 1/LC_0$, найдите зоны параметрической неустойчивости системы.

Solution**Пухов-л7.**

Вертикальные колебания точки подвеса маятника. Точка подвеса маятника совершает колебания в вертикальной плоскости с частотой $2\sqrt{g/l}$ и амплитудой a . Коэффициент затухания системы γ . При каком условии в системе возникнет неустойчивость?

Solution**Пухов-л7.**

Параметрическая неустойчивость при сильном трении. Осциллятор Матье $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0$ совершает параметрические колебания вблизи первого резонанса $n = 1$ в условиях сильного трения $\gamma \sim \omega_0$. Найдите границу зоны параметрической неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта.

Solution**Пухов-л7.**

Параметрическая неустойчивость осциллятора Дуффинга. Осциллятор Дуффинга $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x + \beta x^3 = 0$ совершает параметрические колебания вблизи первого резонанса $n = 1, \varepsilon \ll 1$ в условиях сильного трения $\gamma \sim \omega_0$. Определите амплитуду и фазу установившихся колебаний. Найдите границу зоны параметрической неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта.

Solution**4.1.7 Problems about Nonlinear Resonance****Пухов-л9.**

Нелинейный резонанс математического маятника. В какую сторону наклоняется из-за нелинейности пик резонанса математического маятника $\ddot{x} + \sin x = f \cos \omega t$? Какова будет его максимальная амплитуда при частоте $\omega = 0$?

Пухов-л9.

Нелинейный резонанс. Найдите отклик $a(\omega)$ осциллятора Дуффинга на гармоническую силу $f \cos \omega t$. Оцените качественно амплитуду $a(\omega)$ установившихся колебаний. Нарисуйте вид резонансной кривой для случаев а) «жёсткой» $\beta > 0$ и б) «мягкой» $\beta < 0$ нелинейности.

Пухов-л9.

Осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга. Получите укороченные уравнения динамики осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга $\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x + \beta x^3 = 0$ для его амплитуды и фазы. Исследуйте динамику амплитуды и фазы при установлении автоколебаний. Получите укороченное уравнение для осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга под действием гармонической силы $\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x + \beta x^3 = f \sin \omega t$. Найдите условия возникновения синхронизации.

Пухов-л9.

Изгиб пика резонанса. На сколько и в какую сторону по частоте загибается пик резонанса нелинейного осциллятора с потенциальной энергией $U(x) = m\omega^2 x^2/2 + m\beta x^4/4$ в зависимости от амплитуды колебаний a и знака β ?

Пухов-л9.

Резонанс Ферми в маятнике «качающаяся пружина». Тяжелая точка массы m , подвешенная на пружине, качается в вертикальной плоскости в поле тяжести. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 , натяжение пружины в растянутом до длины l состоянии $\kappa(l - l_0)/l_0$. Покажите, что, когда частота вертикальных колебаний равна удвоенной частоте горизонтальных колебаний (качаний), вертикальные колебания становятся неустойчивыми (резонанс Ферми), их энергия перекачивается в энергию качаний. Эти качания также неустойчивы, через определенный период времени энергия обратно перекачивается в вертикальную моду колебаний. Найдите этот период τ .

4.1.8 Problems about Oscillation Synchronization**Пухов-л11.**

Синхронизация осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите уравнение Адлера для уравнения Ван дер Поля-Дуффинга с гармоническим воздействием $\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x + \beta x^3 = f \sin \omega t$ при условиях $\lambda \ll 1, \omega \approx 1, f \ll \lambda^{3/2} \ll 1$. Найдите область синхронизации.

Пухов-л11.

Синхронизация осциллятора Рэля. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите уравнение Адлера для уравнения Рэля с гармоническим воздействием $\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda) \dot{x} + x = f \sin \omega t$ при условиях $\lambda \ll 1, \omega \approx 1, f \ll \lambda^{3/2} \ll 1$. Найдите область синхронизации.

Пухов-л11.

Синхронизация осциллятора Ван дер Поля импульсной силой. Опишите область параметров, при которых осциллятор Ван дер Поля синхронизируется импульсной внешней силой

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda) \dot{x} + x = f \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

при условиях $\lambda \ll 1, 2\pi/T \approx 1, f \ll \lambda^{3/2} \ll 1$. Возможна ли синхронизация при больших значениях параметра надкритичности $\lambda \gg 1$ и силы $f \gg 1$?

Пухов-л11.

Синхронизация в уравнении Ван дер Поля. Для осциллятора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием $\ddot{x} + (x^2 - 0,5) \dot{x} + x = 0,2 \sin(1,05t)$ составьте уравнение Адлера для фазы φ колебаний системы. Постройте график зависимости эффективного потенциала $U(\varphi)$ от фазы φ . Имеет ли место в данном случае режим синхронизации? Если да, то найдите возможные значения фиксированной фазы колебаний φ . Чему при этом равны частота и амплитуда колебаний?

Пухов-л11.

Синхронизация осциллятора Ван дер Поля двухчастотным воздействием. Система Ван дер Поля с воздействием на двух частотах ω и Ω описывается уравнением

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x = a \sin \omega t + b \sin(\Omega t + \theta),$$

где $\omega \approx 1, \Omega \approx 1, a \ll \lambda^{3/2} \ll 1, b \ll \lambda^{3/2} \ll 1$. Используя метод медленно меняющихся амплитуд, получите уравнение, аналогичное уравнению Адлера для системы Ван дер Поля с одночастотным воздействием. Найдите область синхронизации.

Пухов-л11.

Синхронизация двух генераторов с диссипативной связью. Два осциллятора Ван дер Поля с диссипативной связью описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} + (y^2 - \lambda) \dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0, \end{aligned}$$

где λ - параметр накачки (отрицательного трения), μ - константа связи, Δ - частотная расстройка осцилляторов. В пределе малой связи $\mu \ll 1$ и квазигармоничности автоколебаний $\lambda \ll 1$ в приближении медленно меняющихся амплитуд получится укороченное фазовое уравнение Адлера:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \varphi$$

где φ - относительная фаза. Покажите, что области синхронизации соответствует язык Арнольда $|\Delta| < 2\mu$.

Пухов-л11.

Синхронизация двух генераторов с реактивной связью. Два осциллятора Ван дер Поля с реактивной связью описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (x^2 - \lambda) \dot{x} + x + \mu(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} + (y^2 - \lambda) \dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(x - y) &= 0, \end{aligned}$$

где λ - параметр накачки (отрицательного трения), μ - константа связи, Δ - частотная расстройка осцилляторов. В пределе малой связи и квазигармоничности автоколебаний $\lambda \ll 1$ в приближении медленно меняющихся амплитуд получите укороченное фазовое уравнение Адлера:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\Delta^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} \sin 2\varphi,$$

где φ - относительная фаза. Покажите, что области синхронизации соответствует язык Арнольда $|\Delta| < \mu^2$, а сама устойчивая синхронизация может быть как синфазной ($\varphi \approx 0$), так и противофазной ($\varphi \approx \pi$).

4.1.9 10 Problems About Van Der Pol Oscillators and Self - Oscillations

Пухов-л10.

Эквивалентность уравнений Ван дер Поля и Рэлея. Покажите, что замена $\dot{y} = x/\sqrt{3}$ приводит уравнение (10.1) к (10.2). 2. Две формы уравнения Ван дер Поля. Существует иная форма уравнения Ван дер Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$. Укажите замену переменных и параметров, которая приводит его к виду (10.1). Отметьте сингулярность этой замены, делающей данную форму неудобной для анализа бифуркации рождения цикла.

Пухов-л10.

Автоколебания математического маятника. Исследуйте автоколебательные режимы движения маятника с подкруткой и малым трением $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \sin x = m$ при произвольных γ и m .

Пухов-л10.

Осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга. Получите укороченные уравнения динамики осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0$ для его амплитуды и фазы. Исследуйте динамику амплитуды и фазы при установлении автоколебаний. Найдите амплитуду квазигармонических колебаний и их частоту при $\lambda \ll 1$. Получите укороченное уравнение для осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга под действием гармонической силы $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \beta x^3 = f \sin \omega t$. Найдите условия возникновения синхронизации.

Пухов-л10.

Жесткий режим возбуждения автогенератора. Автогенератор с жестким возбуждением описывается уравнением $\ddot{x} - (\beta + \cos x)\dot{x} + x = 0$. Найдите приближенно значение параметра $\beta = \beta_c$, отвечающее жесткому возникновению автоколебаний. Оцените радиус a_c возникающего при этом устойчивого предельного цикла.

Пухов-л10.

Автоколебания. Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея. а). Нарисуйте фазовый портрет уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$. Найдите амплитуду квазигармонических автоколебаний (радиус предельного цикла). Укажите критерий квазигармоничности. б) То же для уравнений Рэлея $\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$.

Пухов-л10.

Автоколебания осциллятора Ван-дер-Поля - Рэлея. Найдите амплитуду квазигармонических автоколебаний (радиус предельного цикла) осциллятора Ван-дер-Поля - Рэлея

$$\ddot{x} + (\alpha x^2 + \beta \dot{x}^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$$

Укажите критерий квазигармоничности. Покажите, что при $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$ Ваш результат превращается в радиус предельного цикла осцилляторов Ван дер Поля и Рэлея соответственно.

Пухов-л10.

Осциллятор Ван дер Поля с жестким возбуждением. Для автогенератора, описываемого уравнением $\ddot{x} + (x^4 - \mu x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0$, опишите разбиение плоскости параметров (μ, λ) на области, отвечающие различным типам динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите на них устойчивые и неустойчивые предельные циклы. Вычислите бифуркационное значение параметра λ_c , при котором происходит срыв генерации.

Пухов-л10.

Бифуркация Хопфа. Предложите такое видоизменение уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, при котором предельный цикл рождается при некотором конечном значении параметра λ . Убедитесь, что его амплитуда возрастает корневым образом $\propto \sqrt{\lambda}$.

Пухов-л10.

Центробежный регулятор Ватта. Это автоматический регулятор, имеющий обратную связь с паровой машиной. Его задача устойчиво поддерживать угловую скорость вращения вала машины ω постоянной. Вращение передается с вала зубчатой передачей на вертикальный стержень так, что он вращается с угловой скоростью ω, n - коэффициент передачи. К стержню шарнирно прикреплены две одинаковые массы m , которые с изменением ω отклоняются от оси на угол φ . Это, в свою очередь, изменяет положение заслонки двигателя, что определяет его обороты ω . Такая система с обратной связью описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mg \sin \varphi &= mn^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ J\dot{\omega} &= k \cos \varphi - M, \end{aligned}$$

где J - момент инерции маховика паровой машины, k - коэффициент заслонки, M - момент нагрузки на машину. Исследуйте устойчивость стационарного режима работы машины с регулятором. Как нужно изменять величины b, m, J или M , чтобы расширить область стабильности?

Пухов-л10.

Брюсселятор. Химические автоколебания. Простейшим примером автоколебательной химической реакции является модель «брюсселятор» для концентраций веществ X и Y :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a - (b+1)X + X^2Y, \\ \dot{Y} &= bX - X^2Y,\end{aligned}$$

где $a, b > 0$. Найдите стационарные концентрации, а также частоту и инкремент нарастания колебаний около них. При каком значении параметра $b = b_c$ происходит бифуркация Хопфа? Вычислите амплитуду квазигармонических автоколебаний при $b \approx b_c$.

Пухов-л10.

Автоколебания «хищник-жертва». Рассмотрите обобщенную модель «хищник-жертва»:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha(X)X - XY, \\ \dot{Y} &= XY - \beta Y\end{aligned}$$

для численностей X жертв и Y хищников. При $\alpha(X) = \text{const}$ она соответствует классической модели Вольтерры. Найдите вид $\alpha(X)$, при котором в системе возможна бифуркация Хопфа. Вычислите порог возникновения автоколебаний. Найдите радиус предельного цикла.

Пухов-л10.

Автоколебания одномодового лазера. Динамика медленных амплитуд поля a , поляризации σ и инверсии D одномодового лазера описывается полуклассическими уравнениями Максвелла-Блоха:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \left(i\Delta - \frac{1}{\tau_a}\right)a - i\Omega_R\sigma, \\ \dot{\sigma} &= \left(i\delta - \frac{1}{\tau_\sigma}\right)\sigma + i\Omega_R a D, \\ \dot{D} &= 2i\Omega_R(a^*\sigma - \sigma^*a) - \frac{D - D_0}{\tau_D},\end{aligned}$$

где $\Delta = \omega - \omega_{CM}$, $\delta = \omega - \omega_{\text{TLS}}$ - расстройки частот, ω_{CM} - частота моды, ω_{TLS} - частота оптического перехода активных атомов, ω - частота лазирования, Ω_R - частота Раби, D_0 - ненасыщенная инверсия, возникающая в результате некогерентной накачки внешним источником, $\tau_a, \tau_\sigma, \tau_D$ - времена релаксации. Покажите, что переход к генерации - это бифуркация Хопфа рождения предельного цикла с амплитудой (стационарная амплитуда лазерного поля) $a_{st} \propto \sqrt{D_0 - D_{th}}$, а лазер представляет собой квантовую автоколебательную систему. Найдите пороговую накачку D_{th} . Покажите, что частота лазирования ω всегда расположена между частотами ω_{CM} и ω_{TLS} (затягивание частоты).

Пухов-л10.

Предельный цикл осциллятора Ван дер Поля. Осциллятор Ван дер Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает квазигармонические ($\varepsilon \ll 1$) автоколебания. Найдите амплитуду колебаний при а) $\varepsilon = 0.01, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 0.05, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 0.01, \beta = 9$; д) $\varepsilon = 0.05, \beta = 2$.

Пухов-л10.

Предельный цикл осциллятора Рэля. Осциллятор Рэля $\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает квазигармонические ($\varepsilon \ll 1$) автоколебания. Найдите амплитуду колебаний при а) $\varepsilon = 0.01, \beta = 3$; б) $\varepsilon = 0.05, \beta = 12$; в) $\varepsilon = 0.01, \beta = 0.75$; д) $\varepsilon = 0.05, \beta = 27$.

Пухов-л10.

Релаксационные колебания осциллятора Ван дер Поля. Осциллятор Ван дер Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает релаксационные ($\varepsilon \gg 1$) автоколебания. Оцените их период T при а) $\varepsilon = 100, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 200, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 300, \beta = 9$; д) $\varepsilon = 500, \beta = 2$.

Пухов-л10.

Релаксационные колебания осциллятора Рэля. Осциллятор Рэля $\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает релаксационные ($\varepsilon \gg 1$) автоколебания. Оцените их период T при а) $\varepsilon = 100, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 200, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 300, \beta = 9$; д) $\varepsilon = 500, \beta = 2$.

4.2 Questions for Testing Knowledge

4.2.1 Questions to Test Basic Knowledge

(когда-то впишу ответы, не актуально пока что. некоторые вопросы удалю!)

1. Запишите уравнение движения нелинейного осциллятора.
2. Чем точка поворота отличается от точки остановки?
2. Запишите выражение для периода колебаний T .
3. Чему равен период малых колебаний маятника с частотой ω ?
4. Напишите уравнение сепаратрисы математического маятника на фазовой плоскости.
5. Запишите закон движения по сепаратрисе.
6. Чему равна поправка к периоду математического маятника при амплитуде колебаний φ_m ?
7. Как зависит период колебаний математического маятника T от его малого отклонения от вертикали φ ?
8. Что такое эффект Джанибекова?
9. Какой особой точке на фазовой плоскости соответствует локальный максимум $U(x)$?
10. Какой особой точке на фазовой плоскости соответствует локальный минимум $U(x)$?
11. В какую сторону «закручены» фазовые траектории нелинейного осциллятора?
12. Чему равна скорость потери энергии диссипативным нелинейным осциллятором?
13. При каком соотношении γ и ω линейный осциллятор становится демпфированным?
14. Запишите критерий слабости диссипации нелинейного осциллятора.
15. Что такое обратная задача теории колебаний?
16. Запишите выражение для формы симметричного потенциала $x(U)$ при заданной зависимости периода колебаний от их энергии $T(E)$.
1. Запишите уравнение гармонического осциллятора.
2. Запишите уравнение линейного осциллятора.
3. Что такое добротность осциллятора?
4. Что такое передемпфированный осциллятор?
5. Как связаны добротность осциллятора и его потери энергии за период?
6. Запишите выражение для частоты свободных колебаний осциллятора.
7. Запишите выражение для резонансной частоты вынужденных колебаний осциллятора.
8. Запишите выражение для нормальных координат.
9. При какой частоте вынужденные колебания осциллятора отстают от силы на 90° ?
10. Что такое векторная диаграмма?
11. Чему равен сдвиг фазы между координатой осциллятора и вынуждающей силой в резонансе?
12. Что такое амплитуды поглощения и дисперсии?
13. Во сколько раз резонансный отклик осциллятора превышает его отклик на нулевой частоте?
14. Что больше: частота собственных затухающих колебаний осциллятора или частота максимума резонансной кривой этого же осциллятора?
15. Чему равен спектр осциллятора?
16. Почему спектр свободных колебаний совпадает с резонансной кривой вынужденных колебаний высокодобротного осциллятора?
17. Запишите выражение для лоренцевской формы спектра.
18. Запишите выражение для секулярного решения.
19. Что такое теорема Парсеваля?
1. Что такое парциальные частоты?
2. Что такое нормальные частоты?
3. Что такое график Вина?
4. Что такое непересечение термов?
5. Могут ли совпадать нормальные частоты двух связанных осцилляторов?
6. Что такое биения?
7. Чему равна частота биений?
8. Что такое фигуры Лиссажу?
9. Нарисуйте фигуры Лиссажу для соотношения частот 2:3.
10. Что такое антирезонанс?
11. Что такое резонанс Фано?
12. Что такое гаситель колебаний?
13. Запишите условие возникновения антирезонанса.
14. Сколько собственных частот колебаний у n -атомной молекулы?
15. Сколько вращательных и поступательных степеней свободы у n -атомной молекулы?
16. У какой валентной моды колебаний молекулы CO_2 (симметричной или антисимметричной) частота колебаний больше?
17. В чем заключается теорема Бертрана?
18. Каковы экспериментальные способы установить трехмерность пространства?

4.2.2 Determining the Type of the Equation

(когда-то впишу ответы, не актуально пока что. некоторые вопросы удалю!)

1. Запишите уравнение Дуффинга.
2. Запишите уравнение Дуффинга в безразмерном виде.
3. Запишите поправку на неизохронность осциллятора Дуффинга.
4. Запишите решение уравнения движения осциллятора Дуффинга в квадратурах.
5. Запишите условие «жесткой» и «мягкой» нелинейности в уравнении Дуффинга.
6. Запишите выражение для изменения периода δT колебаний нелинейного осциллятора при вариации потенциала $\delta U(x)$.
7. Запишите поправку на неизохронность δT осциллятора Дуффинга.
8. Как связана вариация периода колебаний δT с вариацией частоты $\delta \omega$?

9. Запишите выражение для периода колебаний T осциллятора Дуффинга через эллиптический интеграл. 10. Как связаны неизохронность и ангармонизм? 11. Какие гармоники присутствуют в колебаниях осциллятора Дуффинга малой амплитуды? 12. Какие гармоники были бы в уравнении с нелинейностью степени n ?

4.2.3 Questions to test knowledge of details

(???)

13. При каком β уравнение Дуффинга описывает слабо нелинейные колебания математического маятника?

14. Запишите критерий слабой нелинейности осциллятора.

15. В чем заключается метод прямого разложения по малому параметру?

16. В чем заключается метод Линдштедта-Пуанкаре?

4.3 Tasks about Physical Applications (???)

(это же в других многих записях)

4.3.1 Other Pukhov Tasks

П.3-238. Бег по воде? (??????)

Оцените порядок скорости, с которой человек должен бежать по воде, чтобы не тонуть.

(????????)

Solution (????)

П.3-236. Дюна (??????)

Движущийся и «поющий» бархан. Бархан (разновидность дюны) это песчаный холм, образовавшийся под действием ветра. Наветренная сторона полого ($\approx 15^\circ$), подветренная сторона крутая ($\approx 35^\circ$) и осыпается. Высота бархана 15 м, средний размер кремниевых песчинок, из которых он состоит, 200 мкм. Оцените скорость передвижения такого бархана (в м/год), полагая для оценки, что ветер дует в одном направлении со скоростью 5 м/с. Оцените частоту звукового тона, издаваемого барханом при передвижении.

Solution (????)

4.4 Other Problems

4.4.1 Other Problems 1

(сгруппирую потом, а мб некоторые и удалю, потому что выше уже они могут быть написаны.)

П.сб-

Система «хищник-жертва». Уравнения Вольтерры.

Задачу можно сформулировать в виде вопроса: могут ли рыси съесть всех зайцев? Пусть на замкнутом ареале обитают $N_2(t)$ хищников, которые питаются только жертвами. $N_1(t)$ жертв - вегетарианцы и питаются только растительной пищей. Динамика численностей хищников и жертв описывается уравнениями Вольтерры:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2) \\ \dot{N}_2 &= -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1)\end{aligned}$$

где ε_1 - коэффициент размножения жертв в отсутствие хищников, ε_2 - коэффициент вымирания хищников в отсутствие жертв, γ_2 - коэффициент гибели жертв, γ_1 - коэффициент размножения хищников, все введенные коэффициенты положительны. Найдите особые точки системы и определите их тип. Покажите, что на фазовой плоскости системы «Хищник-жертва» все траектории, кроме особых точек и положительных полуосей N_1 и N_2 , замкнуты, то есть отвечают периодическому движению. Укажите, какая траектория соответствует закону Мальтуса. Найдите период колебаний и сдвиг по времени численностей хищников и жертв.

Solution**П.сб-**

Динамика численности карасей. Рассмотрите динамику численности карасей в пруду, которая ограничена сверху недостатком питания. При каком коэффициенте размножения численность карасей становится хаотической функцией времени? Найдите диапазон коэффициента размножения, при котором численность карасей как функция времени принимает поочередно два значения (первая бифуркация).

Solution**П.сб-**

Процветание зверофермы. На звероферме норки кормят крысами, а крыс - норками. Других источников питания крыс и норки, кроме воды, нет. Сформулируйте условия процветания зверофермы.

Solution**П.сб-**

Апокалипсис. Демографические данные показывают, что последние лет сто-двести численность населения Земли $N(t)$ растёт не по закону

Мальтуса $\dot{N} \propto N$, а по закону бимолекулярной реакции $\dot{N} \propto N^2$ с постоянной Ферстера $C \approx 200$ млрд чел. лет. Получите закон гиперболического роста населения. Предскажите дату конца Света, учитывая, что население Земли в 2000 г. составляло ≈ 6 млрд чел.

Solution**П.сб-**

«Химический осциллятор». Реакция Белоусова. Простейшим примером колебательной химической реакции является модель Лотки для концентраций веществ X и Y :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= k_0 - k_1 XY \\ \dot{Y} &= k_1 XY - k_2 Y\end{aligned}$$

где k_0, k_1 и k_2 - константы скоростей этой реакции. Найдите стационарные концентрации, а также частоту и декремент затухания колебаний около них.

Solution**П.сб-**

Клипсидра. Водяные часы представляют собой сосуд в виде тела вращения с небольшим отверстием внизу. Время отсчитывается по уровню воды в сосуде. Какова должна быть форма сосуда, чтобы шкала времени была равномерной?

Solution**П.сб-**

Кривая погони. Истребитель летит горизонтально со скоростью u на высоте h над поверхностью земли. Когда он пролетает над пусковой установкой, навстречу ему перпендикулярно земле стартует ракета «земля-воздух». Она летит со скоростью v так, чтобы ее скорость все время была направлена на истребитель. При каком соотношении u и v ракета догонит истребитель и за какое время τ ? Найдите траекторию полета ракеты.

Solution

П.сб-

Расширение Вселенной. Видимую Вселенную (Метагалактику) можно считать однородным изотропным шаром с радиусом $R_0 \approx 10^{28}$ см с плотностью галактик $\rho_0 \approx 5 \cdot 10^{-30} \text{ Г/см}^3$. Начальное распределение скоростей радиального разбегания галактик $v = H_0 r$, где $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ - постоянная Хаббла в нашу эпоху. В ньютоновском приближении найдите зависимость радиуса Вселенной $R(t)$ от времени. Определите, сменится ли кинетический разлет галактик их гравитационным сжатием. Оцените критическую начальную плотность Вселенной ρ_c , при которой это произойдет.

Solution

П.сб-

Время «убегания» атмосферы. Планета радиуса R имеет гравитационную постоянную на поверхности g . Атмосфера планеты представляет собой идеальный больцмановский газ с температурой T и массой молекул m . Полагая гравитацию сильной $mgR \gg T$, оцените время τ , за которое планета лишится атмосферы.

Solution

П.сб-

Пичковые колебания лазера. Найти пичковые (релаксационные) колебания одномодового лазера, описываемого скоростными уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \Gamma N D - \frac{2N}{\tau_a} \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{D_0 - D}{\tau_D} - 2\Gamma D N\end{aligned}$$

где N - число фотонов в моде лазера, D - инверсная населённость уровней, Γ - скорость спонтанных переходов, D_0 - «насыщенная» инверсия, возникающая в результате некогерентной накачки внешним источником, τ_a, τ_D - времена релаксации.

Solution

П.сб-

Ядерный реактор. Динамика ядерного реактора в простейшей модели описывается системой уравнений на мощность N и температуру T реактора:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -\frac{\alpha(T - T_1)}{\tau} N \\ C \frac{dT}{dt} &= N - k(T - T_0)\end{aligned}$$

где τ - время жизни одного поколения нейтронов, $\alpha > 0$ - реактивность реактора, C - теплоемкость реактора, T_1 - температура окружающей среды, $T_0 < T_1$ - температура охладителя реактора, k - коэффициент тепло- отдачи реактора. Приведите уравнение динамики реактора к безразмерному виду, укажите минимальный набор характеризующих реактор параметров. Найдите точки равновесия системы и исследуйте их устойчивость.

Solution

П.сб-

Химический реактор. Реактор представляет собой открытую систему полного перемешивания с непрерывным тепло- и массообменом с окружающей средой. Химическая реакция протекает гомогенно с выделением тепла, которое отводится как потоком вещества, так и теплопередачей через стенки реактора. Зависимость скорости реакции от концентрации реагента и температуры определяется законом действующих масс Аррениуса. В этой простейшей модели динамика реактора описывается системой уравнений на концентрацию реагента x и его температуру y :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xe^{-1/y} + \mu(y_0 - y)\end{aligned}$$

где x_0 - концентрация подающегося реагента, y_0 - равновесная температура реактора при потушенной реакции, λ - скорость вывода реагента из реактора, μ - скорость охлаждения за счёт вывода реагента и отвода тепла. Найдите области значений параметров, соответствующие стационарному и автоколебательному режиму работы.

Solution

П.сб-

Баллистическая траектория. В задаче внешней баллистики снаряд массы m движется по криволинейной траектории, испытывая сопротивление воздуха. Сила сопротивления направлена противоположно скорости V и равна по величине $mg\phi(V)$, где $\phi(V)$ - монотонно возрастающая от $\phi(0) = 0$ до $\phi(\infty) = \infty$ функция. Покажите, что фазовые траектории приближаются к точке $\alpha = -\pi/2, V = V_0$, где V_0 - единственный положительный корень уравнения $\phi(V) = 1, \alpha$ - угол касательной к траектории. Эта точка отвечает установившемуся вертикальному падению снаряда с постоянной скоростью V_0 . Покажите, что для $\phi(V) = cV^\gamma$ ($c, \gamma > 0$) задача решается явно. Подсказка: подстановка $u = V^{-\gamma}$ сводит задачу к линейному уравнению.

Solution

П.сб- Планер Жуковского.

Полет планера массой m в вертикальной плоскости при постоянном угле атаки описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \sin \theta - ay^2 \\ \dot{\theta} &= y - y^{-1} \cos \theta\end{aligned}$$

где y - безразмерная скорость $v(\rho SC_y/2mg)^{1/2}$, $t(\rho g SC_y/2m)^{1/2}$ - безразмерное время, θ - угол наклона траектории к горизонту, $a = C_x/C_y$ - отношение сопротивления и подъемной силы, ρ - плотность воздуха, S - мидель планера. Нарисуйте фазовый портрет системы в пренебрежении сопротивлением воздуха ($a = 0$). Найдите первый интеграл и покажите, что в зависимости от его величины планер либо летит по волнообразной линии, либо совершает мертвые петли. Покажите, что при учете сопротивления воздуха ($a \neq 0$) планер, совершив несколько мертвых петель, переходит к нисходящему прямолинейному полету.

Solution

П.сб-

Центробежный регулятор Ватта. Это автоматический регулятор, имеющий обратную связь с паровой машиной. Его задача устойчиво поддерживать угловую скорость вращения вала машины ω постоянной. Вращение передается с вала зубчатой передачей на вертикальный стержень так, что он вращается с угловой скоростью $n\omega$, n - коэффициент передачи. К стержню шарнирно прикреплены две одинаковые массы m , которые с изменением ω отклоняются от оси на угол φ . Это, в свою очередь, изменяет положение заслонки двигателя, что определяет его обороты ω . Такая система с обратной связью описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}m\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mg \sin \varphi &= mn^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ J\dot{\omega} &= k \cos \varphi - M\end{aligned}$$

где J - момент инерции маховика паровой машины, k - коэффициент заслонки, M - момент нагрузки на машину. Исследуйте устойчивость стационарного режима работы машины с регулятором. Как нужно изменять величины b, m, J или M , чтобы расширить область стабильности?

Solution

П.сб-

Как восстановить вид $U(x)$ по фазовому портрету? Как по фазовому портрету нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ установить, какому случаю диссипации (отсутствия $\gamma = 0$, слабой

$\gamma^2 \ll m^{-1}U''$ или сильной $\gamma^2 \gg m^{-1}U''$) он соответствует? Как восстановить качественный вид потенциальной энергии $U(x)$ осциллятора?

Solution

П.сб-

Как нарисовать фазовый портрет по заданной $U(x)$? Как нарисовать фазовый портрет нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ по заданной потенциальной энергии $U(x)$ для случаев: а) отсутствия ($\gamma = 0$), б) слабой ($\gamma^2 \ll m^{-1}U''$), в) сильной ($\gamma^2 \gg m^{-1}U''$) диссипации.

Solution

П.сб-

Портрет и потенциал. Приведите пример физической системы, имеющей заданные: а) фазовый портрет $(x, \dot{x})$; б) график потенциальной энергии $U(x)$.

Solution

П.сб-

Неизохронность математического маятника. Определите период колебаний T плоского математического маятника длиной l в зависимости от амплитуды φ_m . Получите поправку на «неизохронность» δT при малой амплитуде колебаний $\varphi_m \ll 1$. Найдите относительное изменение периода при угле отклонения в $30^\circ, 90^\circ$.

Solution

П.сб-

Диссипативный лагранжиан. Покажите, что лагранжиан нелинейного осциллятора с трением имеет вид

$$L = e^{\gamma t} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x, t) \right)$$

Найдите гамильтониан этого осциллятора и получите его уравнения Гамильтона. Вычислите скобку Пуассона $\{x, p\}$. Обобщите Ваши результаты на 3D-случай.

Solution

П.сб-

«Нормальные колебания». Линейный осциллятор с диссипацией подвержен действию внешней силы: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Покажите, что введение «нормальных колебаний» $a = x + (\gamma + i\omega_1)\dot{x}/\omega_0^2$, a^* сводит задачу к уравнению первого порядка. Решите ее при начальных условиях $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Покажите, что такой кратковременный удар $f(t) = p\delta(t)$ придает осциллятору импульс p и энергию $p^2/2$.

Solution

П.сб-

Неизохронные осцилляторы. Найдите зависимость периода колебаний $T(E)$ для осциллятора с потенциальной энергией: а) $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(x/a)$, б) $U(x) = U_0 \operatorname{th}^2(x/a)$, в) $U(x) = -U_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/a)$ от его энергии E , отсчитываемой от дна ямы.

Solution**П.сб-**

Нелинейные изохронные осцилляторы. Найдите зависимость периода колебаний $T(E)$ для осциллятора с потенциальной энергией: а) $U(x) = m\omega^2(x)x^2/2$, $\omega(x) = \omega_1 + (\omega_2 - \omega_1)\eta(x)$, $\eta(x)$ — функция Хевисайда, б) $U(x) = U_0((x/a)^2 + (b/x)^2)$, в) $U(x) = U_0(x/a - b/x)^2$ от энергии E , отсчитываемой от дна ямы.

Solution**П.сб-**

Неизохронные малые колебания. Исследуйте одномерные колебания материальной точки массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0|x/a|^n$, $n > 0$. Определите зависимость периода колебаний T от энергии E (с точностью до числовой константы). Покажите, что при $n = 2$ колебания любой амплитуды изохронны. Определите для $n \neq 2$ характер зависимости T от амплитуды при ее стремлении к нулю.

Solution**П.сб-**

Неизохронный гармонический осциллятор. Это осциллятор с гамильтонианом $H = H_0 + \lambda H_0^2$, где

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

Solution**П.сб-**

гамильтониан обычного гармонического осциллятора. Найдите зависимость частоты его колебаний $\omega(a)$ от амплитуды a . Обобщите Ваш результат на случай $H = f(H_0)$.

Solution**П.сб-**

Обратная задача теории колебаний. По зависимости $T(E)$ для нелинейного осциллятора без трения восстановите вид его потенциальной энергии $U(x)$, полагая её симметричной функцией от x . Какую потенциальную энергию $U(x)$ предсказывает полученное Вами выражение для а) $T(E) = \text{const}$; б) $T(E) \propto \sqrt{E}$?

Solution**П.сб-**

Частица в симметричном потенциале. Частица с массой m совершает одномерные колебания с энергией E в квазистепенном потенциале а) $U(x) = k|x|$; б) $U(x) = k|x|x^2$, $k > 0$. Найдите зависимость периода колебаний $T(E)$ от энергии.

Solution**П.сб-**

«Парадокс спутника». Спутник летит по низкой (≈ 200 км) круговой орбите над поверхностью Земли. В результате трения в верхних слоях атмосферы спутник испытывает тормозящее действие воздуха с силой $S\rho v^2$, $\rho \approx 10^{-6}$ г/см³, $S \approx 1$ м². Энергия спутника слегка убывает виток за витком, его орбита при этом остается примерно круговой. Как со временем изменяется скорость $v(t)$, энергия $E(t)$ и период обращения $T(t)$ спутника? Оцените время падения спутника.

Solution**П.сб-**

«Космонавт-хулиган». Космический корабль движется по низкой круговой орбите радиуса $R = 6400$ км вокруг Земли с первой космической скоростью $v = 8$ км/с. а) Вышедший из корабля космонавт бросает в сторону Земли гайку со скоростью $u = 8$ м/с. Опишите движение гайки относительно корабля (временные и пространственные параметры) в плоскости орбиты. То же для гайки, брошенной б) по и с) против движения корабля.

Solution**П.сб-**

«Ванька-встанька». В качестве модели популярной игрушки (другое название «Неваляшка») рассмотрим шар радиуса r со смещенным вниз на расстояние l центром тяжести. Момент инерции шара относительно центра инерции I . Шар расположен на плоскости, по которой может кататься без проскальзывания. Найдите период малых колебаний и обсудите устойчивость игрушки. В частности, как изменится ответ, если игрушка расположена на вершине неподвижной полусферы радиуса R .

Solution**П.сб-**

Осциллятор «Земля-атмосфера». Колебания земной атмосферы под влиянием Луны, которая вращается вокруг Земли, представляют собой приливы и отливы. Отклик атмосферы на Луну - это обычный отклик осциллятора на периодическую силу. Период этого воздействия составляет $T = 12$ ч 40 мин: приливы происходят дважды в сутки. Время задержки прилива по отношению к прохождению Луны составляет $\Delta T = 0$ ч 55 мин. Период собственных затухающих колебаний атмосферы, измеренный при глобальных извержениях гигантских вулканов, составляет $T_1 = 10$ ч 20 мин. Оцените добротность осциллятора «Земля-атмосфера» Q .

Solution**П.сб-**

Водяной манометр. Вода налита в тонкую U -образную трубку, находящуюся в поле тяжести g . Подобная ситуация возникает в водяном манометре на «холостом ходу», когда от него отсоединены резиновые шланги. Площадь сечения трубки $S(s)$ слегка изменяется вдоль трубки так, что $lS' \ll S$. Здесь l - длина области трубки, занятая водой. Найдите период малых колебаний воды в пренебрежении вязкими потерями.

Solution**П.сб-**

Ареометр. В равновесии ареометр представляет собой погруженный в воду сосуд с трубкой, поднимающейся над поверхностью воды подобно перископу подводной лодки. Масса ареометра m , плотность воды ρ , площадь сечения трубки S . Найдите период малых колебаний ареометра в пренебрежении сопротивлением воды.

Solution**П.сб-**

«Нелинейная пружина». Математический маятник в виде невесомого стержня длиной l и груза массой m вблизи верхнего положения равновесия прикреплен к нелинейной пружине с законом Гука $f(x) = kx + cx^3$, где x - малое смещение маятника, $k, c > 0$. Пружинка расположена перпендикулярно стержню. Проанализируйте положения равновесия и вычислите период малых колебаний маятника около них. При каком условии происходит «фазовый переход» маятника?

Solution**4.4.2 Other Problems 2**

(сгруппирую потом, а мб некоторые и удалю, потому что выше уже они могут быть написаны.)

П.сб-

Механический фазовый переход. Математический маятник в виде невесомого стержня длиной l с массой m на конце находится в верхнем неустойчивом положении равновесия. К массе прикреплены две пружины длиной a , жёсткостью k , лежащие вдоль горизонтальной линии, перпендикулярной стержню. Концы пружин жестко закреплены. Маятник может совершать движение только в плоскости, перпендикулярной пружинам. Начальная деформация пружин b . Считая, что смещение маятника x мало $x \ll l, a$ опишите его движение, когда пружины растянуты $b < 0$ и сжаты $b > 0$.

Solution**П.сб-**

Трифилярный подвес. Трифилярный подвес представляет собой круглый массивный диск радиуса R , подвешенный на трех симметричных одинаковых нитях к потолку. Точки крепления нитей на потолке расположены на окружности меньшего радиуса r . Диск совершает крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через его середину. Найдите период малых колебаний диска T . Вычислите поправку на неизохронность δT для малых колебаний. Оцените период колебаний подвеса с большой амплитудой. Особо рассмотрите случай, когда нити подвеса переключаются.

Solution**П.сб-**

Маятник Томсона-Тэта. Это математический маятник, у которого к невесомому стержню длины L вместо точечной массы шарнирно прикреплен своей серединой второй невесомый стержень длины $2l$. На концах второго стержня закреплены одинаковые точечные массы m . Вся система может двигаться в одной плоскости. Определите движение маятника, найдите период его малых колебаний.

Solution**П.сб-**

Маятник со скрытой массой. Две массы m и M связаны невесомой нитью длиной l . Масса m может свободно скользить по горизонтальной плоскости, нить может двигаться без трения через отверстие в плоскости, а масса M движется вертикально. Массе m придается орбитальный момент движения L . Найдите период колебаний такого маятника.

Solution**П.сб-**

Двойной маятник. Это плоский математический маятник длиной l_1 и массой m_1 с другим математическим маятником длиной l_2 и массой m_2 , прикрепленным шарнирно к его концу так, что вся система может двигаться в одной плоскости. Двойной маятник в режиме малых колебаний демонстрирует эффект биений. Найдите собственные частоты и моды его малых колебаний. При какой энергии колебания маятника становятся хаотическими?

Solution**П.сб-**

Электростатический маятник. Точечная масса m математического маятника подвешена на непроводящей нити длиной a и заряжена до заряда q . На расстоянии b от точки подвеса расположена вертикальная металлическая заземленная пластина. Найдите положения равновесия такого маятника и периоды малых колебаний около них. Отметьте область возникновения бистабильности.

Solution**П.сб-**

Эллиптический маятник. Это плоский математический маятник с массой m и длиной l , точка подвеса которого имеет массу M и может без трения двигаться по горизонтальной прямой. Получите уравнения движения такого маятника. Найдите собственные частоты его малых колебаний.

Solution**П.сб-**

Сферический маятник. Сферический маятник отличается от плоского тем, что материальная точка может двигаться не по дуге окружности, а по поверхности сферы. Иначе, это материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой сферической поверхности, обращенной выпуклостью вниз. Найдите период колебаний $T(a)$ такого маятника в зависимости от амплитуды a и угловую прецессию его орбиты $\Delta\varphi$ за оборот. Почему орбита отличается от фигуры Лиссажу 1:1?

Solution**П.сб-**

Кинематический маятник. Две частицы одинаковой массы m скользят без трения по осям координат в горизонтальной плоскости. Частицы соединены невесомой жёсткой связью длиной l . Опишите движение такого маятника, если ему сообщена энергия E . Найдите период его колебаний $T(E)$ в зависимости от энергии.

Solution**П.сб-**

Математический маятник: движение по сепаратрисе. Математический маятник длиной l отклонили от верхнего положения равновесия на малый угол α . Оцените период его колебаний при $\alpha = 1^\circ, l = 1$ м. Подсказка: решите уравнение движения вблизи верхнего положения равновесия в линейном приближении, затем «сшейте» его с законом движения по сепаратрисе.

Solution**П.сб-**

Математический маятник: период ротаций. Математический маятник длиной l совершает ротационные колебания так, что его скорость в верхней точке v . Оцените период его оборотов T в предельных случаях $v \ll \sqrt{gl}$ и $v \gg \sqrt{gl}$.

Solution**П.сб-**

Математический маятник с подкруткой. Нарисуйте фазовый портрет (на плоскости и на цилиндре) маятника, на который действует постоянный крутящий момент $\ddot{x} + \sin x = m$. Какие движения маятника отвечают фазовым кривым разных типов (в зависимости от величины m)?

Solution**П.сб-**

Конический маятник. Маятник представляет собой невесомую спицу длиной l с грузиком массой m на конце. Другой конец спицы соединён шарнирно с вертикальной осью так, что может совершать колебания в вертикальной плоскости. Ось вращается с угловой скоростью ω . Найдите угол отклонения маятника, исследуйте устойчивость этого положения.

Solution

П.сб-

Маятник Максвелла. Прототип игрушки «йо-йо» представляет собой диск массой m с моментом инерции I , закрепленный на легком стержне радиуса r . На концах стержня намотаны нити, при помощи которых маятник подвешен так, что ось стержня горизонтальна. Под действием тяжести нити разматываются, а диск раскручивается. После полного разматывания нитей, они снова начинают сматываться, а диск подниматься. Найдите период T колебаний такого маятника, если длина нитей l .

Solution

П.сб-

Маятник Гюйгенса. Математический маятник представляет собой грузик на нерастяжимой нити. Для устранения зависимости периода его колебаний от амплитуды (неизохронности) в месте его подвеса приделаны вертикальные выгнутые «щёчки» специально подобранной формы. При колебаниях нить ложится на эти «щёчки» так, что траектория грузика является эвольвентой к форме кривой «щёчек» - эволюте. Найдите такую форму, чтобы маятник был изохронным.

Solution

П.сб-

Маятник Фуко. Опишите малые колебания математического маятника с учетом силы Кориолиса, вызванной вращением Земли ($\Omega = 7 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$). В какую сторону (по или против часовой стрелки) поворачивается плоскость качания маятника? На какой угол $\Delta\varphi$ повернется плоскость качаний за сутки на широте Москвы (56°)?

Solution

П.сб-

Маятник Жуковского. Однородная доска массой m лежит на двух одинаковых вращающихся цилиндрах. Цилиндры горизонтальны, расстояние между их осями l , коэффициент трения между доской и цилиндрами k . Опишите движение доски при всех возможных направлениях вращения цилиндров.

Solution

П.сб-

Маятник Фроуда. Жуковский предложил устройство совершенного (без потерь) подвеса маятника. Муфта, насаженная на горизонтальный вал, составляет одно целое с маятником. Вал вращается с угловой скоростью ω , а маятник совершает колебания в плоскости, перпендикулярной валу. Покажите, что если угловая скорость вращения вала достаточно велика, то потеря энергии маятника в таком подвесе не будет. Укажите критерий возникновения автоколебаний.

Solution

П.сб-

Маятник Рэлея. Длина математического маятника $l(t)$ медленно изменяется со временем по закону $l(t) = l_0 + vt$. Сформулируйте критерий медленности. Как со временем изменяется амплитуда $\varphi_m(t)$ а) малых колебаний $\varphi_m(t) \ll 1$; б) колебаний произвольной амплитуды $\varphi_m(t) \sim 1$.

Solution

П.сб-

Маятник Капицы. Определите положения устойчивого равновесия математического маятника длиной l , точка подвеса которого совершает а) горизонтальные, б) вертикальные колебания малой амплитуды a

с большой частотой ω . Укажите критерии их устойчивости. Найдите периоды малых колебаний T в этих положениях.

Solution

П.сб-

Маятник Челомея. На жесткий вертикальный стержень, имеющий внизу шарнирную опору, надета плотно прилегающая шайба, способная без трения скользить по стержню. Если придать шарнирной опоре высокочастотные вертикальные колебания, то шайба не падает вниз, а остается в почти неподвижном положении на стержне, как бы в невесомости. При этом стержень стоит почти вертикально. Если помимо этого придать шарнирной опоре также горизонтальные колебания той же частоты, то это положение стабилизируется полностью. Найдите критерий устойчивости вертикального положения маятника Челомея, а также положение, которое при этом занимает шайба.

Solution

П.сб-

Маятник с вращающимся диском. На конце маятника вместо груза установлен диск, способный вращаться в плоскости качаний. Когда диск вращается, маятник загадочным образом стабилизируется в верхнем положении. Объясните это явление. Оцените угловую скорость диска, необходимую для стабилизации.

Solution

П.сб-

Маятник на бревне. Нить математического маятника намотана на неподвижный горизонтальный цилиндр с радиусом r и свисает вниз. Ее длина до груза в положении равновесия равна l . Найдите период малых колебаний такого маятника в гармоническом приближении $T(0)$. Вычислите поправку на неизохронность $T(\varphi_m)$ при слабонегармонических $\varphi_m \ll 1$ колебаниях.

Solution

П.сб-

Плавающий брусок. Деревянный брусок квадратного сечения плавает в воде. Найдите положение его устойчивого равновесия и период малых колебаний около этого равновесия, если плотность дерева а) в два раза меньше, б) много меньше, в) почти равна плотности воды.

Solution

П.сб-

Плавающий кубик. То же, что в предыдущей задаче, но для кубика.

Solution

П.сб-

Секулярные решения. Линейный осциллятор без трения $\ddot{x} + x = f(t)$ движется под действием гармонической силы при а) $x(0) = \dot{x}(0) = 0, f(t) = \cos \omega t$; б) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = -1/2, f(t) = \sin \omega t$. Найдите закон его движения $x = x(t, \omega)$. Прямым предельным переходом получите секулярное решение $x(t) = \lim_{\omega \rightarrow 1} x(t, \omega)$ в резонансном случае $\omega = 1$.

Solution

П.сб-

Спектр и отклик осциллятора. Осциллятор с затуханием $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ начинает свои колебания из положения $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Найдите решение $x(t)$ и его спектр $X(\omega)$. Этот же осциллятор

находится под действием гармонической силы $f \cos \omega t$. Найдите амплитуду установившихся колебаний (отклик) $a(\omega)$. Сравните функции $|X(\omega)|^2$ и $|a(\omega)f^{-1}|^2$ с лоренцевской линией.

Solution

П.сб-

Время удара мяча о стену. Оцените время τ соударения футбольного мяча со стенкой. Масса мяча $m \approx 300$ г, радиус $R \approx 15$ см, избыток давления в камере $P \approx 1$ атм, скорость $v \approx 10$ /с перпендикулярна стене. Оцените скорость мяча, при которой его деформация не будет малой.

Solution

П.сб-

Столкновение стальных шариков. Определите время центрального столкновения двух одинаковых упругих стальных шариков, v - относительная скорость столкновения. Потенциальная энергия упругого взаимодействия шариков равна $U(x) = kx^{5/2}$, x - глубина смятия при соприкосновении.

Solution

П.сб-

Бифуркация и устойчивость. Бусинка массой m надета на гладкий обруч с радиусом r и может скользить по нему без трения. Обруч вращается с угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. Найдите стационарные положения бусинки и исследуйте их устойчивость. Вычислите период её малых колебаний.

Solution

П.сб-

Вариация периода при возмущении потенциала. Консервативный осциллятор с потенциальной энергией $U(x)$ и энергией E совершает колебания с периодом $T(E)$. Определите изменение периода его колебаний δT при той же энергии, вызванное малым изменением потенциальной энергии $\delta U(x)$.

Solution

П.сб-

Осциллятор Дуффинга. Малые колебания осциллятора Дуффинга можно рассматривать как движение гармонического осциллятора $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, возмущенное малой добавкой κ потенциалу $\delta U(x) = m\beta x^4/4$. а) Используя решение предыдущей задачи, найдите поправку к периоду δT . Сравните с эффективным изменением частоты $\delta\omega$, возникающим при решении уравнения Дуффинга. б) То же для $\delta U(x) = \max^3/3$.

Solution

П.сб-

Фазовый портрет уравнения Дуффинга. Нарисуйте фазовый портрет уравнения Дуффинга $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$ для случаев а) «жёсткой» $\beta > 0$ и б) «мягкой» $\beta < 0$ нелинейности.

Solution

П.сб-

Нелинейный резонанс. Найдите отклик $a(\omega)$ осциллятора Дуффинга на гармоническую силу $f \cos \omega t$. Оцените качественно амплитуду $a(\omega)$ установившихся колебаний. Нарисуйте вид резонансной кривой для случаев а) «жёсткой» $\beta > 0$ и б) «мягкой» $\beta < 0$ нелинейности.

Solution**П.сб-**

Параметрический резонанс. Уравнение Матье. Докажите теорему Флоке-Блоха для уравнения Матье: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0$. Получите общее условие существования резонансов. Найдите область существования параметрической неустойчивости вблизи первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) резонанса.

Solution**П.сб-**

Параметрический резонанс. Уравнение Мейсснера. Найдите области параметрической неустойчивости осциллятора, описываемого уравнением Мейсснера: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \operatorname{sign}(\cos \omega t))x = 0$.

Solution**4.4.3 Other Problems 3**

(сгруппирую потом, а мб некоторые и удалю, потому что выше уже они могут быть написаны.)

П.сб-

Параметрический резонанс осциллятора с импульсной частотой. Найдите области параметрической неустойчивости осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon \omega_0^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) x = 0$$

Solution**П.сб-**

Автоколебания. Уравнения Ван-дер-Поля и Рэля. а). Нарисуйте фазовый портрет уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Найдите амплитуду квазигармонических автоколебаний (радиус предельного цикла). Укажите критерий квазигармоничности. б) То же для уравнений Рэля $\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Solution**П.сб-**

Бифуркация Хопфа. Предложите такое видоизменение уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, при котором предельный цикл рождается при некотором конечном значении параметра λ . Убедитесь, что его амплитуда возрастает корневым образом $\propto \sqrt{\lambda}$ (бифуркация Хопфа).

Solution**П.сб-**

Осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга. Получите укороченные уравнения динамики осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0$. Исследуйте динамику амплитуды и фазы при установлении автоколебаний. Получите укороченное уравнение для осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга под действием гармонической силы $\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x + \beta x^3 = f \sin \omega t$. Найдите условия возникновения синхронизации.

Solution

П.сб-

Кубок Тантала. В стакан с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 наливается вода со скоростью V . Через край стакана свешивается сифон, длины трубок которого h внутри и H снаружи стакана. Сечение трубки сифона таково, что скорость опорожнения стакана значительно превышает V . Нарисуйте фазовый портрет системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

Solution

П.сб-

Брюсселятор. Химические автоколебания. Простейшим примером автоколебательной химической реакции является модель «брюсселятор» для концентраций веществ X и Y :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a - (b+1)X + X^2Y, \\ \dot{Y} &= bX - X^2Y,\end{aligned}$$

где $a, b > 0$. Найдите стационарные концентрации, а также частоту и инкремент нарастания колебаний около них. При каком значении параметра $b = b_c$ происходит бифуркация Хопфа? Вычислите амплитуду квазигармонических автоколебаний при $b \approx b_c$.

Solution

П.сб-

Автоколебания «хищник-жертва». Рассмотрите обобщенную модель «хищник-жертва» (1):

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha(X)X - XY \\ \dot{Y} &= XY - \beta Y\end{aligned}$$

для численностей X жертв и Y хищников. При $\alpha(X) = \text{const}$ она соответствует классической модели Вольтерры. Найдите вид $\alpha(X)$, при котором в системе возможна бифуркация Хопфа. Вычислите порог возникновения автоколебаний. Найдите радиус предельного цикла.

Solution

П.сб-

Автоколебания одномодового лазера. Динамика медленных амплитуд поля a , поляризации σ и инверсии D одномодового лазера описываются полуклассическими уравнениями Максвелла-Блоха:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \left(i\Delta - \frac{1}{\tau_a}\right)a - i\Omega_R\sigma \\ \dot{\sigma} &= \left(i\delta - \frac{1}{\tau_\sigma}\right)\sigma + i\Omega_R a D \\ \dot{D} &= 2i\Omega_R(a^*\sigma - \sigma^*a) - \frac{D - D_0}{\tau_D}\end{aligned}$$

где $\Delta = \omega - \omega_{CM}$, $\delta = \omega - \omega_{TLS}$ - расстройки частот, ω_{CM} - частота моды, ω_{TLS} - частота оптического перехода активных атомов, ω - частота лазирования, Ω_R - частота Раби, D_0 - «ненасыщенная» инверсия, возникающая в результате некогерентной накачки внешним источником, $\tau_a, \tau_\sigma, \tau_D$ - времена релаксации. Покажите, что переход к генерации - это бифуркация Хопфа рождения предельного цикла с амплитудой (стационарная амплитуда лазерного поля) $a_{st} \propto \sqrt{D_0 - D_{th}}$, а лазер представляет собой квантовую автоколебательную систему. Найдите пороговую накачку D_{th} . Покажите, что частота лазирования ω всегда расположена между частотами ω_{CM} и ω_{TLS} («затягивание частоты»).

Solution

П.сб-

Аэроупругая неустойчивость. Простой моделью крыла самолета в потоке является прямоугольная тонкая пластина длиной l и шириной b , которая шарнирно закреплена и может поворачиваться вокруг

задней кромки. Крепление крыла к фюзеляжу моделируется пружиной жесткости κl , перпендикулярной пластине и прикрепленной к передней кромке. При нерастянутой пружине пластина параллельна потоку, то есть ее угол атаки α равен нулю. Аэродинамическая подъемная сила $C_y(\alpha) \cdot bl \cdot \rho v^2/2$ приложена к пластине на расстоянии $a < b$ от задней кромки. При малых углах атаки коэффициент подъемной силы $C_y(\alpha)$ пропорционален углу атаки $C_y(\alpha) \approx C'_y(0) \cdot \alpha$. Вычислите критическую скорость потока v_c , выше которой положение крыла $\alpha = 0$ становится неустойчивым. Это явление называется дивергенцией крыла, когда его эффективная жесткость обращается в ноль и встречный поток может «вывернуть» крыло из фюзеляжа.

Solution

П.сб-

Флаттер крыла. Простой моделью флаттера крыла самолета является тонкая упруго закрепленная прямоугольная пластина длиной l , шириной b и массой mb . Передняя и задняя кромки пластины соединены с вертикальными пружинами жесткости $\kappa_1 l$ и $\kappa_2 l$ соответственно. Пластина имеет две степени свободы: угол атаки α и вертикальное смещение середины пластины z . При $\kappa_2 \rightarrow \infty$ эта модель переходит в модель предыдущей задачи. Набегающий поток действует на пластину с аэродинамической подъемной силой $C_y(\alpha)bl\rho v^2/2$, приложенной на расстоянии a от задней кромки. При малых углах атаки коэффициент подъемной силы $C_y(\alpha)$ пропорционален углу атаки $C_y(\alpha) \approx C'_y(0)\alpha$. Исследуйте устойчивость невозмущенного положения пластины $\alpha = y = 0$. Покажите, что существуют две критические скорости потока v_{c1} и v_{c2} . При превышении первой $v > v_{c1}$ аэроупругая неустойчивость развивается как монотонный уход от положения равновесия (дивергенция крыла). При превышении второй $v > v_{c2} > v_{c1}$ аэроупругая неустойчивость развивается как колебания с возрастающей амплитудой. Получите критерии устойчивости крыла по отношению к дивергенции и флаттеру.

Solution

П.сб-

Шимми колеса. Предложите простую модель возникновения неустойчивости движения (шимми) переднего колеса самолета. Такую неустойчивость можно часто наблюдать у колес не слишком новых тележек в супермаркетах. Оцените величину критической скорости, выше которой развивается неустойчивость.

Solution

П.сб-

Задача Раби про часы. Раби очень гордился точностью хода своих механических часов. Однажды, поднявшись на гору для эксперимента с космическими лучами, он обнаружил, что его часы стали несколько спешить. Раби предложил эту задачу Ферми, который тотчас дал объяснение этому эффекту и оценил порядок погрешности хода часов. А как быстро справитесь с этим Вы?

Solution

П.сб-

Лэмбовский сдвиг. В модели Томсона атомарный электрон массы m совершает колебания в потенциале $m\omega^2 x^2/2$. Из-за потерь на излучение из него действует сила радиационного торможения $2e^2 \ddot{x}/3c^3$, возникающего из-за взаимодействия электрона с собственным полем излучения. Вычислите ширину линии γ , лэмбовский сдвиг $\Delta\omega$ и добротность

Q такого осциллятора $m = 10^{-27}$, $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ СГС, $\omega = 10^{15}$ с $^{-1}$.

Solution

П.сб- Шахта

В шахту, прорытую по диаметру Земли ($R = 6400$ км, $g = 10$ м/с ^{2}), кинули студента ФОПФ. а) Опишите его движение в пренебрежении сопротивлением воздуха, сравните с движением спутника, летящего над Землей по низкой круговой орбите. б) Что будет, если мы учтем сопротивление воздуха в шахте в предположении, что её стенки теплоизолированы?

Solution

П.сб-

Изохронное движение бусинки в жёлобе. Бусинка движется в жёлобе, изогнутом в вертикальной плоскости в соответствии с заданной формой профиля $y = f(x)$. На бусинку действует сила тяжести, а ее трением о жёлоб можно пренебречь. Какую форму жёлоба следует выбрать, чтобы движение бусинки соответствовало бы колебаниям линейного осциллятора, то есть было изохронным?

Solution

П.сб-

Гаситель колебаний. Резонанс Фано. Тела с массами m_1 и m_2 соединены пружиной с жесткостью k_2 и могут совершать одномерное движение вдоль прямой без трения. Тело m_1 , кроме того, соединено пружиной с жесткостью k_1 с неподвижной точкой прямой. На тело m_1 действует гармоническая сила с амплитудой f и частотой ω . Найдите условие, при котором масса m_1 покоится. Вычислите ее гармонический отклик $a_1(\omega)$.

Solution

П.сб-

Период колебаний осциллятора $T(E)$. Покажите, что период колебаний нелинейного бездиссипативного осциллятора равен $T(E) = \partial S(E)/\partial E$, где $S(E) = \oint p dx$ - площадь, заключённая внутри замкнутой фазовой кривой, соответствующей энергии осциллятора E . Укажите квантово-механическую аналогию этого соотношения, основанную на принципе соответствия.

Solution

П.сб-

Адиабатический инвариант нелинейного консервативного осциллятора. Покажите, что интеграл $\oint p dx$ является адиабатическим инвариантом для нелинейного консервативного осциллятора $m\ddot{x} + \partial U/\partial x = 0$ с медленно изменяющейся потенциальной энергией.

Solution

П.сб-

Адиабатический инвариант осциллятора и математического маятника. Параметрический осциллятор описывается уравнением Хилла $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0$. а). Считая, что частота ω_0 изменяется медленно $\dot{\omega} \ll \omega_0^2$, вычислите усреднённую по осцилляциям скорость изменения по времени энергии осциллятора $E(t) = \dot{x}^2/2 + \omega_0^2(t)x^2/2$. Покажите, что сохраняется адиабатический инвариант $E(t)/\omega_0(t) \approx \text{const}$. Сравните его с величиной $\oint p dx$. б). Найдите также адиабатический инвариант математического маятника.

Solution

П.сб-

Адиабатический инвариант математического маятника. Получите выражение для адиабатического инварианта математического маятника $\ddot{x} + \omega^2(t) \sin x = 0$ с медленно изменяющейся частотой $\dot{\omega} \ll \omega^2$. Как изменяется со временем амплитуда колебаний маятника $x_m(t)$?

Solution

П.сб-

Шарик на наклонной плоскости. Шарик массой m движется по наклонной плоскости в поле тяжести g без трения. В нижней точке плоскости шарик упруго отражается от стенки, и его движение повторяется. Найдите, как со временем изменяется максимальная высота подъема шарика $h(t)$ при адиабатически медленном изменении угла $\alpha(t)$ наклонной плоскости. Вращением шарика можно пренебречь.

Solution**П.сб-**

Массивная пружина. Груз с массой M подвешен на пружине с массой m и жесткостью k . Вычислите частоту его колебаний в поле тяжести. Найдите удлинение пружины под действием собственного веса.

Solution**П.сб-**

Электрон в «проруби». Тонкая металлическая пластина с круглым отверстием заряжена положительно и помещена в вакуум. Электрон совершает колебания вдоль линии, перпендикулярной пластине и проходящей через центр отверстия. Электрон периодически ныряет в отверстие, как в прорубь, оказываясь то с одной стороны пластины, то с другой. а) Найдите период этих колебаний $T(a)$, амплитуда которых a значительно больше диаметра отверстия. Чему равен T , если около пластины поле ≈ 100 В/см, а амплитуда колебаний электрона ≈ 1 мкм? б) Из-за утечки заряда поле около пластины медленно убывает со скоростью ≈ 0.01 В/см $\cdot$ с. Как будет изменяться амплитуда $a(t)$ и период $T(t)$ колебаний электрона? Выполняется ли условие медленности изменения поля? с) Оцените по порядку величины добротность этого осциллятора Q , понимаемую как отношение радиационных потерь энергии за период к запасенной энергии $Q = 2\pi\Delta E/E$.

Solution**П.сб-**

Карандаш, подвешенный на двух нитках. Карандаш подвешен на двух одинаковых нитках к потолку за концы и висит горизонтально. Опишите моды его колебаний и найдите их частоту.

Solution**П.сб-**

Подвешенная палочка. Палочка длиной $2l$ подвешена на двух вертикальных нитях длины a и b . Определите частоту плоских малых колебаний.

Solution**П.сб-**

Подвешенный стержень. Жесткий стержень массой m и длиной a подвешен с обоих концов на невесомых нитях, имеющих одинаковую длину l . Стержень выводят из состояния покоя, прикладывая небольшой импульс силы P к одному из его концов в направлении, перпендикулярном стержню и нити. Определите частоты и амплитуды нормальных мод колебаний.

Solution**П.сб-**

Доска на бревне. Поперёк цилиндрического бревна радиуса r лежит однородная доска с размерами $a \times b \times c$. Доска может совершать колебания малой амплитуды без проскальзывания по бревну. Найти период колебаний и поправку на неизохронность.

Solution**П.сб-**

Шар в сфере, цилиндр в трубе. Однородный шар радиуса r может без проскальзывания совершать колебания в сферической лунке радиуса R . Найти период колебаний T и поправку на неизохронность δT . 101. Механическое подобие. Определите период колебаний частицы в степенном потенциале в зависимости от ее энергии. Проверьте, что зависимость периода от энергии соответствует закону механического подобия, если потенциальная энергия - однородная функция координат.

Solution**П.сб-**

Обруч на бельевой веревке. Тонкий круглый обруч висит на горизонтальной бельевой веревке так, что может совершать колебания в плоскости, перпендикулярной веревке, с периодом T_1 . В другом случае обруч при помощи маленького колечка подвешен в одной плоскости с веревкой и может совершать колебания в направлении, перпендикулярном этой плоскости с периодом T_2 . Определите отношение периодов T_1 и T_2 .

Solution**П.сб-**

Теорема Бертрана. Покажите, что в трехмерном пространстве замкнутые траектории возможны только для центральных потенциалов $U(r) = \alpha/r$ и $U(r) = m\omega^2 r^2/2$.

Solution**П.сб-**

Цилиндр (шар) с полостью. В сплошном однородном цилиндре (шаре) с радиусом R сделана цилиндрическая (шаровая) полость радиуса $R/2$ с осью (центром), проходящей через середину радиуса цилиндра. Определить период малых колебаний T , которые возникнут, если цилиндр (шар) положить на горизонтальный стол.

Solution**П.сб-**

Эффект Джанибекова. Космонавт Джанибеков в условиях невесомости скручивал гайки-барашки с болтов. В силу малости трения, достаточно стукнуть гайку пальцем, чтобы она сама скрутилась с резьбы болта и полетела в невесомости, вращаясь вокруг своей оси. Дальнейшее поведение гайки оказалось необычным. Пролетев определенное расстояние, гайка неожиданно делала «кувырок» так, что ее ось вращения поворачивалась на 180° . После этого, так же вращаясь, гайка летела дальше. «Кувырки» происходили через равные промежутки времени. Объясните механизм возникновения этого явления. Считая для оценок, что гайка-барашек имеет существенно отличающиеся по величине моменты инерции относительно главных осей и что больший из них $\approx 50 \text{ Г} \cdot \text{см}^2$, оцените промежуток времени τ между последовательными кувырками гайки. Угловая скорость гайки при схождении с резьбы $\approx 10 \text{ с}^{-1}$, угол отклонения оси ее вращения от оси инерции $\approx 1^\circ$.

Solution**П.сб-**

Прецессия и нутация юлы. Детская юла представляет собой тяжелый волчок, раскрученный вдоль своей оси до большой угловой скорости ω и поставленный на шероховатый пол под углом к вертикали. Момент инерции волчка I , $\omega \gg \sqrt{mgl/I}$, m - масса волчка, l - расстояние от точки опоры до центра масс. Опишите его прецессию и нутацию, найдите их характерные частоты.

Solution**П.сб-**

Прецессия и нутация спина. Магнитный резонанс. Спин s с магнитным моментом μ находится в постоянном однородном магнитном поле B_0 . Кроме того, на него действует перпендикулярное циркулярно поляризованное поле $\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{B}_0$ с частотой ω . Опишите прецессию и нутацию спина, вычислите их частоты.

Solution

П.сб-

Прецессия и нутация атома. Оптический резонанс. Двухуровневый атом с дипольным моментом $\mathbf{d}_{eg}$ находится в поле гармонической волны $\varepsilon \cos \omega t$ оптической частоты. Опишите прецессию и нутацию вектора Блоха атома, вычислите их частоты. Оцените величину сдвига Блоха-Зигерта частоты прецессии.

Solution

4.4.4 Other Problems 4

(сгруппирую потом, а мб некоторые и удалю, потому что выше уже они могут быть написаны.)

П.сб-

Ускорение Ферми. Стальной шарик массой m , двигаясь горизонтально, упруго отражается от двух параллельных вертикальных стенок. Расстояние между стенками $l(t)$ медленно изменяется. Запишите критерий медленности. Как со временем изменяется кинетическая энергия шарика $E(t)$? Гравитацией пренебречь.

Solution

П.сб-

Стохастическая машина Улама. Частица массой m движется горизонтально, испытывая упругие столкновения с двумя вертикальными стенками бесконечно большой массы, расположенными на расстоянии l друг от друга. Одна из стенок неподвижна, а вторая совершает гармонические колебания так, что ее положение изменяется по закону $a \cos \omega t$. Опишите стохастическое ускорение частицы, оцените увеличение $\langle v_n^2 \rangle$ с ростом числа столкновений n . Будет ли в силу тенденции к установлению термодинамического равновесия кинетическая энергия частицы в среднем $m \langle v_n^2 \rangle / 2$ неограниченно возрастать с ростом n ?

Solution

П.сб-

Гравитационная машина Заславского. Частица массой m упруго подскакивает на массивной горизонтальной плите, совершающей вертикальные колебания по закону $a \cos \omega t$. Опишите стохастическое ускорение частицы, оцените увеличение $\langle v_n^2 \rangle$ с ростом числа подскоков n . Будет ли в силу тенденции к установлению термодинамического равновесия кинетическая энергия частицы в среднем $m \langle v_n^2 \rangle / 2$ неограниченно возрастать с ростом n ?

Solution

П.сб-

Стохастический резонанс. Частица массой m находится в потенциале $U(x)$ с двумя ямами. В начальный момент она локализована вблизи дна одной из ям. Под действием шума $\xi(t)$ частица может преодолеть барьер ΔU и перейти в другую яму за время $\langle \tau \rangle$. Кроме того, на частицу действует гармоническая сила $f \cos \omega t$ так, что

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \xi(t) + f \cos \omega t$$

где коррелятор марковского шума равен $\langle \xi(t') \xi(t) \rangle = 2D \delta(t' - t)$. Покажите, что при выполнении условия стохастического резонанса $\omega \langle \tau \rangle \approx 1$ относительная дисперсия времени перехода $(\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2) / \langle \tau \rangle^2$ существенно убывает. Вычислите крамерсовское время $\langle \tau \rangle$.

Solution**П.сб-**

Странный аттрактор Лоренца - одномодовый лазер. Знаменитые уравнения Э. Лоренца для «странного аттрактора» математически идентичны уравнениям одномодового лазера:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= -Y + XZ \\ \dot{Z} &= b(r - Z) + b(1 - r)XY\end{aligned}$$

где σ - число Прандтля, r - число Рэлея (накачка), b - геометрический фактор. Покажите, что при увеличении числа Рэлея здесь возникают две различные бифуркации. Первая из них ($r > 1$) связана с возникновением генерации (конвекции) - бифуркация Хопфа рождения предельного цикла. При дальнейшем увеличении числа Рэлея до $r > \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ и $\sigma > b + 1$ возникает бифуркация рождения «странного аттрактора» - переход к хаосу.

Solution**П.сб-**

Квантовые биения. Частица может находиться в одной из двух симметричных ям, разделенных потенциальным барьером, с амплитудами $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Энергия частицы E в каждой из ям одинакова. В силу конечности барьера существует маленькая амплитуда перехода $A \ll E$ из ямы в яму. Уравнение Шредингера для частицы имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A \\ A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Покажите, что вероятности нахождения частицы в первой $|C_1(t)|^2$ и второй $|C_2(t)|^2$ ямах испытывают биения с частотой $2A/\hbar$.

4.4.5 Other Oscillation Exercises from Pukhov**П.сб-**

«Эффективные экологи». Экологи обеспокоены ростом числа рысей в лесах региона. Чтобы спасти поголовье зайцев, они производят резкий и масштабный (скажем на треть) отстрел рысей. Как это скажется на поголовье зайцев в максимуме, если отстрел произвести: а) в максимуме численности рысей, б) в минимуме численности рысей, в) в максимуме численности зайцев, г) в минимуме численности зайцев? Считайте, что динамика популяции рысей и зайцев описываются уравнениями «хищник-жертва» Вольтерры.

Solution**П.сб-**

Портрет. Нарисуйте фазовый портрет нелинейного бездиссипативного (консервативного) осциллятора при: а) $U(x) = -x^3$; б) $U(x) = -\sin x$; в) $U(x) = -x^2$; г) $U(x) = e^{-x}$.

Solution**П.сб-**

Векторная диаграмма. Используя векторную диаграмму, найдите амплитуду колебаний $a \cos \omega t + b \sin \omega t + c \cos(\omega t + \pi/4) + d \sin(\omega t - \pi/4)$ при а) $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ б) $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$.

Solution**П.сб-**

Сепаратриса. Найдите сепаратрису и закон движения по ней для осцилляторов: а) $\ddot{x} \pm \sin x = 0$; б) $\ddot{x} \pm x \mp x^2 = 0$; в) $\ddot{x} \pm x \mp x^3 = 0$.

Solution**П.сб-**

Линейные колебания нелинейной системы. Найдите период T малых (гармонических) колебаний системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - x + \beta x^n = 0, \beta > 0$, для $n = 2, 3, 4$. Вычислите поправку на неизохронность $\delta T(a)$ периода этих колебаний в зависимости от амплитуды $a \ll \beta^{\frac{1}{1-n}}$

Solution**П.сб-**

Возмущение движения осциллятора. Движение линейного осциллятора без трения с массой m и периодом T возмущено малой добавкой к его потенциалу $\delta U(x) = \gamma x^n$. Найдите поправку на неизохронность $\delta T(a)$ к периоду его колебаний в зависимости от их малой амплитуды $a \ll (m/\gamma T^2)^{\frac{1}{n-2}}$ для $n = 3, 4$. Рассмотрите также случай $n = 2, \gamma \ll m\omega^2$.

Solution**П.сб-**

Высшие гармоники. Нелинейный осциллятор описывается уравнением $\ddot{x} + x + \beta x^n = 0$. При его малых колебаниях из-за нелинейности возникают высшие гармоники. Вычислите их частоты для $n = 2, 3, 4$.

Solution**П.сб-**

Параметрическая неустойчивость. Осциллятор Матье $\ddot{x} + 2r\dot{x} + (1 + p \cos qt)x = 0$ совершает параметрические колебания вблизи первого резонанса. Будет ли иметь место неограниченное возрастание амплитуды колебаний при а) $r = 0.01, p = 0.05, q = 2.05$; б) $r = 0.05, p = 0.01, q = 2.01$; в) $r = 0.01, p = 0.01, q = 1.95$; г) $r = 0.05, p = -0.05, q = 1.99$?

Solution**П.сб-**

Инвертированный маятник. Маятник с вибрирующей точкой подвеса вблизи верхнего положения равновесия описывается уравнением Стефенсона: $\ddot{x} - x = px \cos qt$. Выясните, является ли это положение устойчивым. Если да, то каков период T малых колебаний маятника в нем при а) $p = 20, q = 10$; б) $p = 40, q = 20$; в) $p = 8, q = 5$; г) $p = 75, q = 15$.

Solution**П.сб-**

Маятник Капицы с зубочисткой. Получите уравнение движения маятника Капицы, в котором колеблющаяся часть представляет собой однородную тонкую зубочистку длиной l . Точка подвеса зубочистки совершает быстрые осцилляции с частотой ω и амплитудой a в а) вертикальном, б) горизонтальном направлении.

Solution**П.сб- Предельный цикл осциллятора Ван-дер-Поля.**

Осциллятор Ван-дер-Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает квазигармонические ($\varepsilon \ll 1$) автоколебания. Найдите амплитуду колебаний при а) $\varepsilon = 0.01, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 0.05, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 0.01, \beta = 9$; г) $\varepsilon = 0.05, \beta = 2$.

Solution**П.сб-**

Предельный цикл осциллятора Рэля. Осциллятор Рэля $\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает квазигармонические ($\varepsilon \ll 1$) автоколебания. Найдите амплитуду колебаний при а) $\varepsilon = 0.01, \beta = 3$; б) $\varepsilon = 0.05, \beta = 12$; в) $\varepsilon = 0.01, \beta = 0.75$; д) $\varepsilon = 0.05, \beta = 27$.

Solution**П.сб- Релаксационные колебания осциллятора Ван-дер-Поля.**

Осциллятор Ван-дер-Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает релаксационные ($\varepsilon \gg 1$) автоколебания. Оцените их период T при а) $\varepsilon = 100, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 200, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 300, \beta = 9$; д) $\varepsilon = 500, \beta = 2$.

Solution**П.сб-**

Релаксационные колебания осциллятора Рэля. Осциллятор Рэля $\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ совершает релаксационные ($\varepsilon \gg 1$) автоколебания. Оцените их период T при а) $\varepsilon = 100, \beta = 1$; б) $\varepsilon = 200, \beta = 4$; в) $\varepsilon = 300, \beta = 9$; д) $\varepsilon = 500, \beta = 2$.

Solution**П.сб-**

Бусинка на вращающейся спице. Велосипедное колесо вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω . По спице может без трения скользить бусинка массой m , соединенная с осью колеса пружиной жесткостью k . Найдите частоту Ω колебаний бусинки около положения равновесия.

Solution**П.сб-**

Молекула азота. В молекуле N_2 частота колебаний атомов $\approx 4 \cdot 10^{16} \text{с}^{-1}$, масса одного атома $\approx 2.3 \cdot 10^{-26}$ кг. Найдите: а) коэффициент k квазиупругой силы, действующей между атомами; б) вторую производную потенциальной энергии взаимодействия атомов $U''(r)$ в положении равновесия $U'(r) = 0$.

Solution**П.сб-**

LC-контур с нелинейной индуктивностью. Найдите асимптотическое решение уравнения колебаний LC-контура с «мягкой» нелинейностью индуктивности вида $L = L_0(1 - I^2/I_0^2)$ при колебаниях с малой амплитудой тока $I_m \ll I_0$. Вычислите зависимость частоты $\omega(I_m)$ от амплитуды колебаний.

Solution**П.сб-**

LC-контур с нелинейной емкостью. То же, что в предыдущей задаче для LC-контура с нелинейной вольт-кулоновской характеристикой конденсатора $C = C_0(1 + q^2/q_0^2)^{-1}$ при колебаниях с малой амплитудой заряда $q_m \ll q_0$.

Solution**П.сб-**

Треугольная молекула M_3 . Молекула M_3 состоит из трех одинаковых атомов массой M и представляет собой равносторонний треугольник. Частота симметричной моды молекулы равна ω . Найдите остальные собственные частоты молекулы.

Solution**П.сб-**

Качающийся пресс-папье. Определите период малых колебаний однородного полуцилиндра радиуса R , находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может кататься без скольжения.

Solution**П.сб-**

Интеграл движения системы «хищник-жертва». Найдите первый интеграл движения системы уравнений «хищник-жертва». Проверьте, что при малых численностях он дает гиперболическую, а при больших - линейную связь численностей хищников и жертв.

Solution**П.сб- Водород и дейтерий.**

Как относятся частоты колебаний молекул H_2 и HD (D - атом дейтерия)?

Solution**П.сб-**

Линейная симметричная молекула. Возможны два типа линейных колебаний молекулы углекислого газа CO_2 : а) ядра кислорода движутся в противоположные стороны, а ядро углерода остаётся на месте; б) ядра кислорода движутся с одинаковыми скоростями в направлении, противоположном направлению движения ядра углерода. Определите отношение частот этих колебаний. Сравните с экспериментальными значениями колебательных квантов 0,276 эВ и 0,163 эВ.

Solution**П.сб-**

Маятник на ползунке. Брусок массой M , соединенный с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости κ , может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на нерастяжимой нити длиной l подвешен груз массой m . Составьте уравнения движения системы. Найдите собственные частоты малых колебаний при $\kappa = 0$.

Solution**П.сб-**

Маятник на наклонной стенке. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длиной l . Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной стенке на небольшой угол $\beta > \alpha$, и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если удар шарика о стенку абсолютно упругий.

Solution**П.сб-**

Изгиб пика резонанса. На сколько и в какую сторону по частоте загибается пик резонанса нелинейного осциллятора с $U(x) = m\omega^2 x^2/2 + \beta x^4/4$ в зависимости от амплитуды колебаний a и знака β ?

Solution**П.сб-**

Превращения особой точки. При изменении диссипации γ топология особой точки нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ изменяется. При каком γ это происходит и каков новый тип особой точки для: а) центра при $U = m\omega^2 x^2/2$; б) седла при $U = m\omega^2(1 - \cos x)$; в) фокуса при $U = m\omega^2 x^2/2$; д) фокуса при $U = m\omega^2(1 - \cos x)$; е) узла при $U = m\omega^2 x^2/2$?

Solution**П.сб-**

Критерий слабости диссипации. В положении устойчивого равновесия $U'(a) = 0$ нелинейного осциллятора $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial U/\partial x = 0$ известна величина $U''(a)$. Получите для γ условие слабости диссипации.

Solution**П.сб-**

Адиабатический осциллятор. Жесткость пружины $\kappa(t)$ осциллятора с массой m медленно изменяется по закону $\kappa(t) = \kappa_0(1 + t/\tau)$. Запишите критерий медленности. Как со временем изменяется амплитуда колебаний осциллятора $x_m(t)$?

Solution**П.сб-**

Инварианты солнечной системы. Найдите адиабатические инварианты для задачи Кеплера. Выразите параметр p и эксцентриситет ε эллиптической орбиты через адиабатические инварианты задачи Кеплера. 146. Испарение звезды. Планета массой m движется вокруг своей звезды массы M по эллипсу с осями a и b . Найдите адиабатические инварианты движения планеты, если: а) вследствие излучения масса звезды медленно уменьшается; б) гравитационная постоянная γ медленно изменяется во времени вследствие космологических причин.

Solution**П.сб-**

Магнитная пробка. Частица с зарядом e и массой m движется в плоскости, перпендикулярной к однородному магнитному полю $B(t)$, медленно изменяющемуся по величине. Сформулируйте критерий медленности. Найдите адиабатический инвариант движения. Используя его, объясните эффект выталкивания частиц из областей сильного поля.

Solution**П.сб-**

Трансатлантический туннель. В земном шаре прорыт прямой туннель, соединяющий Москву и Нью-Йорк. Сколько времени будет двигаться в таком туннеле от одного конца до другого поезд с выключенными двигателями, если пренебречь трением и влиянием вращения Земли? Чему равна скорость поезда в середине туннеля?

Solution**П.сб-**

Эффективный потенциал. Движение частицы массой m в потенциальном поле $U(x)$ под действием быстро осциллирующей силы $f(x)\cos\omega t$ складывается из гладкой $x(t)$ и быстропеременной $\xi(t)$ составляющих. Покажите, что эффективный потенциал, в котором происходит движение, равен $U_{\text{эфф}}(x) = U(x) + m\bar{\xi}^2/2$.

Solution**П.сб-**

«Вечный» маятник. Недорогая игрушка «настольный антистресс» демонстрирует незатухающие колебания. Объясните причину ее «вечного» движения. На основе предложенной Вами теории оцените время работы игрушки.

Solution**4.4.6 Other Oscillation Exercises from Pukhov 2****П.сб-**

Колебания обруча. К невесомому обручу радиуса r , расположенному вертикально, прикреплена материальная точка массой m . Обруч может кататься без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Если обруч вывести из положения равновесия и отпустить, то возникнут колебания. Найдите период малых колебаний обруча.

Solution**П.сб-**

Прыгающий шарик. Стальной шарик свободно падает в поле тяжести и периодически упруго отражается от горизонтальной плиты. а). Пренебрегая потерями при отскоке, найдите период этих колебаний $T(E)$ в зависимости от энергии шарика E . б). Если плита лежит на полу поднимающегося лифта, то, вследствие неравномерности хода лифта, эффективная величина ускорения свободного падения $g(t)$ медленно изменяется во времени. Запишите критерий медленности. Как при этом изменяется энергия $E(t)$ прыгающего шарика?

Solution**П.сб-**

Биения. Вы находитесь в салоне двухмоторного прогулочного катера, валы которого вращаются со скоростью 5000 об/мин. Допустимое отличие угловой скорости их вращения составляет 10 об/мин. Каков период модуляции звука двигателей (в с), который Вы слышите?

Solution**П.сб-**

Фигуры Лиссажу. Тело массой m может скользить без трения по горизонтальной плоскости и растянуто на четырех пружинках. Две вдоль оси x имеют жесткость κ_x , две другие вдоль оси y имеют жесткость κ_y . В состоянии покоя тела пружинки не растянуты. Найдите и опишите все возможные замкнутые траектории тела. Сколько точек поворота имеется у них в направлении x и y ?

Solution**П.сб-**

Демонстрация маятника Жуковского. Период колебаний маятника Жуковского в режиме реального времени составляет секунды две. Расстояние между осями вращающихся дисков сантиметров 30. Используя эти данные, оцените величину коэффициента трения скольжения доски о диски.

Solution**П.сб-**

Бритва в роли инвертированного маятника. Маленькая электробритва «Браун» переделана в маятник Капицы, точка подвеса которого осциллирует вертикально с большой частотой. Эксперименты показали, что вставленная в держатель подвеса зубочистка устойчиво стоит вертикально, если ее длина не превышает 12 см. При больших длинах бритва не может обеспечить ее устойчивость в верхнем

положении. Медленные колебания маятника в верхнем положении, когда длина зубочистки 8 см, имеют период 1,5 с. Оцените по порядку величины как частоту, так и амплитуду колебаний точки подвеса.

Solution

П.сб-

Синхронизация метрономов пивными банками. Существует простой способ синхронизировать два метронома, которые изначально совершают автоколебания с разными фазами (не в такт). Если их поставить на доску, стоящую на двух пустых пивных банках, способных кататься по столу, то метрономы постепенно начинают синхронизироваться. Этот процесс известен как фазовая синхронизация или эффект Гюйгенса. Каждый из метрономов весит 100 грамм, стрелка метронома - 10 грамм. Доска весит 100 грамм, массой пустых банок диаметром 7 сантиметров можно пренебречь. Период автоколебаний метрономов составляет около трети секунды. Оцените время, за которое они синхронизируются.

Solution

П.сб-

Оборотный маятник. Физический маятник подвешен за точку A , находящуюся на расстоянии a от его центра масс C . Если двигать точку подвеса вдоль линии AC , то с изменением a будет изменяться и период колебаний маятника $T(a)$. Покажите, что у этой зависимости есть минимум $T_*(a_*)$ (теорема Гюйгенса). Если величины a_* и T_* определить экспериментально, то можно вычислить ускорение свободного падения g . Как это сделать?

Solution

П.сб-

Инвертированный маятник с диссипацией. Малые колебания инвертированного маятника с диссипацией описываются уравнением Стефенсона $\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x = (a\omega^2/l)x \cos \omega t$. Получите критерий устойчивости маятника в верхнем положении. Найдите период его колебаний в этом положении.

Solution

П.сб-

Скрещенные электрическое, магнитное и гравитационные поля. Частица с массой m и зарядом e движется в однородных постоянных взаимно перпендикулярных полях: электрическом, магнитном и гравитационном. В начальный момент времени частица покоилась. Опишите движение частицы. Найдите величину максимальной скорости, приобретенной частицей.

Solution

П.сб-

Классический эффект Зеемана. Найдите собственные частоты колебаний заряженного 3D-осциллятора, помещенного в однородное магнитное поле B . Частота осциллятора в отсутствие поля ω_0 , заряд e , масса m .

Solution

П.сб-

Вертикально движущаяся точка подвеса. Точка подвеса математического маятника движется в вертикальном направлении по закону $z(t)$. Найдите уравнение движения маятника. При какой зависимости $z(t)$ частота колебаний маятника пропорциональна его начальной угловой скорости? Найдите адиабатические инварианты маятника при медленном движении точки подвеса. Укажите критерий медленности.

Solution**П.сб-**

Горизонтально движущаяся точка подвеса. Точка подвеса математического маятника движется в горизонтальном направлении по закону $x(t)$. Найдите уравнение движения маятника. При какой зависимости $x(t)$ период малых колебаний маятника удваивается? Найдите адиабатические инварианты маятника при медленном движении точки подвеса. Укажите критерий медленности.

Solution**П.сб-**

Давление на стенки. Частица массой m движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a . Вычислите среднюю силу, с которой частица действует на стенку ямы, если энергия частицы равна E . Обобщите Ваш результат на 3D-случай.

Solution**П.сб-**

Половина шара. Половина однородного шара с радиусом r и массой m находится на горизонтальной плоскости выпуклой стороной вниз.

Найдите частоту ее малых колебаний, если плоскость а) шероховатая, б) гладкая.

Solution**П.сб-**

Крутильный маятник. Твердое тело подвешено на упругом круглом цилиндре длиной l , радиусом r , плотностью ρ , с модулем Юнга E . Момент инерции тела относительно оси цилиндра I . Найдите частоту малых крутильных колебаний системы.

Solution**П.сб-**

Частица в яме. Частица массой m движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a . Найдите изменение энергии частицы $E(t)$ при медленном изменении $a(t)$. Укажите критерий медленности. Обобщите Ваш результат на 3D-случай.

Solution**П.сб-**

Шарик прыгает в лифте. Шарик, находящийся в лифте, подскакивает над упругой плитой. Как изменяется высота подскока шарика $h(t)$ при медленном подъеме лифта $z(t)$?

Solution**П.сб-**

Частица в ящике. Частица движется внутри параллелепипеда с упругими стенками. Как изменяется энергия частицы при медленном изменении размеров параллелепипеда?

Solution**П.сб-**

Частица в сфере. Частица движется внутри сферы с упругими стенками, радиус которой медленно изменяется. Как изменяется при этом энергия частицы?

Solution

П.сб-

Неизотропный осциллятор. Найдите адиабатические инварианты и частоты колебаний неизотропного 3D-осциллятора:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2).$$

Solution

П.сб-

Кто такой: а) Вольтерра; б) Лотка; с) Белоусов; d) Ланчестер; е) Лиувилль; f) Боголюбов; g) Дuffинг; h) Матве; i) Андронов; j) Томсон; k) Капица; 1) Ферми; m) Лоренц; n) Арнольд; о) Хаббл; p) Раби; q) Челомей; r) Жуковский (когда жил, где работал, что сделал)?

4.4.7 Exercises from Naife 1

1.1. Определить при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядок следующих выражений:

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad 4\pi^2\varepsilon, \quad 1000\varepsilon^{1/2}, \quad \ln(1+\varepsilon), \quad \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}, \quad \frac{\varepsilon^{3/2}}{1+\sin\varepsilon},$$

$$\frac{\varepsilon^{1/2}}{1-\cos\varepsilon}, \quad \operatorname{sech} -1\varepsilon$$

$$e^{\operatorname{tg} \varepsilon}, \quad \ln \left[1 + \frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\varepsilon(1-2\varepsilon)} \right], \quad \ln \left[1 + \frac{\ln \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon} \right], \quad e^{-\operatorname{ch}(1/\varepsilon)}, \quad \int_0^\varepsilon e^{-s^2} ds.$$

1.2. Расположить следующие выражения в ряд по убывающему порядку при малых ε : $\varepsilon^2, \varepsilon^{1/2}, \ln(\ln \varepsilon^{-1}), 1, \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{-1}, \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}, e^{-1/8}, \ln \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{3/2}, \varepsilon, \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1}$.

1.3. Разложить каждое из следующих выражений при малом ε , сохранив три члена:

- (a) $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4 t}$,
- (б) $(1 + \varepsilon \cos f)^{-1}$,
- (в) $(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2)^{-2}$,
- (г) $\sin(s + \varepsilon\omega_1 s + -\varepsilon^2\omega_2 s)$,
- (д) $\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$,
- (е) $\ln \frac{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}{\sqrt{1+2\varepsilon}}$.

1.4. Пусть $\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2$, $h = (3/2)[1 - \sqrt{1 - 3\mu(1-\mu)}]$. Разложить величину h при малом e , сохранив три члена.

1.5. Найти с точностью до второго порядка решение уравнения

$$x = 1 + \varepsilon x^2, \quad \varepsilon \ll 1$$

и сравнить его с точным решением при $\varepsilon = 0, 1$ и $\varepsilon = 0,001$.

1.6. Показать, что асимптотическое разложение функции

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

для больших x имеет вид

$$F(x) = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \dots \right) \sin x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \dots \right) \cos x$$

Сходится ли этот ряд? Оценить остаточный член сверху и показать, что при $x \rightarrow \infty$ он стремится к нулю быстрее, чем последний член разложения.

1.7. Найти при $x = 0$ два члена разложения для s , если $x = s - (\varepsilon/3s^2) - (3\varepsilon^2/10s^4)$.

1.8. Пусть $x = s + \varepsilon(2 - (2/3)s^{1/2}) + (42/5)\varepsilon^2 s^{1/2}$. Показать, что решение уравнения $dx/ds = 0$ имеет вид

$$s = \frac{1}{9}\varepsilon^2 - \frac{14}{5}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

Найти затем значение x , соответствующее этой величине.

1.9. Пусть

$$y_0(s) + \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \dots = A$$

$$1 = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \dots$$

Показать, что

$$s = 1 - \varepsilon x_1(1) - \varepsilon^2 [x_2(1) - x_1'(1)x_1(1)] + \dots$$

и найти затем $y_0(1)$, $y_1(1)$ и $y_2(1)$.

1.10. Рассмотреть уравнение

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1$$

(а) Определить три члена разложения решения для малого ε .

(б) Показать, что точное решение имеет вид

$$y = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1}.$$

(в) Разложить это точное решение для малого ε и сравнить с результатом п. (а).

(г) Справедливо ли это разложение для всех x ?

1.11. Для решения уравнения

$$y'' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) y = 0$$

определить разложение по координате вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n+\sigma}$$

1.12. Определить с точностью до второго порядка (т. е. найти три члена) разложения для решений

(а) $\ddot{u} + u = \varepsilon u^2, \quad \varepsilon \ll 1,$

(б) $\ddot{u} + u = -\varepsilon \dot{u}$

при условиях $u(0) = a, \dot{u}(0) = 0$. Являются ли эти разложения равномерно пригодными

1.13. Найти при малом ε разложение первого порядка (двучленное) для решения системы

$$\begin{aligned} s \frac{dx}{ds} &= x + \varepsilon y \\ s \frac{dy}{ds} &= -(2+x)y, \quad y(1) = e^{-1}, \quad x(1) = 1 \end{aligned}$$

1.14. Используя асимптотическое разложение (1.5.13), показать, что большие нули ξ функции $J_0(x)$ являются решениями уравнения

$$\operatorname{ctg} \left(\xi - \frac{1}{4} \pi \right) = -\frac{1}{8\xi} + \frac{33}{512\xi^3} + \dots$$

и что

$$\xi = \frac{1}{4} \pi (4n+3) + \frac{1}{2\pi(4n+3)} + \dots \quad \text{при } n \text{ целом.}$$

1.15. Показать, что уравнение

$$u\ddot{u} + \dot{u} + tu = t^2$$

удовлетворяется при $t \rightarrow \infty$ разложениями (Левинсон [1969])

$$u = -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 - 9t \ln t + o\left(\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$u = t + (b_1 \sin t + b_2 \cos t) t^{-1/2} + o(t^{-1})$$

где c_i и b_i - постоянные.

1.16. Показать, что уравнение Беллмана [1955]

$$(\ddot{u})^2 = \dot{u} + u$$

при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяется разложениями (Левинсон [1969])

$$u = ae^{-t} - a^2 e^{-2t} + O(e^{-3t})$$

$$u = \frac{1}{144} t^4 + \frac{1}{30} t^3 \ln t + c_1 t^3 + c_2 t^{-2} + O(t^2 \ln^2 t)$$

где c_i - постоянные.

4.4.8 Exercises from Naife 2

2.1. Для уравнения

$$(x-1)(x-\tau) + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon \ll 1,$$

определить трехчленное разложение решения, близкого к единице. Будет ли оно пригодным для всех значений τ ?

2.2. Вычислить три члена в асимптотическом разложении решения задачи

$$\varepsilon y' + xy = -1, \quad y(0) = 1.$$

Какова здесь область неравномерности?

2.3. Задача о изоэнергетических цилиндрических ударных волнах может быть приведена к виду (Леви [1959])

$$\alpha w^2 g \frac{dg}{dw} = g(1 - w^2) - w(1 - \beta w^2)$$

где α и β - постоянные. Для $\alpha \ll 1$ определить разложение g до второго порядка по α и рассмотреть вопрос о его равномерности.

2.4. Для малого ε определить разложение первого порядка (двучленное) в задаче

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right), \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Является ли это разложение равномерно пригодным?

2.5. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y)y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$$

(а) Определить в этой задаче разложение второго порядка (трехчленное), предполагая, что $\varepsilon \ll 1$.

(б) Какова область его неравномерности?

(в) Показать, что точное решение задачи имеет вид

$$y = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

(г) Разложить точное решение для малого ε и сравнить с результатом п. (а). Можете ли вы сделать какой-либо вывод об источнике неравномерности?

2.6. Найти при малом ε разложение первого порядка (двучленное) для задачи

$$(x + \varepsilon y)y' - \frac{1}{2}y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1$$

Какова область его неравномерности?

2.7. Определить разложение первого порядка для малого ε :

$$(x + \varepsilon y)y' + xy = 6e^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}.$$

Какова область его неравномерности?

2.8. Определить двучленное разложение частного решения уравнения

$$\varepsilon u''(1 - x^2)u = f(x).$$

Какие условия нужно наложить на f , чтобы это разложение оказалось равномерным?

2.9. Определить при большом λ разложение вида

$$y = \exp[\lambda \varphi_1(x) + \varphi_0(x) + \dots]$$

для решения уравнения

$$xy'' + y' + \lambda^2 x(1 - x^2)y = 0$$

Где это разложение нарушается?

2.10. Определить двучленное разложение для решения уравнения

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u + k \cos \omega t = \varepsilon u^2.$$

Справедливо ли это разложение при всех значениях n ?

2.11. Определить при малом ε разложение второго порядка (трехчленное) для решения задачи

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)u = 0, \\ u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Для каких значений δ это разложение будет неравномерным?

2.12. Показать, что разложение первого порядка при малом μ в задаче

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0$$

имеет вид

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}x^{3/n} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3n} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + O[\mu^2(1-x) - 1]$$

Какова область его неравномерности?

2.13. Для каких значений $a > 0$ разложение

$$u = a \cos t - \frac{\varepsilon}{8} \left[(a^3 - 4a) t \cos t + \frac{1}{4} a^3 \cos 3t \right] + \dots$$

является равномерно пригодным? Существует ли значение $a > 0$, при котором разложение

$$u = a \cos t + \frac{\varepsilon a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \cos 3t - 3t \sin t \right) + \dots$$

равномерно пригодным?

2.14. Положить во втором разложении упр. 2.13 $t = (1 + \varepsilon\sigma)s$ в разложить полученное выражение с точностью до $O(\varepsilon)$ при фиксированном s . Можно ли подобрать такое σ , чтобы это разложение оказалось равномерно пригодным?

2.15. Для уравнения

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

ввести новую переменную

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \right) t$$

В полученной задаче определить разложение первого порядка. Является ли оно равномерно пригодным? Можно ли высказать какое-либо суждение о роли независимых переменных в приведении разложений к равномерно пригодному виду?

2.16. Рассмотреть задачу

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 p \frac{dp}{dx} \right) = \Lambda \frac{d}{dx} (ph),$$

$$p(0) = p(1) = 1$$

где $h = h(x)$ -заданная функция. Определить разложение для больших Λ . Обсудить неравномерность этого разложения. Опустить условие $p(1) = 1$ и вычислить два члена.

2.17. Рассмотреть задачу

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} = \alpha^2 f \sin(\xi + \beta)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \cos(\xi + \beta)$$

$$f'(0) = \beta(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

возникающую при изучении изгиба цилиндрических труб (Рейсснер и Вайничке [1963]). Определить разложение с точностью $O(\alpha^2)$ при малом α и обсудить вопрос о его равномерности.

2.18. Задача о ламинарном течении в канале с равномерно пористыми стенками различной проницаемости может быть приведена к виду (Праудман [1960]; Террил и Шреста [1965])

$$f''' + R(f f'' - f'^2) = c$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - \alpha, \quad f'(1) = 0$$

Показать, что при малом α справедливы соотношения

$$f = 1 + \alpha A [2(e^{-Rx} + Rx - 1) - R(1 - e^{-R})x^2] + O(\alpha^2)$$

$$c = 2\alpha R^2 A (e^{-R} - 1) + O(\alpha^2)$$

и определить A .

2.19. Определить разложение первого порядка в задаче

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u^3, \quad \varepsilon \ll 1, \\ u(x, 0) = a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

и обсудить вопрос о его равномерности.

2.20. Определить прямое разложение первого порядка при малом ε в задаче

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \varepsilon u u_x$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c[g'(x) - f'(x)].$$

Здесь $f(x), g(x)$ -ограниченные функции x . Обсудить вопрос о его равномерности.

4.4.9 Exercises from Naife 3

3.1. Рассмотреть задачу

$$\ddot{u} + u = \varepsilon u^2, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0$$

- (а) Определить прямое разложение второго порядка (три члена) и исследовать его равномерность
- (б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.
- (в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка (два члена), используя метод растянутых параметров, и сравнить результат с п. (б).

3.2. (а) Показать, что свободное движение точечной массы вдоль параболы $x^2 = 2pz$, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω , описывается уравнением

$$\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \ddot{x} + \frac{x \dot{x}^2}{p^2} + \left(\frac{g}{p} - \omega^2\right) x = 0$$

- (б) Определить двучленное прямое разложение для малых амплитуд и исследовать его равномерность.
- (в) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.
- г) Построить одночленное равномерно пригодное разложение помощью метода растянутых параметров и сравнить результат с п. (в).

3.3. Определить двучленное равномерно пригодное разложение при малых амплитудах для решения уравнения

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

описывающего колебания маятника.

3.4. Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для периодического решения уравнения

$$\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u}$$

заметив, что амплитуда не произвольна.

3.5. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для периодического решения системы уравнений

$$\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - z) \dot{u} \\ \dot{z} + z = u^2$$

3.6. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^2 + k \cos \omega t$$

Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для периодических решений, если

(а) $\omega_0 \approx 2\omega$ (указание: положить $\omega_0 = 2\omega + \varepsilon \sigma$ и $u = u_0 + \varepsilon u_1 \dots$, где $u_0 = a \cos(2\omega t + \beta) + (1/3)h\omega^{-2} \cos \omega t$, затем определить a и β из уравнения для u_1);

(б) $\omega_0 \approx \omega/2$ (в этом случае произвольно).

3.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^3 + k \cos \omega t$$

Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для периодических решений, если

(а) $\omega_0 \approx 3\omega$ и (б) $\omega_0 \approx \omega/3$

3.8. Определить разложения второго порядка для нечетных решений, соответствующих переходным кривым уравнения

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)u = 0$$

где δ близко к 1 или к 4.

3.9. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta u}{1 + \varepsilon \cos 2t} = 0.$$

- (a) Построить разложения второго порядка для переходных кривых вблизи $\delta = 0, 1, 4$ (Шень [1959])
 (б) Используя метод Уиттекера, построить разложение второго порядка для и вблизи этих кривых.
 3.10. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta - \varepsilon \cos^2 t}{1 - \varepsilon \cos^2 t} u = 0$$

- (a) Определить разложения второго порядка для первых трех переходных кривых (Рэнд и Дзен, [1969]) (т. е. вблизи $\delta = 0, 1$ и 4).
 (б) Используя метод Уиттекера, найти и вблизи этих кривых.
 3.11. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos^3 t) u = 0.$$

Определить разложения второго порядка для первых трех переходных кривых, используя метод растянутых параметров и метод Уиттекера.

- 3.12. Определить с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическое решение уравнения (Малхолланд [1971])

$$\ddot{u} + \ddot{u} + \dot{u} + u = (1 - u^2 - \dot{u}^2 - \ddot{u}^2) (\ddot{u} + \dot{u}).$$

- 3.13. Построить разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon u^3$$

подчиненное условиям: (а) $u(0) = u(\pi) = 0$ и (б) $u(t) = u(t + 2\pi)$.

- 3.14. Определить разложение первого порядка для системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \lambda u &= \varepsilon (\sin 2t + u^2) u, \\ u(t) &= u(t + 2\pi). \end{aligned}$$

- 3.15. Построить разложения первого порядка для задач

$$\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon t u \tag{a}$$

$$ut = u(t + 2\pi)$$

$$\ddot{u} + \lambda u = \varepsilon (\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t) u \tag{б}$$

$$u(t) = u(t + 2\pi)$$

- 3.16. Определить разложение первого порядка периодического решения при малых амплитудах для системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m} x + g(1 - \cos \theta) - (l + x) \dot{\theta}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l + x} \sin \theta + \frac{2}{l + x} \dot{x} \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

которая описывает колебания качающейся пружины длиной l . k - постоянная, $\omega_1^2 = k/m \approx 4\omega_2^2 = 4g/l$

- 3.17. Свободные колебания шарнирно закрепленной балки на упругом основании описываются краевой задачей

$$\begin{aligned} u_{xxxx} + \gamma u + \varepsilon \gamma u^3 + u_{tt} &= 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\gamma, t) &= 0, \\ u(x, 0) = a \sin x, \quad u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

где γ, a и ε -постоянные. Построить разложения до $O(\varepsilon)$ для частоты колебаний (Хан [1965]).

- 3.18. Продолжить разложения из п. 3.1.4 и 3.1.5 до второго порядка.

- 3.19. Рассмотреть решение следующего уравнения в виде однородных распространяющихся волн

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u^3$$

Решения искать в виде $u = a \exp i(kx - \omega t) +$ высшие гармоники. Определить сдвиг частоты и волнового числа.

- 3.20. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} + u_{xxxx} &= \varepsilon u^3 \\ u(x, 0) = a \cos kx, u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Построить прямое разложение первого порядка.

- (б) Сделать это разложение равномерно пригодным, применив метод перенормировки.
 - (в) Определить разложение, пригодное для $t = O(\varepsilon^{-1})$, используя метод растянутых параметров.
 - (г) Показать, что частота становится веприсгодной вблизи $k = 1$.
 - (д) Удалить особенность, применив метод перенормировки к этой частоте.
 - (е) Показать, что в результате получится ошибочное разложение.
- 3.21. Рассмотреть задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \lambda\varphi &= \varepsilon x^2 \varphi \\ \varphi(x, 0) &= \varphi(x, \pi) = \varphi(0, y) = \varphi(\pi, y) = 0.\end{aligned}$$

Построить разложение первого порядка, если λ близко к 2 или к 5.

3.22. Рассмотреть задачу

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = \varepsilon f(x, y, z) \varphi$$

где φ обращается в нуль на поверхности куба со стороны л. Построить разложения первого порядка, если $\lambda \approx 3$ или 6, если (а) $f = x^2$ и (б) $f = x^2 y$.

3.23. Поперечные свободные колебания шарнирно закрепленной балки приводят к краевой задаче

$$\begin{aligned}EI w_{xxxx} - T w_{xx} + \rho w_{tt} &= 0 \\ T &= \frac{ES}{2l} \int_0^l (w_x)^2 dx \\ w(0, t) &= w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \\ w(x, 0) &= a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_t(x, 0) = 0,\end{aligned}$$

где E, I, ρ, S, a и l - постоянные. Построить разложение первого порядка для малых амплитуд (Ивенсен [1968]).

3.24. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y)y' + y = 0, \quad y(1) = 1$$

- (а) Построить прямое разложение второго порядка. Какова область неоднородности?
- (б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.
- (в) Построить разложение первого порядка (два члена по y и три члена по x), используя метод Лайтхилла, и сравнить его с разложением, найденным в п. (б).
- (г) Найти точное решение, поменяв ролями зависимую и независимую переменные, и сравнить с решениями, найденными в п. (б) и (в).

3.25. Показать, что равномерно пригодное разложение для задачи

$$(x + \varepsilon y)y' + xy = be^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}$$

имеет вид

$$y = e^{-\xi}(b \ln \xi + 1) + O(\varepsilon)$$

где $x = \xi - (b \ln \xi + b + 1) + O(\varepsilon^2)$.

3.26. Рассмотреть задачу

$$(x + \varepsilon y)y' - \frac{1}{2}y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1$$

- (а) Построить прямое разложение второго порядка и исследовать его равномерность.
 - (б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.
 - (в) Получить разложение первого порядка, используя метод Лайтхилла, и сравнить результат с п.)0).
- 3.27. Используя метод перенормировки, сделать разложение из упражнения 2.12 равномерно пригодным.

3.28. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned}(x^n + \varepsilon y)y' + nx^{n-1}y - mx^{m-1} &= 0 \\ y(1) &= a > 1\end{aligned}$$

- (а) Показать, что точное решение имеет вид

$$x^n y + \frac{1}{2}\varepsilon y^2 = x^m + \left(a + -\frac{1}{2}\varepsilon a^2 - 1\right)$$

- (б) Показать, что применение метода Лайтхилла дает

$$y \sim y_0 = (\varepsilon^m + a - 1) \xi_{-n}$$

$$x = \xi - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \xi (y_0^2 - a^2)}{(n-m)\xi^m + n(a-1)} + O(\varepsilon^2)$$

(в) Показать, что приближенное решение непригодно вблизи $x = 0$, за исключением некоторых значений m и n (Камсток [1968]).

(г) Ввести новую переменную $z = x^n$ в исходную задачу и затем, растянув z , построить приближенное решение для y . Определить условия, при которых новое разложение будет пригодным вблизи начала координат (Бернсайд [1970]). Исходя из этого, определить роль замены независимой переменной в превращении приближенного решения в равномерно пригодное.

3.29. Рассмотреть задачу

$$(1 + \varepsilon u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = \varepsilon \varphi(x)$$

(а) Определить прямое разложение первого порядка при $\varepsilon \ll 1$ и исследовать его равномерность.

(б) Сделать это разложение равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(в) Построить разложение первого порядка, используя метод Лайтхилла, и сравнить результат с п. (б).

3.30. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_x u_{xx}$$

$$u(0, t) = \varepsilon \varphi(t), \varphi(t) = 0 \text{ при } t \leq 0$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq 0$$

(а) Построить прямое разложение первого порядка и сделать его равномерно пригодным, используя метод перенормировки.

(б) Определить разложение первого порядка, используя метод айтхилла, и сравнить с п. (а). Показать, что перенормировка u вместо u_x приводит к неверным результатам.

3.31. Рассмотреть задачу (Лайтхилл [1949a]):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n}{x+y} u = u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad u = v_y$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0,$$

$$u(0, y) = \varepsilon \varphi(y) y^{-n}, \quad 0 < n < 1$$

где $\varphi(0) = 0$. Показать, что равномерно пригодное разложение первого порядка имеет вид

$$u = \varepsilon \varphi(\eta) (x + \eta)^{-n} + O(\varepsilon^2)$$

$$y = \eta - \frac{\varepsilon \varphi(\eta) (x + \eta)^{1-n}}{1-n} + O(\varepsilon^2)$$

3.32. Рассмотреть задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \varepsilon u_x u_{xx}$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c(g'(x) - f'(x))$$

где $f(x)$ и $g(x)$ -ограниченные функции x .

(а) Определить прямое разложение первого порядка. Можно ли сделать его равномерно пригодным, используя метод перенормировки?

(б) Получить разложение первого порядка, используя метод растянутых координат.

3.33. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y' + y = 1, \quad y(1) = 1$$

(а) Показать, что метод Лайтхилла не дает равномерно пригодного разложения.

(б) Показать, что растяжение y вместо x дает равномерно пригодное разложение

(в) Исследовать, может ли растяжение y' дать равномерно пригодное разложение для

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

3.34. Рассмотреть задачу

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u, \dot{u})$$

(а) Показать, что метод растянутых координат (МРК) приводит к

$$u = a \sin \varphi + O(\varepsilon), \quad \varphi = s + c$$

где

$$t = s + \varepsilon t_1(s) + \dots,$$

$$at_1'' = \alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \varphi, a \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi.$$

$$2at_1' = \beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \varphi, a \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi.$$

(б) Показать, что $\alpha = 0$ и β - постоянная, такая, что $t_1 = (1/2)\beta a^{-1}s + \text{const.}$

(в) Исходя из этого показать, что МРК дает только предельные циклы или предельные точки для этой задачи (Найфэ [1966]).

4.4.10 Exercises from Naife 4

4.1. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y'' + y' = 2x$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

(а) Определить трехчленное внешнее разложение.

(б) Определить трехчленное внутреннее разложение.

(в) Ссратить оба эти разложения и построить составное разложение.

(г) Определить трехчленное равномерно пригодное разложение, используя метод составных разложений (МСР) и сравнить результат с результатом (в).

4.2. Определить разложения второго порядка (трехчленные разложения) для задачи

$$\varepsilon y'' - y' = 2x$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя а) метод сращивания асимптотических разложений (МСАР) и б) МСР.

4.3. Определить равномерно пригодные разложения второго порядка для задач

$$\varepsilon y'' \pm (2x + 1)y' + 2y = 0$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя а) МСАР, б) метод Латты и в) метод Бромберга-Вишика -Люстерника.

4.4. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для задачи

$$\varepsilon y'' - a(x)y' + b(x)y = 0, \quad a(x) > 0,$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя а) МСАР и б) МСР.

4.5. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y''' - y' + y = 0$$

$$y(0) = x, \quad y(1) = \beta, \quad y'(1) = \gamma.$$

а) Показать, что пограничный слой существует у обоих концов и характеризуется преобразованиями растяжения

$$\eta = x/\varepsilon \quad \text{и} \quad \zeta = (1 - x)/\varepsilon$$

б) Определить равномерно пригодное разложение второго порядка, используя МСАР.

в) Определить разложение второго порядка, используя МСР и полагая

$$y = F(x; \varepsilon) + G(\eta; \varepsilon) + H(\zeta; \varepsilon),$$

где $G \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$ и $H \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

4.6. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка (двучленные равномерно пригодные разложения) для задачи (2.2.28)-(2.2.30), используя оба варианта МСР.

4.7. Показать, что МСАР не может быть использован для получения равномерно пригодного разложения для

$$\varepsilon^2 y'' + y = f(x),$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Можно ли из этого примера заключить, что МСАР неприменим к задачам колебаний?

4.8. Рассмотреть задачу, определяемую (2.2.28) при $a \leq r \leq b$ с граничными условиями

$$u(b) = b\alpha, \quad \frac{du}{dr}(b) = \alpha$$

Определить двучленные равномерно пригодные разложения, используя а) МСАР и б) .

4.9. Колебания балки с жестко закрепленными концами описываются уравнением

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda^2 u$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

Определить разложение первого порядка при малых ε для u и λ .

4.10. Теплопередача в одномерном стационарном потоке без диссипации описывается краевой задачей (Ханкс [1971])

$$\varepsilon \frac{d^2 T}{dx^2} + x \frac{dT}{dx} - xT = 0$$

$$T(0) = T_0, \quad T(l) = T_l$$

Определить разложения первого порядка, используя а) МСАР и б) два варианта .

4.11. Определить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения

$$(x + \varepsilon y)y' + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1},$$

используя МСАР. Можно ли сделать вывод, что метод растянутых координат (МРК) является более пригодным к таким задачам?

4.12. Определить одночленные разложения для решения задач

$$\varepsilon y'' \pm (2x + 1)y' + y^2 = 0$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

используя МСАР и МСР.

4.13. Определить одночленные разложения для

$$y'' + a(x)y' + y^2 = 0,$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

используя МСАР и МСР, если $a(x)$ а) отрицательно и б) положительно на интервале $0 \leq x \leq 1$.

4.14. Определить разложение первого порядка для задачи из предыдущего упражнения, если $a(x)$ имеет простой нуль μ , где $0 \leq \mu \leq 1$.

4.15. Определить равномерно пригодные разложения первого порядка для

$$\varepsilon y'' \pm yy' - y = 0,$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

используя МСАР и МСР.

4.16. Ламинарный поток в канале с пористыми стенками в случае всасывания приводит к задаче (Прудмен [1960]; Террил и Шреста [1965])

$$\varepsilon f''' - ff'' + f'^2 = c(\varepsilon)$$

$$f(0) = 1 - \alpha = a, \quad f'(0) = 0$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0$$

При положительных a : а) показать, что внешнее и внутреннее разложения первого порядка имеют вид

$$f^0 = a \operatorname{ch} xb + \varepsilon f_1(x) + \dots,$$

$$f^i = 1 + \varepsilon B(1 - \eta - e^{-\eta} + \dots, \quad \eta = (1 - x)/\varepsilon$$

$$\beta = ab + \varepsilon \beta_1 + \dots, \quad x = -\beta^2$$

и определить b, B, β_1 и f_1 ; б) сформировать составное разложение; в) определить разложение первого порядка, используя МСР.

4.17. Рассмотреть задачу из предыдущего упражнения в случае $a < 0$.

а) Показать, что равномерно пригодное разложение дается выражениями

$$\begin{aligned} f^0 &= 1 - \alpha + \alpha x + \varepsilon f_1(x) + \dots, \\ f^i &= 1 + \alpha(1 - \eta - e^{-\eta}) + \dots, \quad \eta = (1 - x)/\varepsilon \\ f^l &= a + \frac{\varepsilon \alpha}{\alpha - 1}(1 - \xi - e^{-\xi}) + \dots, \quad \xi = (\alpha - 1)x/\varepsilon \\ \beta &= \alpha + \varepsilon \beta_1 + \dots, c = \beta^2 \end{aligned}$$

и определить f_1 и β_1 .

б) Построить составное разложение.

в) Определить разложение первого порядка, используя МСР.

4.18. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x)u_x &= 0 \\ u(0, y) &= F_1(y), \quad u(1, y) = F_2(y) \\ u(x, 0) &= G_1(x), \quad u(x, 1) = G_2(x) \end{aligned}$$

а) Показать, что пограничный слой присутствует при $x = 0$, если $a(x) > 0$, и при $x = 1$, если $a(x) < 0$. В первом случае он характеризуется переменной $\xi = x/\varepsilon$, а во втором $-\zeta = (1 - x)/\varepsilon$.

б) Найти уравнения, определяющие первые члены внешнего и внутреннего разложений, и срастить эти разложения.

в) Используя метод Латта, показать, что

$$u = A(x, y) + B(x, y)e^{-Q(x)/\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

где

$$Q(x) = \int_0^x a(x)dx \quad \text{при} \quad a(x) > 0$$

и

$$Q(x) = \int_x^1 a(x)dx \quad \text{при} \quad a(x) < 0$$

Определить уравнения для A и B .

4.19. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + a(x, y)u_x + b(x, y)u &= 0 \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x) \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y) \end{aligned}$$

а) Найти уравнения для первых членов внешнего и внутреннего разложений и срастить эти разложения.

б) Использовать МСР для получения равномерно пригодного разложения первого порядка.

4.20. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \nabla^4 u + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u_y &= 0 \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x), \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y). \end{aligned}$$

Определить уравнения для первых членов внешнего и внутреннего разложений и срастить их.

4.21. Используя МСР, получить равномерное разложение при больших R для задачи (2.1.37)-(2.1.40), описывающей обтекание сферы.

Part IV

—— Special Oscillations in a Nutshell ——

5 О других методах, отдельных моделях колебаний и приложениях

5.1 Methods from Bogoliubov, Mitropolsky (?????)

(??? write what I understood from that book???)

5.2 Numerical Methods for Oscillations (???)

(how to calculate them???)

6 Applications

6.1 Oscillations in Dynamical Systems

(read that book, write connection to the dynamical systems)

6.2 Oscillations in Classical Mechanics

(!! проработаю по механике запись тоже, впишу все это!!)

6.3 Other Oscillations in Physics

6.3.1 On reaction diffusion model

Fisher-Kolmogorov equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)$$

Zeldovich–Frank–Kamenetskii equation - generalization of FK

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega(\theta)$$

with a typical form for ω given by

$$\omega = \frac{\beta^2}{2} \theta(1 - \theta)e^{-\beta(1-\theta)}$$

where $\theta \in [0, 1]$ is the non-dimensional dependent variable (typically temperature) and β is the Zeldovich number.

(не работал пока с ним, потом мб поработаю.)

О колебаниях в случае движения в центральном поле

(это же в механике, но подробнее!)

Теперь обратимся, собственно, к доказательству теоремы Бертрана. Сначала сделаем несколько предварительных замечаний. Нас интересует не временная динамика $r(t)$ и $\varphi(t)$, а форма орбиты $r = r(\varphi)$. Параметром становится не время t , а угол φ , они связаны соотношением $Ldt = mr^2 d\varphi$. Получим для уравнения орбиты формулу Бине. Для этого уравнение орбиты нужно записать для обратного расстояния $u = 1/r$. Из радиального уравнения движения

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(U + \frac{L}{2mr^2} \right)$$

получаем формулу Бине

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{d}{du} U \left(\frac{1}{u} \right) = 0$$

Об известных колебательных моделях в механике

(тут самое короткое указание, это в записи по механике писаться будет хотя бы в какой-то степени подробно.)

Об эффекте Джанибекова

Пусть $I_3 > I_2 > I_1$ и тело вращается строго вокруг оси x_2 . Тогда начальные угловые скорости равны $\Omega_1(0) = \Omega_3(0) = 0$ и $\Omega_2(0) = \Omega_{20} \neq 0$. Подставляя это в уравнения Эйлера вращающегося тела

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

получим $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$. Таким образом, вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси x_2 удовлетворяет уравнениям Эйлера. Однако оно является неустойчивым относительно малого возмущения.

Пусть теперь угловая скорость Ω немного отклонилась от своего направления x_2 , так что появились малые составляющие вдоль осей x_1 и x_3 : $\Omega_1 = \omega_1, \Omega_3 = \omega_3$, где $\omega_{1,3} \ll \Omega_{20}$. Тогда уравнения Эйлера линеаризуются

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 &= 0, \end{aligned}$$

а проекция Ω_2 в первом приближении не меняется $\dot{\Omega}_2 = 0$. Разыскивая решение этой системы уравнений в виде $\omega_1 \sim \omega_3 \sim e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \cdot \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20}^2 = 0.$$

Корни (2.22) при $I_3 > I_2 > I_1$ вещественны:

$$\lambda_{1,2} = \pm \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}}.$$

Наличие действительного положительного корня λ_1 означает, что вращение $\Omega_1 = \Omega_3 = 0, \Omega_2 = \Omega_{20}$ вокруг промежуточной оси неустойчиво. Случайно возникшее возмущение экспоненциально возрастает:

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim \exp \left\{ \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} t \right\}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, для времени «кувырка» τ получаем

$$\tau \approx \frac{2}{\alpha} \ln \frac{16}{|\mu|}, \quad \alpha = \frac{L}{I_2} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_3 I_1}}, \quad \mu \approx \frac{\varepsilon (I_3 - I_1) I_2}{L^2 (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}.$$

О кривой погони

$$y(x) = \frac{x(x - 2h)}{2h}.$$

Здесь x - вертикальная, y - горизонтальная координаты ракеты. Следовательно, в конце концов ракета будет гнаться за самолетом на постоянном от него расстоянии $h/2$ и никогда не догонит.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{vt - y}{h - x}, \\ dx^2 + dy^2 &= v^2 dt^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= \frac{dx}{h - x}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \\ y(x) &= \frac{h}{4} \left[\left(\frac{h - x}{h} \right)^2 - \ln \left(\frac{h - x}{h} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Из (1.19) видно, что относительное расстояние $l(x)$ между ракетой и самолетом при $t \rightarrow \infty$ (т.е. при $x \rightarrow h$) стремится к пределу $\lim_{x \rightarrow h} l(x) = h/2$:

$$l(x) \approx y'(x)(h - x) = \frac{h}{2} \left[1 - \left(\frac{h - x}{h} \right)^2 \right].$$

Время догонки:

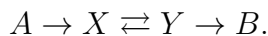
$$\tau = hu / (u^2 - v^2)$$

(пока не актуально, потом за минут 30 додумаю полностью)

6.3.2 Oscillations in Chemistry

О химическом осцилляторе

On Lotka's model



$$\dot{X} = k_0 - k_1XY,$$

$$\dot{Y} = k_1XY - k_2Y.$$

где константы скоростей первой, второй и третьей стадий этой реакции равны $\tilde{k}_0, k_1$ и k_2 , соответственно.

$$\dot{X} = k_0 - k_1XY,$$

$$\dot{Y} = k_1XY - k_2Y.$$

В равновесии $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ равновесные концентрации равны $X_0 = k_2/k_1, Y_0 = k_0/k_2$. Если возникают малые отклонения концентраций от равновесных $X = X_0 + x$ и $Y = Y_0 + y$, то

$$\dot{x} = -k_2y - \frac{k_1k_0}{k_2}x,$$

$$\dot{y} = \frac{k_1k_0}{k_2}x.$$

Для x это дает уравнение осциллятора $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ с декрементом $2\gamma = k_1k_0/k_2$ и частотой $\omega_0^2 = k_1k_0$.

(окей, тут вопросы еще есть.)

О реакции Белоусова

Реакция Белоусова - окисление малоновой кислоты $C_3H_4O_4$ смесью $KBrO_2$ и $Ce(SO_4)_2$. Изменение цвета раствора с голубого на розовый происходит в колбе примерно раз в секунду и связано с образованием в растворе ионов Ce^{4+} . В отличие от упрощенной модели Лотки (1.21), здесь три реагента и, помимо затухающих колебаний, возможно возникновение автоколебательных режимов.

(допишу, если будет нужно)

6.3.3 Oscillations in Biology

(there are a lot of them, I'll write later)

6.3.4 Oscillations in Astronomy

(??? connection to astrophysics..)

Об осцилляции атмосферы

(допишу потом, интересная задача, но не актуально. см. Пухова)

Сделать это можно следующим образом. Для ω_0 и γ получаем из изложенных выше условий два уравнения

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2,$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta T}{T} = \frac{2\gamma(2\pi/T)}{\omega_0^2 - (2\pi/T)^2}.$$

В качестве грубой оценки по порядку величины можно пренебречь в первом уравнении (3.36) скоростью диссипации $\gamma \ll \omega_0$. Тогда для добротности осциллятора «Земля-атмосфера» $Q = \omega_1/2\gamma \approx \omega_0/2\gamma$ получаем

$$Q \approx \frac{T_1^2}{T^2 - T_1^2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi\Delta T}{T} \right).$$

Подставляя сюда приведенные выше значения, получаем $Q \approx 5$.

6.4 Other Applications

6.4.1 Sociology (???)

Population of Earth

Оказывается, что несмотря на территориальные, расовые, сословные и прочие барьеры, темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Считая с большой точностью, что они равны $N_{\text{ж}} = N_{\text{м}} = N/2$, получаем

$$\dot{N} = \frac{N^2}{C},$$

где C - постоянная Фёрстера. Интегрируя с учетом начального условия $N(t_0) = N_0$, получаем

$$N = \frac{C}{\tau - t},$$

где $\tau = t_0 + CN_0^{-1}$ - момент времени, когда число обитателей земного шара обратится в бесконечность. Поскольку при $t_0 = 2000$ г. население Земли составляло $N_0 \approx 6$ млрд человек и учитывая, что значение постоянной Фёрстера примерно составляет $C \approx 2 \cdot 10^{11}$ лет.чел, можно предсказать дату «конца света» $\tau \approx 2033$ г.

(когда-то мб додумаю эту модель)

6.4.2 Ecology (???)

Predators and Preys

(тут много может быть вопросов, потом напишу их. тривиальные модели указаны в 1й части коротко, их нет смысла повторять)

(графики тоже добавлю. в другой записи по идее написано уже.)

6.4.3 Combats (???)

(в теории большой раздел вдали содам, интересная модель)

Об уравнении Ланчестера

$$\dot{x} = -by,$$

$$\dot{y} = -ax.$$

(??? тут много подумать можно, пока не актуально)

(?? когда оно применимо?)

Part V

Special Methods and Applications

7 Some Philosophical and General Statements

7.0.1 General Statements about Nature from Oscillations

7. Какова физическая размерность пространства?

В заголовок параграфа вынесен странный вопрос! Конечно, размерность пространства равна трем. В математике размерность пространства n априорна и произвольна по величине, все значения n равноправны. В физике же размерность n определяет качественные особенности физических явлений и поэтому должна определяться экспериментально. Трехмерность пространства $n = 3$ - это фундаментальный количественный физический закон. Он сохраняет свою силу и экспериментально не опровергнут все то время, за которое уже сменилось несколько поколений законов механики. Таким образом, трехмерность пространства является одним из самых важных признаков реальности. Размерность с точки зрения современной физики фундаментальнее законов сохранения. Важна сама попытка перевести размерность пространства n на язык физики, сделать ее измеримой физической величиной, имеющей область применимости.

Почему у нашего пространства именно три измерения $n = 3$? Чем физика в трехмерном пространстве отличается от физики в пространствах с другим числом измерений? Теория колебаний дает способ эмпирического измерения численного значения размерности пространства. Каким же образом в фундаментальных законах физики проявляется трехмерность реального пространства? Какова чувствительность фундаментальных экспериментальных данных к значению размерности? Перечислим основные теоретические факты, позволяющие верифицировать размерность пространства.

1). Устойчивость и замкнутость планетарных орбит. Только при $n = 3$ устойчиво финитное движение планет. А их замкнутость свидетельствует о потенциале $\sim r^{-1}$, который является фундаментальным решением уравнения Лапласа только при $n = 3$. Полагая, что потенциал взаимодействия удовлетворяет n -мерному уравнению Лапласа (Пуассона), получаем, что $U(r) \propto r^{-n+2}$. При $n = 2$ траектория финитна при любых начальных условиях. При $n > 3$ частица падает на притягивающий центр или удаляется от отталкивающего на бесконечность. Круговые траектории устойчивы при $n = 2, 3$ и неустойчивы при $n > 3$. Замкнутые финитные траектории возможны только при $n = 0$ или $n = 3$. Это находится в согласии с доказанной выше теоремой Бертрана.

2). Спектр атома ограничен только при $n = 3$. Для $n > 3$ атом водорода устроен так, что его серии спектральных линий с заданным L содержат линии со все большими частотами. Спектр попадает в ультрафиолетовую область и далее, а линии становятся все более удаленными друг от друга.

3). Только при $n = 3$ волновой пакет, подчиняющийся волновому уравнению Даламбера, распространяется компактно, без искажения формы. При $n = 3$ для волнового уравнения Даламбера справедлив принцип Гюйгенса. Для любого финитного возмущения решение распространяется с резкими передней и задней границами. При $n = 2$ есть только передняя граница. С точки зрения выполнения принципа Гюйгенса все пространства с нечетной размерностью (за исключением $n = 1$) ведут себя как пространство $n = 3$. Все пространства с четной размерностью ведут себя как

пространство $n = 2$.

При формулировке этих фактов мы исходим из естественного предположения, что при всех размерностях пространства n физика определяется уравнениями Лапласа для потенциала, Даламбера для волнового уравнения и правилом квантования Бора-Зоммерфельда для спектра. Тогда вся совокупность экспериментальных фактов, известных в астрономии, механике и атомной физике, наилучшим образом описывается моделью именно трехмерного пространства $n = 3$. Экспериментальные данные получены для систем, ограниченных по размерам сверху масштабами солнечной системы, а снизу - атомными масштабами. Вне границ этих эмпирических фактов вопрос о величине n остается открытым.

7.1 Special Effects

7.1.1 Chladni figures

(те самые фигуры соли на черных вибрирующих подвесах. потом допишу, не особо важное явление, но интересное)

8 Other Applications

8.1 Sociology (???)

8.1.1 Population of Earth

Оказывается, что несмотря на территориальные, расовые, сословные и прочие барьеры, темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Считая с большой точностью, что они равны $N_{\text{ж}} = N_{\text{м}} = N/2$, получаем

$$\dot{N} = \frac{N^2}{C},$$

где C - постоянная Фёрстера. Интегрируя с учетом начального условия $N(t_0) = N_0$, получаем

$$N = \frac{C}{\tau - t},$$

где $\tau = t_0 + CN_0^{-1}$ - момент времени, когда число обитателей земного шара обратится в бесконечность. Поскольку при $t_0 = 2000$ г. население Земли составляло $N_0 \approx 6$ млрд человек и учитывая, что значение постоянной Фёрстера примерно составляет $C \approx 2 \cdot 10^{11}$ лет.чел, можно предсказать дату «конца света» $\tau \approx 2033$ г.

(когда-то мб додумаю эту модель)

8.2 Ecology (???)

8.2.1 Predators and Preys

(тут много может быть вопросов, потом напишу их. тривиальные модели указаны в 1й части коротко, их нет смысла повторять)

(графики тоже добавлю. в другой записи по идее написано уже.)

8.3 Combats (???)

(в теории большой раздел вдали содам, интересная модель)

Об уравнении Ланчестера

$$\dot{x} = -by,$$

$$\dot{y} = -ax.$$

(??? тут много подумать можно, пока не актуально)

(?? когда оно применимо?)

9 Perturbation Methods by Nayfeh

9.0.1 Preface

Many of the problems faced today by physicists, engineers, and applied mathematicians involve difficulties, such as nonlinear governing equations, variable coefficients, and nonlinear boundary conditions at complex known or unknown boundaries, which preclude their solutions exactly. To solve these problems we are forced to resort to a form of approximation, a numerical solution, or a combination of both. Foremost among the approximation techniques is the systematic method of perturbations (asymptotic expansions) in terms of a small or a large parameter or coordinate. This book is concerned only with these perturbation techniques.

According to these perturbation techniques, the solution of the full problem is represented by the first few terms of a perturbation expansion, usually the first two terms. Although these perturbation expansions may be divergent, they can be more useful for a qualitative as well as a quantitative representation of the solution than expansions that are uniformly and absolutely convergent.

It is the rule rather than the exception that the straightforward (pedestrian) expansions in powers of a parameter have limited regions of validity and break down in certain regions called regions of nonuniformity. To render these expansions uniformly valid, investigators working in different branches of physics, engineering, and applied mathematics have developed a number of techniques. Some of these techniques are radically different, while others are different interpretations of the same basic idea.

The purpose of this book is to present in a unified way an account of some of these techniques, pointing out their similarities, differences, and advantages, as well as their limitations. The different techniques are described using examples which start with model simple ordinary equations that can be solved exactly and progress toward complex partial differential equations. The examples are drawn from different branches of physics and engineering. For each example a short description of the physical problem is first presented.

The different techniques are described as formal procedures without any attempt at justifying them rigorously. In fact, there are no rigorous mathematical justifications available yet for the expansions obtained for some of the complex examples treated in this book.

At the end of each chapter, a number of exercises have been included, which progress in complexity and provide further references.

The reader need not understand the physical bases of the examples used to describe the techniques, but it is assumed that he has a knowledge of basic calculus as well as the elementary properties of ordinary and partial differential equations.

Chapter 1 presents the notations, definitions, and manipulations of asymptotic expansions. The sources of nonuniformity in perturbation expansions are classified and discussed in Chapter 2. Chapter 3 deals with the method of strained coordinates where uniformity is achieved by expanding the dependent as well as the independent variables in terms of new independent parameters. Chapter 4 describes the methods of matched and composite asymptotic expansions;

the first method expresses the solution in terms of several expansions valid in different regions but related by matching procedures, while the second method expresses the solution in terms of a single expansion valid everywhere. In Chapter 5 the idea of fast and slow variables is used in conjunction with the variation of parameters method to study the slow variations of the amplitudes and phases of weakly nonlinear waves and oscillations. The methods of Chapter 3, 4, and 5 are generalized in Chapter 6 into one of three versions of the method of multiple scales. Chapter 7 treats available methods for obtaining asymptotic solutions of linear ordinary and partial differential equations.

My first technical debt is to Dr. W. S. Saric and to my brothers Dr. Adnan Nayfeh and Mr. Munir Nayfeh for their comments and encouragement throughout the writing of this book. I am indebted to several colleagues for helpful comments and criticism, including in particular Drs. D. T. Mook, D. P. Telionis, A. A. Kamel, and B. H. Stephan and Messers O. R. Asfar and M. S. Tsai. This book would not have been written without the patience and encouragement of my wife, and the insistence of my parents Hasan and Khadrah, in spite of their illiteracy, that I acquire a higher education. Therefore I dedicate this book to my parents and wife.

9.1 1 Introduction

Most of the physical problems facing engineers, physicists, and applied mathematicians today exhibit certain essential features which preclude exact analytical solutions. Some of these features are nonlinearities, variable coefficients, complex boundary shapes, and nonlinear boundary conditions at known or, in some cases, unknown boundaries. Even if the exact solution of a problem can be found explicitly, it may be useless for mathematical and physical interpretation or numerical evaluation. Examples of such problems are Bessel functions of large argument and large-order and doubly periodic functions. Thus, in order to obtain information about solutions of equations, we are forced to resort to approximations, numerical solutions, or combinations of both. Foremost among the approximation methods are perturbation (asymptotic) methods which are the subject of this book. According to these techniques, the solution is represented by the first few terms of an asymptotic expansion, usually not more than two terms. The expansions may be carried out in terms of a parameter (small or large) which appears naturally in the equations, or which may be artificially introduced for convenience. Such expansions are called parameter perturbations. Alternatively, the expansions may be carried out in terms of a coordinate (either small or large); these are called coordinate perturbations. Examples of parameter and coordinate expansions and their essential characteristics are presented in Sections 1.1 and 1.2. To formalize the concepts of limits and error estimates, definitions of order symbols and other notations are introduced in Section 1.3. Section 1.4 contains definitions of an asymptotic expansion, an asymptotic sequence, and a power series, while Section 1.5 presents a comparison of convergent and asymptotic series. Uniform and nonuniform asymptotic expansions are then defined in Section 1.6. A short summary of operations with asymptotic expansions is given in Section 1.7.

9.1.1 1.1. Parameter Perturbations

Many physical problems involving the function $u(x, \epsilon)$ can be represented mathematically by the differential equation $L(u, x, \epsilon) = 0$ and the boundary condition $B(u, \epsilon) = 0$, where x is a scalar or vector independent variable and ϵ is a parameter. In general, this problem cannot be solved exactly. However, if there exists an $\epsilon = \epsilon_0$ (ϵ can be scaled so that $\epsilon_0 = 0$) for which the above problem can be solved exactly or more readily, one seeks to find the solution for small ϵ in, say, powers of ϵ ; that is

$$u(x; \epsilon) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \cdots \quad (1.1.1)$$

where u_n is independent of ϵ and $u_0(x)$ is the solution of the problem for $\epsilon = 0$. One then substitutes this expansion into $L(u, x, \epsilon) = 0$ and $B(u, \epsilon) = 0$, expands for small ϵ , and collects coefficients of each power of ϵ . Since these equations must hold for all values of ϵ , each coefficient of ϵ must vanish independently because sequences of ϵ are linearly independent. These usually are simpler equations governing u_n , which can be solved successively. This is demonstrated in the next two examples.

1.1.1. An Algebraic Equation

Let us consider first the solution of the algebraic equation

$$u = 1 + \epsilon u^3 \quad (1.1.2)$$

for small ϵ . If $\epsilon = 0$, $u = 1$. For ϵ small, but different from zero, we let

$$u = 1 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \cdots \quad (1.1.3)$$

and (1.1.2) becomes

$$\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \cdots = \epsilon (1 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \cdots)^3 \quad (1.1.4)$$

Expanding for small ϵ , we rewrite (1.1.4) as

$$\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \cdots = \epsilon [1 + 3\epsilon u_1 + 3\epsilon^2 (u_2 + u_1^2) + \cdots] \quad (1.1.5)$$

Collecting coefficients of like powers of ϵ , we have

$$\epsilon (u_1 - 1) + \epsilon^2 (u_2 - 3u_1) + \epsilon^3 (u_3 - 3u_2 - 3u_1^2) + \cdots = 0 \quad (1.1.6)$$

Since this equation is an identity in ϵ , each coefficient of ϵ vanishes independently. Thus

$$\begin{aligned} u_1 - 1 &= 0 \\ u_2 - 3u_1 &= 0 \\ u_3 - 3u_2 - 3u_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

The solution of (1.1.7) is

$$u_1 = 1 \quad (1.1.10)$$

Then the solution of (1.1.8) is

$$u_2 = 3u_1 = 3 \quad (1.1.11)$$

and the solution of (1.1.9) is

$$u_3 = 3u_2 + 3u_1^2 = 12 \quad (1.1.12)$$

Therefore (1.1.3) becomes

$$u = 1 + \epsilon + 3\epsilon^2 + 12\epsilon^3 + \cdots \quad (1.1.13)$$

where the ellipsis dots stand for all terms with powers of ϵ^n for which $n \geq 4$. Thus (1.1.13) is an approximation to the solution of (1.1.2), which is equal to 1 when $\epsilon \equiv 0$.

1.1.2. The Van Der Pol Oscillator

As a second example, we consider van der Pol's (1922) equation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (1.1.14)$$

for small ϵ . If $\epsilon = 0$ this equation reduces to

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \quad (1.1.15)$$

with the general solution

$$u = a \cos(t + \varphi) \quad (1.1.16)$$

where a and φ are constants. To determine an improved approximation to the solution of (1.1.14), we seek a perturbation expansion of the form

$$u(t; \epsilon) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (1.1.17)$$

where the ellipsis dots stand for terms proportional to powers of ϵ greater than 2. Substituting this expansion into (1.1.14), we have

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 + \epsilon \left(\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots \\ &= \epsilon \left[1 - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots)^2 \right] \left[\frac{du_0}{dt} + \epsilon \frac{du_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{du_2}{dt} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Expanding for small ϵ , we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 + \epsilon \left(\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots \\ &= \epsilon (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} + \epsilon^2 \left[(1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Since u_n is independent of ϵ and (1.1.19) is valid for all small values of ϵ , the coefficients of like powers of ϵ must be the same on both sides of this equation. Equating the coefficients of like powers of ϵ on both sides of (1.1.19), we have

Coefficient of ϵ^0

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 = 0 \quad (1.1.20)$$

Coefficient of ϵ

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} \quad (1.1.21)$$

Coefficient of ϵ^2

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 = (1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \quad (1.1.22)$$

Note that (1.1.20) is the same as (1.1.15) and its general solution is given by (1.1.16); that is

$$u_0 = a \cos(t + \varphi) \quad (1.1.23)$$

Substituting for u_0 into (1.1.21) gives

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = -[1 - a^2 \cos^2(t + \varphi)] a \sin(t + \varphi)$$

Using the trigonometric identity

$$\cos^2(t + \varphi) \sin(t + \varphi) = \frac{\sin(t + \varphi) + \sin 3(t + \varphi)}{4}$$

we can rewrite this equation as

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = \frac{a^3 - 4a}{4} \sin(t + \varphi) + \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t + \varphi) \quad (1.1.24)$$

Its particular solution is

$$u_1 = -\frac{a^3 - 4a}{8} t \cos(t + \varphi) - \frac{1}{32} a^3 \sin 3(t + \varphi) \quad (1.1.25)$$

With u_0 and u_1 known the right-hand side of (1.1.22) is known, and one can solve it for u_2 in a similar fashion. The usefulness of such an expansion is the subject of this book.

9.1.2 1.2. Coordinate Perturbations

If the physical problem is represented mathematically by a differential equation $L(u, x) = 0$ subject to the boundary conditions $B(u) = 0$, where x is a scalar, and if $u(x)$ takes a known form u_0 as $x \rightarrow x_0$ (x_0 is scaled to 0 or ∞), one attempts to determine the deviation of u from u_0 for x near x_0 in terms of powers of x if $x_0 = 0$, or x^{-1} if $x_0 = \infty$. This technique is demonstrated by the next two examples.

1.2.1. The Bessel Equation of Zeroth Order

We consider the solutions of

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (1.2.1)$$

This equation has a regular singular point at $x = 0$, which suggests that a power series solution for y can be obtained using the method of Frobenius (e.g., Ince, 1926, Section 16.1). Thus we let

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m} \quad (1.2.2)$$

where the number μ and the coefficients a_m must be determined so that (1.2.2) is a solution of (1.2.1).

Substituting (1.2.2) into (1.2.1) gives

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} (\mu + m)(\mu + m - 1) a_m x^{\mu+m-1} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} (\mu + m) a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0 \end{aligned}$$

or

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\mu + m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0 \quad (1.2.3)$$

which can be written as

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu + 1)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{m=2}^{\infty} (\mu + m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0$$

Replacing m by $m + 2$ in the first summation of this equation, we can rewrite it as

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu + 1)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{m=0}^{\infty} [(\mu + m + 2)^2 a_{m+2} + a_m] x^{\mu+m+1} = 0 \quad (1.2.4)$$

Since (1.2.4) is an identity in x , the coefficient of each power of x must vanish independently; that is

$$\mu^2 a_0 = 0 \quad (1.2.5)$$

$$(\mu + 1)^2 a_1 = 0 \quad (1.2.6)$$

$$(\mu + m + 2)^2 a_{m+2} + a_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.7)$$

The first equation demands that $\mu = 0$ if $a_0 \neq 0$; then (1.2.6) gives $a_1 = 0$ and (1.2.7) gives

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\mu + m + 2)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.8)$$

Therefore

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ a_2 &= -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \\ a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

The solution thus obtained if $a_0 = 1$ is a Bessel function of zeroth order, and it is often denoted by J_0 . Thus

$$\begin{aligned} J_0 &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Since the ratio of the n th term to the $(n - 1)$ th term is $-x^2/(2n)^2$ and tends to zero as $n \rightarrow \infty$ irrespective of the value and sign of x , the series (1.2.10) for J_0 converges uniformly and absolutely for all values of x .

An expansion valid for large values of x is obtained in Section 7.1.2 and compared with the above expansion in Section 1.5.

1.2.2. A Simple Example

As a second example, we consider the solution of

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} \quad (1.2.11)$$

for large x . For large x we seek a solution in the form

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m} \quad (1.2.12)$$

Substituting this expansion into (1.2.11) yields

$$\sum_{m=1}^{\infty} -ma_m x^{-m-1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{-m} + (a_1 - 1)x^{-1} = 0 \quad (1.2.13)$$

Replacing m by $m + 1$ in the second summation series, we can rewrite this equation as

$$(a_1 - 1)x^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m+1} - ma_m)x^{-m-1} = 0 \quad (1.2.14)$$

Since this equation is an identity in x , the coefficient of each x^{-m} must vanish independently; that is

$$a_1 = 1, \quad a_{m+1} = ma_m \text{ for } m \geq 1 \quad (1.2.15)$$

Hence

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2!, \quad a_4 = 3!, \quad a_n = (n-1)!$$

and (1.2.12) becomes

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots \quad (1.2.16)$$

Since the ratio of the n th to the $(n-1)$ th term is $(n-1)x^{-1}$ and it tends to infinity as $n \rightarrow \infty$ irrespective of the value of x , the series (1.2.16) diverges for all values of x . In spite of its divergence, this series is shown in Section 1.4 to be useful for numerical calculations, and it is called an asymptotic series.

9.1.3 1.3. Order Symbols and Gauge Functions

Suppose we are interested in a function of the single real parameter ϵ , denoted by $f(\epsilon)$. In carrying out our approximations, we are interested in the limit of $f(\epsilon)$ as ϵ tends to zero, denoted by $\epsilon \rightarrow 0$. This limit might depend on whether ϵ tends to zero from below, denoted by $\epsilon \uparrow 0$, or from above, denoted by $\epsilon \downarrow 0$. If the limit of $f(\epsilon)$ exists (i.e., it does not have an essential singularity at $\epsilon = 0$ such as $\sin \epsilon^{-1}$), then there are three possibilities

$$\left. \begin{array}{l} f(\epsilon) \rightarrow 0 \\ f(\epsilon) \rightarrow A \\ f(\epsilon) \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ as } \epsilon \rightarrow 0, 0 < A < \infty \quad (1.3.1)$$

In the first and last cases, the rate at which $f(\epsilon) \rightarrow 0$ and $f(\epsilon) \rightarrow \infty$ is expressed by comparing $f(\epsilon)$ with known functions called gauge functions. The simplest and most useful of these are

$$\dots, \epsilon^{-n}, \dots, \epsilon^{-2}, \epsilon^{-1}, 1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n, \dots$$

In some cases these must be supplemented by

$$\log \epsilon^{-1}, \log (\log \epsilon^{-1}), e^{\epsilon^{-1}}, e^{-\epsilon^{-1}}, \text{ and so on}$$

Other gauge functions are $\sin \epsilon, \cos \epsilon, \tan \epsilon, \sinh \epsilon, \cosh \epsilon, \tanh \epsilon$, and so on

The behavior of a function $f(\epsilon)$ is compared with a gauge function $g(\epsilon)$ as $\epsilon \rightarrow 0$, employing either of the Landau symbols: O or o .

The Symbol o

We write

$$f(\epsilon) = O[g(\epsilon)] \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.3.2)$$

if there exists a positive number A independent of ϵ and an $\epsilon_0 > 0$ such that

$$|f(\epsilon)| \leq A|g(\epsilon)| \text{ for all } |\epsilon| \leq \epsilon_0 \quad (1.3.3)$$

This condition can be replaced by

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| < \infty \quad (1.3.4)$$

For example, as $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ll} \sin \epsilon = O(\epsilon), & \sin \epsilon^2 = O(\epsilon^2) \\ \sin 7\epsilon = O(\epsilon), & \sin 2\epsilon - 2\epsilon = O(\epsilon^3) \\ \cos \epsilon = O(1), & 1 - \cos \epsilon = O(\epsilon^2) \\ J_0(\epsilon) = O(1), & J_0(\epsilon) - 1 = O(\epsilon^2) \\ \sinh \epsilon = O(\epsilon), & \cosh \epsilon = O(1) \\ \tanh \epsilon = O(\epsilon), & \tan \epsilon = O(\epsilon) \\ \coth \epsilon = O(\epsilon^{-1}), & \cot \epsilon = O(\epsilon^{-1}) \end{array}$$

If f is a function of another variable x in addition to ϵ , and $g(x, \epsilon)$ is a gauge function, we also write

$$f(x, \epsilon) = O[g(x, \epsilon)] \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.3.5)$$

if there exists a positive number A independent of ϵ and an $\epsilon_0 > 0$ such that

$$|f(x, \epsilon)| \leq A|g(x, \epsilon)| \text{ for all } |\epsilon| \leq \epsilon_0 \quad (1.3.6)$$

If A and ϵ_0 are independent of x , the relationship (1.3.5) is said to hold uniformly. For example

$$\sin(x + \epsilon) = O(1) = O[\sin(x)] \quad \text{uniformly as } \epsilon \rightarrow 0$$

while

$$\begin{array}{l} e^{-\epsilon t} - 1 = O(\epsilon) \text{ nonuniformly as } \epsilon \rightarrow 0 \\ \sqrt{x + \epsilon} - \sqrt{x} = O(\epsilon) \text{ nonuniformly as } \epsilon \rightarrow 0 \end{array}$$

The Symbol o

We write

$$f(\epsilon) = o[g(\epsilon)] \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.3.7)$$

if for every positive number δ , independent of ϵ , there exists an ϵ_0 such that

$$|f(\epsilon)| \leq \delta |g(\epsilon)| \text{ for } |\epsilon| \leq \epsilon_0 \quad (1.3.8)$$

This condition can be replaced by

Thus as $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin \epsilon &= o(1), & \sin \epsilon^2 &= o(\epsilon) \\ \cos \epsilon &= o(\epsilon^{-1/2}), & J_0(\epsilon) &= o(\epsilon^{-1}) \\ \coth \epsilon &= o(\epsilon^{-3/2}), & \cot \epsilon &= o[\epsilon^{-(n+1)/n}] \quad \text{for positive } n \\ 1 - \cos 3\epsilon &= o(\epsilon), & \exp(-\epsilon^{-1}) &= o(\epsilon^n) \quad \text{for all } n \end{aligned}$$

If $f = f(x, \epsilon)$ and $g = g(x, \epsilon)$, then (1.3.7) is said to hold uniformly if δ and ϵ_0 are independent of x . For example

$$\sin(x + \epsilon) = o(\epsilon^{-1/3}) \text{ uniformly as } \epsilon \rightarrow 0$$

while

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon t} - 1 &= o(\epsilon^{1/2}) \text{ nonuniformly as } \epsilon \rightarrow 0 \\ \sqrt{x + \epsilon} - \sqrt{x} &= o(\epsilon^{3/4}) \text{ nonuniformly as } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

9.1.4 1.4. Asymptotic Expansions and Sequences

1.4.1. Asymptotic Series

We found in Section 1.2.2 that a particular solution of

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} \quad (1.4.1)$$

is

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots \quad (1.4.2)$$

which diverges for all values of x . To investigate whether this series is of any value for computing a particular solution of our equation, we determine the remainder if we truncate the series after n terms. To do this we note that a particular integral of our differential equation is given by

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-1} e^x dx \quad (1.4.3)$$

which converges for negative x . Integrating (1.4.3) by parts, we find that

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{x} + e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-2} e^x dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-3} e^x dx \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + 3!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-4} e^x dx \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} \\
 &\quad + n!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx
 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Therefore if we truncate the series after n terms, the remainder is

$$R_n = n!e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx \tag{1.4.5}$$

which is a function of n and x . For the series to converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ must be zero. This is not true in our example; in fact, $R_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ so that the series diverges for all x in agreement with what we found in Section 1.2.2 using the ratio test. Therefore, if the series (1.4.2) is to be useful, n must be fixed. For negative x

$$|R_n| \leq n! |x^{-n-1}| e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{n!}{|x^{n+1}|} \tag{1.4.6}$$

Thus the error committed in truncating the series after n terms is numerically less than the first neglected term, namely, the $(n+1)$ th term. Moreover, as $|x| \rightarrow \infty$ with n fixed, $R_n \rightarrow 0$. Therefore, although the series (1.4.2) diverges, for a fixed n the first n terms in the series can represent y with an error which can be made arbitrarily small by taking $|x|$ sufficiently large. Such a series is called an asymptotic series of the Poincaré type (Poincaré, 1892) and is denoted by

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \tag{1.4.7}$$

In general, given a series $\sum_{m=0}^{\infty} (a_m/x^m)$, where a_m is independent of x , we say that the series is an asymptotic series and write

$$y \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{x^m} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \tag{1.4.8}$$

if and only if

$$y = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{x^m} + o(|x|^{-n}) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \tag{1.4.9}$$

The condition (1.4.9) can be rewritten as

$$y = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_m}{x^m} + O(|x|^{-n}) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \tag{1.4.10}$$

As another example of an asymptotic series, we consider, after Euler (1754), the evaluation of the integral

$$f(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\omega + x} dx \tag{1.4.11}$$

for large positive ω . Since

$$\frac{\omega}{\omega + x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{\omega^m} \quad \text{if } x < \omega \quad (1.4.12)$$

and

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx = m! \quad (1.4.13)$$

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} \quad (1.4.14)$$

Since the ratio of the m th to the $(m-1)$ th term, $-m\omega^{-1}$, tends to infinity as $m \rightarrow \infty$, the series (1.4.14) diverges for all values of ω .

To investigate whether (1.4.14) is an asymptotic series, we estimate the remainder if the series is truncated after the n th term. To do this we note that

$$\frac{\omega}{\omega + x} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^m}{\omega^m} + \frac{(-1)^n x^n}{\omega^{n-1}(\omega + x)} \quad (1.4.15)$$

Hence

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} + R_n \quad (1.4.16)$$

where

$$|R_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\omega^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x}}{\omega + x} dx \right| < \frac{1}{\omega^n} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{n!}{\omega^n} \quad (1.4.17)$$

Hence the error committed by truncating the series after the first n terms is numerically less than the first neglected term, and

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} + O(\omega^{-n}) \quad (1.4.18)$$

Therefore the series (1.4.14) is an asymptotic series, and we write

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} \quad (1.4.19)$$

1.4.2. Asymptotic Expansions

One does not need to use a power series to represent a function. Instead, one can use a general sequence of functions $\delta_n(\epsilon)$ as long as

$$\delta_n(\epsilon) = o[\delta_{n-1}(\epsilon)] \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.4.20)$$

Such a sequence is called an asymptotic sequence. Examples of such asymptotic sequences are

$$\epsilon^n, \epsilon^{n/3}, (\log \epsilon)^{-n}, (\sin \epsilon)^n, (\cot \epsilon)^{-n} \quad (1.4.21)$$

In terms of asymptotic sequences, we can define asymptotic expansions. Thus, given $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\epsilon)$ where a_m is independent of ϵ and $\delta_m(\epsilon)$ is an asymptotic sequence, we say that this expansion is an asymptotic expansion and write

$$y \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\epsilon) \quad \text{as} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.4.22)$$

if and only if

$$y = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\epsilon) + O[\delta_n(\epsilon)] \quad \text{as} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.4.23)$$

Clearly, an asymptotic series is a special case of an asymptotic expansion.

As an example of an asymptotic expansion that is not an asymptotic power series, we return to the integral (1.4.11). Following van der Corput (1962), we represent $f(\omega)$ in terms of the factorial asymptotic sequence $[(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n)]^{-1}$ as $\omega \rightarrow \infty$. To do this we note that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega+x} &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+x)} \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+1)} + \frac{x(x-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+x)} \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{x}{\omega(\omega+1)} + \frac{x(x-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+x)} \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

In general

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x(x-1)\cdots(x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+m)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\cdots(x-n)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n)(\omega+x)} \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

This equation can be proved by induction as follows. If (1.4.25) is valid for n , we show that it is valid for $(n+1)$. To do this we note that

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x(x-1)\cdots(x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+m)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\cdots(x-n)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n+1)} \\ &\quad - \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\cdots(x-n)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n+1)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\cdots(x-n)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n)(\omega+x)} \end{aligned}$$

By combining the last two terms and extending the summation to $n+1$, we can rewrite this expression as

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega+x} &= \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m x(x-1)\cdots(x+1-m)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+m)} \\ &\quad + (-1)^{n+2} \frac{x(x-1)\cdots(x-n-1)}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n+1)(\omega+x)} \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

Thus if (1.4.25) is true for n , (1.4.26) shows that it is true for $n + 1$. Since (1.4.25) is true for $n = 0, 1$, and 2 according to (1.4.24), it is true for $n = 3, 4, 5, \dots$. Therefore it is true for all n .

Multiplying (1.4.25) by $\exp(-x)$ and integrating from $x = 0$ to $x = \infty$, we have

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^n a_m \delta_m(\omega) + R_n(\omega) \quad (1.4.27)$$

where

$$a_m = \int_0^\infty x(x-1)\cdots(x-m+1)e^{-x}dx \quad (1.4.28)$$

$$\delta_m(\omega) = (-1)^m [(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+m)]^{-1} \quad (1.4.29)$$

$$R_n = -\delta_n(\omega) \int_0^\infty \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{\omega+n+x-n} e^{-x} dx \quad (1.4.30)$$

Since ω is a positive large number

$$\begin{aligned} |R_n| &< |\delta_n(\omega)| \left| \int_0^\infty x(x-1)\cdots(x-n+1)e^{-x} dx \right| \\ &= |a_n| |\delta_n(\omega)| \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

Thus the error committed by keeping the first n terms is numerically less than the n th term, hence

$$f(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\omega) + O[\delta_n(\omega)] \quad (1.4.32)$$

Since $\delta_m(\omega)$ is an asymptotic sequence as $\omega \rightarrow \infty$

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\omega) \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (1.4.33)$$

1.4.3. Uniqueness of Asymptotic Expansions

We have shown in the previous two sections that

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{\omega^m} \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (1.4.34)$$

and

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \int_0^\infty x(x-1)\cdots(x+1-m)e^{-x} dx}{(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+m)} \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty$$

Thus the asymptotic representation of $f(\omega)$ as $\omega \rightarrow \infty$ is not unique. In fact, $f(\omega)$ can be represented by an infinite number of asymptotic expansions because there exists an infinite number of asymptotic sequences that can be used in the representation. However, given an asymptotic sequence $\delta_m(\omega)$, the representation of $f(\omega)$ in terms of this sequence is unique. In this case

$$f(\omega) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_m(\omega) \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (1.4.36)$$

where the a_m are uniquely given by

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega)}{\delta_0(\omega)}, & a_1 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega) - a_0 \delta_0(\omega)}{\delta_1(\omega)} \\ a_n &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(\omega) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\omega)}{\delta_n(\omega)} \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

9.1.5 1.5. Convergent Versus Asymptotic Series

We found in Section 1.2.1 that one of the solutions of Bessel's equation

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (1.5.1)$$

is given by the series

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} + \cdots \quad (1.5.2)$$

which is uniformly and absolutely convergent for all values of x .

Another representation of J_0 can be obtained if we note that the change of variable

$$y = x^{-1/2} y_1 \quad (1.5.3)$$

transforms (1.5.1) into

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y_1 = 0 \quad (1.5.4)$$

As $x \rightarrow \infty$, this equation tends to

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + y_1 = 0 \quad (1.5.5)$$

with the solutions

$$y_1 = e^{\pm ix} \quad (1.5.6)$$

This suggests the transformation

$$y_1 = e^{ix} y_2 \quad (1.5.7)$$

which gives

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + 2i \frac{dy_2}{dx} + \frac{1}{4x^2} y_2 = 0 \quad (1.5.8)$$

This equation can be satisfied formally by

$$y_2 = 1 - \frac{1}{8x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{8^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{8^3 \cdot 3! \cdot x^3} i + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \cdots \quad (1.5.9)$$

By combining this series with that obtained by changing i into $-i$, we obtain the following two independent solutions

$$\begin{aligned} y^{(1)} &\sim x^{-1/2}(u \cos x + v \sin x) \\ y^{(2)} &\sim x^{-1/2}(u \sin x - v \cos x) \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

where

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{1 \cdot 3^2}{8^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \cdots \\ v &= \frac{1}{8x} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{8^3 \cdot 3! \cdot x^3} + \cdots \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

To determine the connection between $J_0(x)$ and these two independent solutions, we use the integral representation

$$\pi J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta \quad (1.5.12)$$

and obtain (see Section 7.1.2)

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos \left(x - \frac{1}{4}\pi \right) + v \sin \left(x - \frac{1}{4}\pi \right) \right] \quad (1.5.13)$$

The ratio test shows that y_2 , u , and v , and hence the right-hand side of (1.5.13), are divergent for all values of x . However, for large x the leading terms in u and v decrease rapidly with increasing rank so that (1.5.13) is an asymptotic expansion for large x .

For small x the first few terms of (1.5.2) give fairly accurate results. In fact, the first 9 terms give a value for $J_0(2)$ correct to 11 significant figures. However, as x increases, the number of terms needed to yield the same accuracy increases rapidly. At $x = 4$, eight terms are needed to give an accuracy of three significant figures, whereas the first term of the asymptotic expansion (1.5.13) yields the same accuracy. As x increases further, an accurate result is obtained with far less labor by using the asymptotic divergent series (1.5.13).

9.1.6 1.6. Nonuniform Expansions

In parameter perturbations the quantities to be expanded can be functions of one or more variables besides the perturbation parameter. If we develop the asymptotic expansion of a function $f(x; \epsilon)$, where x is a scalar or vector variable independent of ϵ , in terms of the asymptotic sequence $\delta_m(\epsilon)$, we have

$$f(x; \epsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) \delta_m(\epsilon) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.6.1)$$

where the coefficients a_m are functions of x only. This expansion is said to be uniformly valid if

$$f(x; \epsilon) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m(x) \delta_m(\epsilon) + R_N(x; \epsilon) \quad (1.6.2a)$$

$$R_N(x; \epsilon) = O[\delta_N(\epsilon)] \quad \text{uniformly for all } x \text{ of interest} \quad (1.6.2b)$$

Otherwise the expansion is said to be nonuniformly valid (it is often called a singular perturbation expansion). For the uniformity conditions (1.6.2) to hold, $a_m(x) \delta_m(\epsilon)$ must be

small compared to the preceding term $a_{m-1}(x)\delta_{m-1}(\epsilon)$ for each m . Since $\delta_m(\epsilon) = o[\delta_{m-1}(\epsilon)]$ as $\epsilon \rightarrow 0$, we require that $a_m(x)$ be no more singular than $a_{m-1}(x)$ for all values of x of interest if the expansion is to be uniform. In other words, each term must be a small correction to the preceding term irrespective of the value of x .

A uniformly valid expansion is

$$\begin{aligned}
 & \sin(x + \epsilon) \\
 &= \sin x \cos \epsilon + \cos x \sin \epsilon \\
 &= \sin x \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} - \frac{\epsilon^6}{6!} + \cdots \right) + \cos x \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} - \frac{\epsilon^7}{7!} + \cdots \right) \\
 &= \sin x + \epsilon \cos x - \frac{\epsilon^2}{2!} \sin x - \frac{\epsilon^3}{3!} \cos x + \frac{\epsilon^4}{4!} \sin x + \frac{\epsilon^5}{5!} \cos x \\
 &\quad - \frac{\epsilon^6}{6!} \sin x - \frac{\epsilon^7}{7!} \cos x + \cdots \text{ as } \epsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Note that the coefficients of all powers of ϵ are bounded for all values of x , hence $a_m(x)$ is no more singular than $a_{m-1}(x)$, and the expansion is uniformly valid as a consequence.

For a nonuniformly valid expansion, let us expand $f(x; \epsilon) = \sqrt{x + \epsilon}$ for small ϵ ; that is

$$f(x; \epsilon) = \sqrt{x + \epsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\epsilon}{x} \right)^{1/2} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\epsilon}{2x} - \frac{\epsilon^2}{8x^2} + \frac{\epsilon^3}{16x^3} + \cdots \right) \tag{1.6.4}$$

Each term of this expansion except the first is singular at $x = 0$ and is more singular than the preceding one, hence the expansion is not uniformly valid. It breaks down near $x = 0$. An estimate of the size of the region of nonuniformity can sometimes be obtained by assuming two successive terms to be of the same order; that is

$$\frac{\epsilon}{2x} = O(1) \text{ gives } x = O(\epsilon) \tag{1.6.5}$$

We can see this if we look at $[1 + (\epsilon/x)]^{1/2}$ whose Taylor series expansion converges only if $|\epsilon/x|$ is less than unity.

For a second nonuniformly valid expansion, we consider the expansion of $\exp(-\epsilon t)$ for small ϵ . It possesses the following uniformly convergent series for all t

$$e^{-\epsilon t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\epsilon t)^n}{n!} \tag{1.6.6}$$

It is clear that $\exp(-\epsilon t)$ can be approximately represented by a finite number of terms only if the combination ϵt is small. Since ϵ is small, this means that $t = O(1)$. When t is as large as $O(\epsilon^{-1})$, ϵt is not small and the truncated series breaks down. For example, if $t = 2\epsilon^{-1}$, the first two terms give -1 for $\exp(-2)$. If the above series is truncated after a finite number of terms, it is found that the truncated series is satisfactory up to a certain value of t after which $\exp(-\epsilon t)$ and the truncated series differ from each other by a quantity which exceeds the prescribed limit of accuracy. Adding more terms to the truncated series increases the value of t to a new value t' for which this truncated series is satisfactory. However, for $t > t'$ the difference between $\exp(-\epsilon t)$ and the new truncated series again exceeds the prescribed accuracy. Thus all terms of the series are needed to give a satisfactory expansion for $\exp(-\epsilon t)$ for all t .

It is the rule rather than the exception that asymptotic expansions in terms of a parameter are not uniformly valid and break down in regions called regions of nonuniformity, which are sometimes referred to as boundary layers. Friedrichs (1955) discussed in a survey article the

occurrence of these nonuniformities in different branches of mathematical physics. Most perturbation techniques were developed to render these nonuniform expansions uniformly valid. The sources of nonuniformity are discussed in Chapter 2 and the techniques of rendering nonuniform expansions uniform are taken up in the remaining chapters.

9.1.7 1.7. Elementary Operations on Asymptotic Expansions

To determine approximate solutions to differential and integral-differential equations, we assume expansions, substitute them into equations, and perform on them elementary operations such as addition, subtraction, exponentiation, integration, differentiation, and multiplication. These operations are carried out without justification although some of these expansions are divergent. Conditions under which these operations are justified are discussed by van der Corput (1956), Erdlyi (1956), and de Bruijn (1958).

Addition and subtraction are justified in general. For example, if

$$\begin{aligned} f(x; \epsilon) &\sim \sum a_n(x) \varphi_n(\epsilon) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \\ g(x; \epsilon) &\sim \sum b_n(x) \varphi_n(\epsilon) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

where $\varphi_n(\epsilon)$ is an asymptotic sequence, then (Erdlyi, 1956)

$$\alpha f(x; \epsilon) + \beta g(x; \epsilon) \sim \sum [\alpha a_n(x) + \beta b_n(x)] \varphi_n(\epsilon) \quad (1.7.2)$$

Moreover, if $f(x; \epsilon)$ and $a_n(x)$ are integrable functions of x , then

$$\int_{\alpha}^x f(x; \epsilon) dx \sim \sum \varphi_n(\epsilon) \int_{\alpha}^x a_n(x) dx \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.3)$$

If $f(x; \epsilon)$ and $\varphi_n(\epsilon)$ are integrable functions of ϵ , then

$$\int_0^{\epsilon} f(x; \epsilon) d\epsilon \sim \sum a_n(x) \int_0^{\epsilon} \varphi_n(\epsilon) d\epsilon \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.4)$$

Multiplication is not justified in general because in the formal product of $\sum a_n(x) \varphi_n(\epsilon)$ and $\sum b_n(x) \varphi_n(\epsilon)$ all products $\varphi_n(\epsilon) \varphi_m(\epsilon)$ occur, and it is generally not possible to arrange them so as to obtain an asymptotic sequence. In other words, multiplication is justified if the result is an asymptotic expansion. This is the case for all asymptotic sequences φ_n such that $\varphi_n \varphi_m$ either form an asymptotic sequence or possess asymptotic expansions. An important class of such sequences is the collection of powers of ϵ . Thus if

$$\begin{aligned} f(x; \epsilon) &\sim \sum a_n(x) \epsilon^n \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \\ g(x; \epsilon) &\sim \sum b_n(x) \epsilon^n \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

then

$$f(x; \epsilon) g(x; \epsilon) \sim \sum c_n(x) \epsilon^n \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.6)$$

where

$$c_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m(x) b_{n-m}(x) \quad (1.7.7)$$

Exponentiation is not justified in general. When it is not justified, it leads to nonuniformities. For example

$$\sqrt{x + \epsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\frac{\epsilon^2}{x^2} + \cdots \right) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.8)$$

is not justified when $\epsilon/x = O(1)$ because its right-hand side is nonuniform in the region $x = O(\epsilon)$. Similarly

$$\frac{1}{1 + \epsilon x} = 1 - \epsilon x + \epsilon^2 x^2 - \epsilon^3 x^3 + \cdots \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.7.9)$$

is not justified when $\epsilon x = O(1)$ because its right-hand side is nonuniform for large x .

It is not justified in general to differentiate asymptotic expansions with respect to a variable such as x or with respect to the perturbation parameter. As in exponentiation, when it is not justified, differentiation leads to nonuniformities.

Exercises

1.1. Determine the order of the following expressions as $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\sqrt{\epsilon(1 - \epsilon)}, 4\pi^2\epsilon, 1000\epsilon^{1/2}, \ln(1 + \epsilon), \frac{1 - \cos \epsilon}{1 + \cos \epsilon}, \frac{\epsilon^{3/2}}{1 + \sin \epsilon}, \frac{\epsilon^{1/2}}{1 - \cos \epsilon}, \operatorname{sech}^{-1} \epsilon$$

$$e^{\tan \epsilon}, \ln \left[1 + \frac{\ln(1 + 2\epsilon)}{\epsilon(1 - 2\epsilon)} \right], \ln \left[1 + \frac{\ln \frac{1+2\epsilon}{\epsilon}}{1 - 2\epsilon} \right], e^{-\cosh(1/\epsilon)}, \int_0^\epsilon e^{-J^2} ds$$

1.2. Arrange the following in descending order for small ϵ :

$$\epsilon^2, \epsilon^{1/2}, \ln(\ln \epsilon^{-1}), 1, \epsilon^{1/2} \ln \epsilon^{-1}, \epsilon \ln \epsilon^{-1}, e^{-1/\epsilon}, \ln \epsilon^{-1}, \epsilon^{3/2}, \epsilon, \epsilon^2 \ln \epsilon^{-1}$$

1.3. Expand each of the following expressions for small ϵ and keep three terms:

- (a) $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 t - \frac{1}{8}\epsilon^4 t}$
- (b) $(1 + \epsilon \cos f)^{-1}$
- (c) $(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^{-2}$
- (d) $\sin(s + \epsilon\omega_1 s + \epsilon^2\omega_2 s)$
- (e) $\sin^{-1} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon}} \right)$
- (f) $\ln \frac{1 + 2\epsilon - \epsilon^2}{\sqrt[3]{1 + 2\epsilon}}$

1.4. Let $\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2$ in $h = (3/2)[1 - \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}]$, expand for small e , and keep three terms.

1.5. Find a second-order expansion for the solution of

$$x = 1 + \epsilon x^2, \quad \epsilon \ll 1$$

and compare it with the exact solution for $\epsilon = 0.1$ and $\epsilon = 0.001$.

1.6. Show that the asymptotic expansion for large x of

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

is

$$F(x) = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \cdots \right) \sin x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \cdots \right) \cos x$$

Does the series converge? Find an upper bound for the remainder and show that the remainder approaches zero faster than the last term in the expansion as $x \rightarrow \infty$.

1.7. If $x = s - (\epsilon/3s^2) - (3\epsilon^2/10s^4)$, find a two-term expansion for s when $x = 0$.

1.8. If $x = s + \epsilon(2 - (2/3)s^{1/2}) + (42/5)\epsilon^2 s^{1/2}$, show that the solution of $dx/ds = 0$ is

$$s = \frac{1}{9}\epsilon^2 - \frac{14}{5}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$$

and then find x corresponding to this value.

1.9. If

$$y_0(s) + \epsilon y_1(s) + \epsilon^2 y_2(s) + \cdots = A$$

and

$$1 = s + \epsilon x_1(s) + \epsilon^2 x_2(s) + \cdots$$

show that

$$s = 1 - \epsilon x_1(1) - \epsilon^2 [x_2(1) - x_1'(1)x_1(1)] + \cdots$$

and then find $y_0(1)$, $y_1(1)$, and $y_2(1)$.

1.10. Consider the equation

$$y' + y = \epsilon y^2, \quad y(0) = 1$$

(a) Determine a three-term expansion for small ϵ .

(b) Show that the exact solution is

$$y = e^{-x} [1 + \epsilon(e^{-x} - 1)]^{-1}$$

(c) Expand this exact solution for small ϵ and compare the result with (a).

(d) Is this expansion valid for all x ?

1.11. Determine a coordinate expansion for

$$y'' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) y = 0$$

of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n+\sigma}$$

1.12. Determine second-order (three-term) expansions for

(a) $\ddot{u} + u = \epsilon u^2, \quad \epsilon \ll 1$

(b) $\ddot{u} + u = -\epsilon \dot{u}$

with $u(0) = a$ and $\dot{u}(0) = 0$. Are these expansions uniformly valid?

1.13. Find a first-order (two-term) expansion valid for small ϵ for the solution of

$$\begin{aligned} s \frac{dx}{ds} &= x + \epsilon y \\ s \frac{dy}{ds} &= -(2+x)y \\ y(1) &= e^{-1}, \quad x(1) = 1 \end{aligned}$$

1.14. Use the asymptotic expansion (1.5.13) to show that the large zeros ξ of $J_0(x)$ are the solutions of

$$\cot\left(\xi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{8\xi} + \frac{33}{512\xi^3} + \cdots$$

and then show that

$$\xi = \frac{1}{4}\pi(4n+3) + \frac{1}{2\pi(4n+3)} + \cdots \text{ with } n \text{ an integer.}$$

1.15. Show that

$$u\ddot{u} + \dot{u} + tu = t^2$$

is satisfied by the expansions (Levinson, 1969)

$$\begin{aligned} u &= -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 - 9t \ln t + O\left(\frac{\ln t}{t}\right) \\ u &= t + (b_1 \sin t + b_2 \cos t) t^{-1/2} + O(t^{-1}) \end{aligned}$$

as $t \rightarrow \infty$, where c_i and b_i are constants.

1.16. Show that the equation of Bellman (1955)

$$(i\ddot{u})^2 = \dot{u} + u$$

is satisfied by the expansions (Levinson, 1969)

$$\begin{aligned} u &= ae^{-t} - a^2 e^{-2t} + O(e^{-3t}) \\ u &= \frac{1}{14}t^4 + \frac{1}{30}t^3 \ln t + c_1 t^3 + c_2 t^{-2} + O(t^2 \ln^2 t) \end{aligned}$$

as $t \rightarrow \infty$, where a and c_i are constants.

9.2 2 Straightforward Expansions and Sources of Nonuniformity

As pointed out in Section 1.6, it is the rule rather than the exception that expansions of the Poincaré type (straightforward expansions), such as

$$f(x, \epsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\epsilon) f_m(x)$$

where $\delta_m(\epsilon)$ is an asymptotic sequence in terms of the parameter ϵ , are nonuniformly valid and break down in regions called regions of nonuniformity. Some of the sources of nonuniformities are: infinite domain, small parameter multiplying the highest derivative, type change of a partial differential equation, and presence of singularities.

In the infinite domain case, the nonuniformity manifests itself in the presence of so-called secular terms such as $x^n \cos x$ and $x^n \sin x$, which make $f_m(x)/f_{m-1}(x)$ unbounded as x approaches infinity. In the case of the small parameter multiplying the highest derivative, the perturbation expansion cannot satisfy all the boundary and initial conditions, and the expansion thus is not valid in boundary and initial layers. Since the boundary and initial conditions required to form a well-posed problem depend on the type of the partial differential equation under consideration, nonuniformities might arise if the type of the perturbation equations is different from the type of the original equation. In the fourth class, singularities that are not part of the exact solution appear at some point in the expansion, generally becoming more pronounced in succeeding terms.

To illustrate how nonuniform expansions arise and how they are recognized, we give several examples for each source of nonuniformity. These examples also serve to describe the mechanics of carrying out parameter perturbations. Moreover, most of these examples are taken up again in the remaining chapters where they are rendered uniformly valid. To conclude this chapter, we discuss the role of coordinates (dependent as well as independent) in making the expansions uniform or nonuniform and the role of perturbation methods in choosing the coordinate systems that render the expansions uniformly valid.

9.2.1 2.1. Infinite Domains

2.1.1. The Duffing Equation

Consider the oscillations of a mass connected to a nonlinear spring described by Duffing's equation

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (2.1.1)$$

where ϵ is a small positive number. This problem admits the integral

$$\dot{u}^2 + u^2 + \epsilon \frac{u^4}{2} = \left(1 + \frac{\epsilon a^2}{2}\right) a^2 \quad (2.1.2)$$

Equation (2.1.2) shows that u is bounded for all times when ϵ is positive.

Let us seek an approximate solution in the form of a Poincaré-type asymptotic expansion

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m(t) \quad (2.1.3)$$

Substituting into (2.1.1), expanding, and equating coefficients of equal powers of ϵ lead to the following problems for u_0 and u_1

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + u_0 &= 0, & u_0(0) &= a, & \dot{u}_0(0) &= 0 \\ \ddot{u}_1 + u_1 &= -u_0^3, & u_1(0) &= 0, & \dot{u}_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

The solution for u_0 that satisfies the initial conditions is

$$u_0 = a \cos t \quad (2.1.6)$$

Substituting for u_0 in (2.1.5) and using the trigonometric identity $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ lead to

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4} \quad (2.1.7)$$

The solution of (2.1.7) that satisfies the initial conditions in (2.1.5) is

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8} t \sin t + \frac{a^3}{32} (\cos 3t - \cos t) \quad (2.1.8)$$

Thus

$$u = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\epsilon^2) \quad (2.1.9)$$

The two-term expansion above cannot approximate the solution as $t \rightarrow \infty$ because the term $t \sin t$ makes $u_1/u_0 \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$; $t \sin t$ is called a secular term. It tends to infinity as $t \rightarrow \infty$, whereas u should be bounded for all t as discussed above.

The variable t does not need to be infinite for (2.1.9) to break down; if $t = O(\epsilon^{-1})$, the second term is of the same order as the first, contrary to our assumption that ϵu_1 is a small correction to u_0 when we derived (2.1.9). When more terms in the series are calculated, secular terms of the form $t^n(\cos t, \sin t)$ are obtained. Although the resulting series is convergent, it is slowly convergent, and one cannot represent the solution for all t using a finite number of terms of this series.

The appearance of secular terms is characteristic of nonlinear oscillation problems, hence one should not expect to obtain a uniformly valid straightforward expansion in these cases.

2.1.2. A Model for Weak Nonlinear Instability

As a model for the weak nonlinear instability of a standing wave, we consider the problem

$$u_{tt} - u_{xx} - u = u^3 \quad (2.1.10)$$

$$u(x, 0) = \epsilon \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2.1.11)$$

The initial conditions suggest an expansion of the form

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \cdots \quad (2.1.12)$$

Substituting this expansion into (2.1.10) and (2.1.11) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

Order ϵ

$$u_{1tt} - u_{1xx} - u_1 = 0 \quad (2.1.13)$$

$$u_1(x, 0) = \cos kx, \quad u_{1t}(x, 0) = 0$$

Order ϵ^2

$$u_{2tt} - u_{2xx} - u_2 = 0 \quad (2.1.14)$$

$$u_2(x, 0) = u_{2i}(x, 0) = 0$$

Order ϵ^3

$$u_{3tt} - u_{3xx} - u_3 = u_1^3 \quad (2.1.15)$$

$$u_3(x, 0) = u_{3t}(x, 0) = 0$$

The solution of the first-order problem (2.1.13) is

$$u_1 = \cos \sigma_1 t \cos kx, \quad \sigma_1^2 = k^2 - 1 \quad (2.1.16)$$

Thus the wave is stable or unstable depending on whether k is greater or less than unity. The special case $k = 1$ separates stable from unstable waves.

The solution of the second-order problem (2.1.14) is $u_2 = 0$. Substituting for u_1 from (2.1.16) into (2.1.15) and solving the resulting problem, we have

$$\begin{aligned} u_3 = & \frac{3}{128\sigma_1^2} [12\sigma_1 t \sin \sigma_1 t + \cos \sigma_1 t - \cos 3\sigma_1 t] \cos kx \\ & + \frac{1}{128k^2} [3(\cos \sigma_1 t - \cos \mu t) + k^2(\cos 3\sigma_1 t - \cos \mu t)] \cos 3kx \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

where $\mu^2 = 9k^2 - 1$. Therefore

$$u = \epsilon \cos \sigma_1 t \cos kx + \epsilon^3 \left[\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{terms bounded as } t \rightarrow \infty \right] \quad (2.1.18)$$

Here again the straightforward expansion is invalid when $t = O(\epsilon^{-2})$ or larger because of the presence of the secular term $t \sin \sigma_1 t$.

2.1.3. Supersonic Flow Past a Thin Airfoil

As a third example showing how an infinite domain is responsible for a nonuniformity in an expansion of the Poincaré type, let us consider a uniform inviscid supersonic flow past the thin symmetric airfoil shown in Figure 2-1.

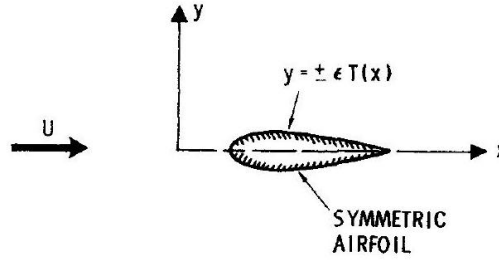


Figure 2-1

If we assume that the velocity vector $\mathbf{q} = U \text{grad}(x + \phi)$, the equation governing the potential function ϕ for steady two-dimensional, irrotational, isentropic motion is

$$\begin{aligned} \phi_{yy} - B^2 \phi_{xx} = M^2 \left[\frac{\gamma - 1}{2} (2\phi_x + \phi_x^2 + \phi_y^2) (\phi_{xx} + \phi_{yy}) \right. \\ \left. + (2\phi_x + \phi_x^2) \phi_{xx} + 2(1 + \phi_x) \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{yy} \right] \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

where $B^2 = M^2 - 1$ and M is the free-stream Mach number. The normal velocity vanishes on the surface; that is, the flow must be tangent to the surface. Hence

$$\frac{\phi_y}{1 + \phi_x} = \epsilon T'(x) \quad \text{at} \quad y = \epsilon T(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.1.20)$$

where l is the airfoil chord. The boundary condition upstream is

$$\phi(x, y) = 0 \quad (2.1.21)$$

Van Dyke (1952) obtained a second-order solution to (2.1.19) through (2.1.21) by iteration for small but finite ϵ . Let us obtain an expansion of the Poincaré type using ϵ as the perturbation parameter. Let

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \cdots \quad (2.1.22)$$

Since ϵ is small, we can greatly simplify the problem by transferring the boundary condition (2.1.20) from $y = \epsilon T(x)$ to $y = 0$ by using the following Taylor series expansion

$$\phi(x, \epsilon T) = \phi(x, 0) + \epsilon T \phi_y(x, 0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 T^2 \phi_{yy}(x, 0) + \dots$$

Thus we rewrite (2.1.20) as

$$\frac{\phi_y(x, 0) + \epsilon T \phi_{yy}(x, 0) + \dots}{1 + \phi_x(x, 0) + \dots} = \epsilon T'(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.1.23)$$

Substituting (2.1.22) into (2.1.19), (2.1.21), and (2.1.23), expanding for small ϵ , and equating coefficients of equal powers of ϵ , we have

Order ϵ

$$\phi_{1yy} - B^2 \phi_{1xx} = 0 \quad (2.1.24)$$

$$\phi_{1y}(x, 0) = T'(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.1.25)$$

$$\phi_1(x, y) = 0 \quad (\text{upstream}) \quad (2.1.26)$$

Order ϵ^2

$$\phi_{2yy} - B^2 \phi_{2xx} = M^2 [(\gamma + 1) \phi_{1x} \phi_{1xx} + (\gamma - 1) \phi_{1x} \phi_{1yy} + 2 \phi_{1y} \phi_{1xy}] \quad (2.1.27)$$

$$\phi_{2y} = \phi_{1x} T' - \phi_{1yy} T \text{ at } y = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq l \quad (2.1.28)$$

$$\phi_2(x, y) = 0 \quad (\text{upstream}) \quad (2.1.29)$$

The general solution of (2.1.24) is

$$\phi_1 = f(\xi) + g(\eta) \quad (2.1.30)$$

where

$$\xi = x - By, \quad \eta = x + By$$

The upstream condition (2.1.26) demands that $g = 0$, while the condition (2.1.25) demands that $f = -T(\xi)/B$. Therefore

$$\phi_1 = -T(\xi)/B \quad (2.1.31)$$

Substituting for ϕ_1 into (2.1.27) gives

$$\phi_{2yy} - B^2 \phi_{2xx} = M^4 (\gamma + 1) f' f'' \quad (2.1.32)$$

Transforming the left-hand side of (2.1.32) into the ξ and η coordinates, we have

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{M^4 (\gamma + 1)}{4B^2} f' f'' \quad (2.1.33)$$

whose solution is

$$\phi_2 = -\frac{M^4 (\gamma + 1)}{8B^2} f'^2 \eta + h(\xi) \quad (2.1.34)$$

The function $h'(\xi)$ can be determined from (2.1.28) to be

$$h'(\xi) = \frac{M^4 (\gamma + 1)}{4B^4} \xi T' T'' + \frac{1}{B^2} \left[1 - \frac{M^4 (\gamma + 1)}{8B^2} \right] T'^2 - T T'' \quad (2.1.35)$$

Since u (the axial component of velocity) is given by $U(1 + \phi_x)$

$$\frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma + 1)}{4B^2} \right) T^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M^4}{B^3} y T' T'' - T T'' \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.1.36)$$

For $y = O(1)$, the third term in (2.1.36) is bounded and thus is a small correction to the second term which is in turn a small correction to the first term as $\epsilon \rightarrow 0$. However, as y increases to $O(\epsilon^{-1})$ and larger, the third term becomes of the same order as the second, and then of the same order as the first because of the presence of the term $(1/2)(\gamma + 1)M^4 B^{-3} y T' T''$ which makes u_2/u_1 unbounded as $y \rightarrow \infty$. Although there are no circular functions in this problem, this term can be considered a secular term.

2.1.4. Small Reynolds Number Flow Past a Sphere

The fourth example given here to show the difficulty arising from an infinite domain is the small Reynolds number, incompressible, uniform flow past a sphere. In the spherical coordinate system shown in Figure 2-2, the full Navier-Stokes equations give the following dimensionless equation for the stream function $\psi(r, \theta)$ ($u_r = \psi_\theta/r^2 \sin \theta$, $u_\theta = -\psi_r/r \sin \theta$) for axisymmetric flow

$$\mathcal{D}^4 \psi = \frac{R}{r^2 \sin \theta} \left(\psi_\theta \frac{\partial}{\partial r} - \psi_r \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \psi_r - 2 \frac{\psi_\theta}{r} \right) \mathcal{D}^2 \psi \quad (2.1.37)$$

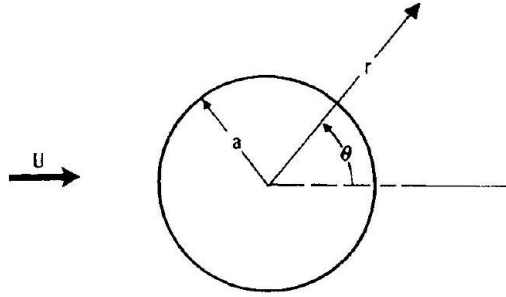


Figure 2-2

where the Reynolds number $R = Ua/\nu$ (ν is kinematic viscosity) and

$$\mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.38)$$

The boundary conditions at the sphere's surface call for the vanishing of the velocity; that is, in dimensionless form,

$$\psi(1, \theta) = \psi_r(1, \theta) = 0 \quad (2.1.39)$$

The condition that the flow is uniform upstream gives

$$\psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty \quad (2.1.40)$$

Equations (2.1.37) through (2.1.40) form a well-posed problem for the stream function ψ .

Let us seek a formal expansion of the Poincaré type valid for small R

$$\psi(r, \theta; R) = \sum_{m=0}^{\infty} R^m \psi_m(r, \theta) \quad (2.1.41)$$

Substituting (2.1.41) into (2.1.37) through (2.1.40), expanding for small R , and equating coefficients of equal powers of R lead to

Order R^0

$$\mathcal{D}^4 \psi_0 = 0 \quad (2.1.42)$$

$$\psi_0(1, \theta) = \psi_{0r}(1, \theta) = 0 \quad (2.1.43)$$

$$\psi_0(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (2.1.44)$$

Order R

$$\mathcal{D}^4 \psi_1 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\psi_{0\theta} \frac{\partial}{\partial r} - \psi_{0r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \psi_{0r} - 2 \frac{\psi_{0\theta}}{r} \right) \mathcal{D}^2 \psi_0 \quad (2.1.45)$$

$$\psi_1(1, \theta) = \psi_{1r}(1, \theta) = 0 \quad (2.1.46)$$

$$\psi_1(r, \theta) = o(r^2) \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (2.1.47)$$

Equation (2.1.44) suggests that ψ_0 has the form

$$\psi_0 = f(r) \sin^2 \theta \quad (2.1.48)$$

Substituting this assumed form into (2.1.42) leads to

$$f^{iv} - \frac{4f''}{r^2} + \frac{8f'}{r^3} - \frac{8f}{r^4} = 0 \quad (2.1.49)$$

whose general solution is

$$f = c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1} \quad (2.1.50)$$

The boundary condition (2.1.44) demands that $c_4 = 0$, and $c_2 = 1/2$, while the boundary conditions (2.1.43) demand that $c_1 = -3/4$ and $c_{-1} = 1/4$. Therefore

$$\psi_0 = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (2.1.51)$$

This solution was obtained by Stokes (1851).

Substituting for ψ_0 from (2.1.51) into (2.1.45) gives

$$\mathcal{D}^4 \psi_1 = -\frac{9}{4} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (2.1.52)$$

Equation (2.1.52) and the boundary conditions (2.1.46) and (2.1.47) suggest that a particular solution for ψ_1 has the form

$$\psi_1 = g(r) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (2.1.53)$$

With this form for ψ_1 , g should satisfy the following equation and boundary conditions

$$g^{iv} - \frac{12g''}{r^2} + \frac{24g'}{r^3} = -\frac{9}{4} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) \quad (2.1.54)$$

$$g(1) = g'(1) = 0 \quad (2.1.55)$$

$$g(r) = o(r^2) \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (2.1.56)$$

The general solution of (2.1.54) is

$$g = b_{-2}r^{-2} + b_0 + b_3r^3 + b_5r^5 - \frac{3}{16}r^2 + \frac{9}{32}r + \frac{3}{32}\frac{1}{r} \quad (2.1.57)$$

The boundary condition (2.1.56) demands that $b_3 = b_5 = 0$. However, even with this choice for b_3 and b_5 , g does not behave properly as $r \rightarrow \infty$ because of the presence of the term $-(3/16)r^2$ in the particular solution for g . It is clear that no values for b_0 and b_{-2} can be found that correct this shortcoming. Moreover, no other complementary solution of (2.1.52) can be found which makes ψ_1 behave properly as $r \rightarrow \infty$. The boundary conditions (2.1.55) demand that $b_0 = b_{-2} = -3/32$, hence

$$\psi_1 = -\frac{3}{32} \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (2.1.58)$$

Here again difficulty with the straightforward expansion arose because of the infinite domain. The two-term expansion

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \frac{3}{32}R \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \\ \times \sin^2 \theta \cos \theta + O(R^2) \text{ as } R \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

satisfies the surface boundary conditions, but it does not satisfy the boundary condition at infinity. Thus, this expansion breaks down for large r and this breakdown is called Whitehead's paradox because Whitehead (1889) was the first to obtain this solution, although by iteration, and the first to point out its nonuniformity.

9.2.2 2.2. A Small Parameter Multiplying the Highest Derivative

2.2.1. A Second-order Example

In order to show the difficulty that arises when a small parameter multiplies the highest derivative, we consider the following example after Latta (1964)

$$\epsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.2.1)$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b \quad (2.2.2)$$

where ϵ is a small positive number. First we seek a straightforward expansion of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(x), \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.2.3)$$

Substituting into (2.2.1) and equating coefficients of equal powers of ϵ lead to

$$y'_0 + y_0 = 0 \quad (2.2.4)$$

$$y'_n + y_n = -y''_{n-1} \quad (2.2.5)$$

It can be seen that at any level of approximation n , y_{n-1} is known, hence y_n for any n is given by a first-order differential equation. Consequently, the solutions of (2.2.4) and (2.2.5) cannot satisfy both of the boundary conditions (2.2.2), and one of them must be dropped. It is shown in Section 4.1.2 that the boundary condition at the origin must be dropped. Solving for the first two terms and imposing the boundary condition $y(1) = b$ give

$$y = be^{1-x} + \epsilon be^{1-x}(1-x) + O(\epsilon^2) \quad (2.2.6)$$

At the origin $y = be(1 + \epsilon)$, which is in general different from the a in (2.2.2). Hence the error in (2.2.3) is not uniform over $[0, 1]$, and the expansion breaks down at the origin.

To understand further the nature of the nonuniformity, let us look at the exact solution of (2.2.1) and (2.2.2), namely

$$y = \frac{(ae^{s_2} - b)e^{s_1x} + (b - ae^{s_1})e^{s_2x}}{e^{s_2} - e^{s_1}} \quad (2.2.7)$$

where

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon} \quad (2.2.8)$$

It can be shown that

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ fixed}}} y(x, \epsilon) = be^{1-x} \quad (2.2.9)$$

is in agreement with the first term in (2.2.6) and satisfies the boundary condition $y(1) = b$. To understand what happens at the boundary $x = 0$, let us estimate y to order ϵ from the exact solution and denote it by $\tilde{y}$. As $\epsilon \rightarrow 0$

$$s_1 = -1 + O(\epsilon), \quad s_2 = -\frac{1}{\epsilon} + 1 + O(\epsilon) \quad (2.2.10)$$

Therefore

$$\tilde{y} = be^{1-x} + (a - be)e^{-(x/\epsilon)+x} + O(\epsilon) \quad (2.2.11)$$

In the above estimation the term proportional to $\exp[-(x/\epsilon) + x]$ was not neglected because an estimate is being made not only when $\epsilon \rightarrow 0$, but when $x \rightarrow 0$ also. From the manner in which (2.2.11) was constructed, the order of error is uniform on $[0, 1]$. The behavior of $\tilde{y}$ is shown schematically in Figure 2-3 together with the first term of (2.2.6) denoted by $\hat{y}$. It can be seen that, for small ϵ , $\tilde{y}$ agrees with $\hat{y}$ except in a small region near the origin where it changes quickly in order to satisfy the boundary condition there. Thus $y(x; \epsilon)$ is continuous for $\epsilon > 0$ but discontinuous for $\epsilon = 0$. In fact

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y(x; \epsilon) = a \quad (2.2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(x; \epsilon) = be \quad (2.2.13)$$

which shows the nonuniform convergence of the exact solution $y(x; \epsilon)$ to $\hat{y}$ [the first term in (2.2.6)].

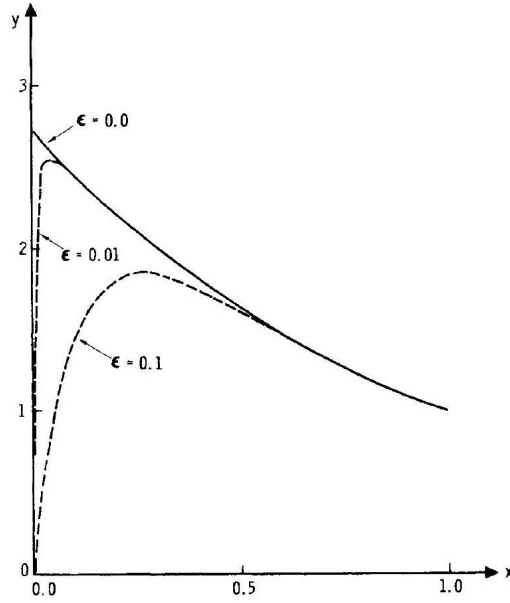


Figure 2-3 In this special case $a = 0$ and $b = 1$.

2.2.2. High Reynolds Number Flow Past a Body

Consider a two-dimensional viscous incompressible uniform flow past the body shown in Figure 2-1. The complete steady Navier-Stokes equations give for the stream function ψ ($u = \psi_v, v = -\psi_x$ with u and v the velocity components along the x and y coordinates)

$$\left(\psi_v \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{R} \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.2.14)$$

where the Reynolds number $R = UL/\nu$ with ν the kinematic viscosity of the fluid. Equation (2.2.14) needs to be supplemented by boundary conditions. At the body surface, $y = F(x)$, both components of velocity vanish; thus

$$F' \psi_v[x, F(x)] + \psi_x[x, F(x)] = 0 \quad (2.2.15)$$

$$\psi[x, F(x)] = 0 \quad (2.2.16)$$

The second condition represents the vanishing of the velocity tangent to the body (the so-called no-slip condition), while the first condition represents the vanishing of the normal velocity component. The third boundary condition is

$$\psi(x, y) \rightarrow y \quad (\text{upstream}) \quad (2.2.17)$$

Seeking a straightforward solution of the form

$$\psi(x, y; R) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(R) \psi_m(x, y) \quad \text{as } R \rightarrow \infty \quad (2.2.18)$$

where

$$\delta_0(R) = 1 \quad \text{and} \quad \delta_m(R) = o[\delta_{m-1}(R)] \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

we obtain the following equation for the first term (inviscid flow)

$$\left(\psi_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{0x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (2.2.19)$$

which is a third-order rather than a fourth-order differential equation. Thus ψ_0 cannot satisfy all the boundary conditions (2.2.15) through (2.2.17), and one of them must be dropped. Since an inviscid flow can slide on the body, the boundary condition (2.2.16) must be dropped. Therefore the resulting solution for ψ_0 , although it approximates the exact solution very well as $R \rightarrow \infty$ away from the body, breaks down near the body. Regardless of how small the viscosity is (how large R is), the tangential velocity must vanish at the surface. Therefore for large R the exact solution is close to ψ_0 except in a thin layer near the body where it undergoes a quick change in order to retrieve the no-slip condition. This thin layer is Prandtl's boundary layer.

2.2.3. Relaxation Oscillations

The problem considered next is that of finding the periodic solutions of equations of the form

$$\epsilon u'' = f(u', u) \quad (2.2.20)$$

for small ϵ when $f(u', u) = 0$ has no periodic solutions. Van der Pol (1927) was the first to treat a problem of this kind in connection with explaining the jerky oscillations (relaxation oscillations) of an electronic circuit governed by the following equation which is named after him

$$u'' + u = \alpha \left(u' - \frac{1}{3} u'^3 \right) \quad (2.2.21)$$

If we let $v = u'$, $x = u/\alpha$, and $\epsilon = \alpha^{-2}$, (2.2.21) becomes

$$\epsilon \frac{dv}{dx} = \frac{v - \frac{v^3}{3} - x}{v} \quad (2.2.22)$$

If $\epsilon = 0$, $x = v - (v^3/3)$, which is shown in Figure 2-4. We assume that ϵ is very small, but different from zero, and consider a solution curve that starts at P . Since P is away from Γ , dv/dx is approximately $-\infty$ down to P_1 where

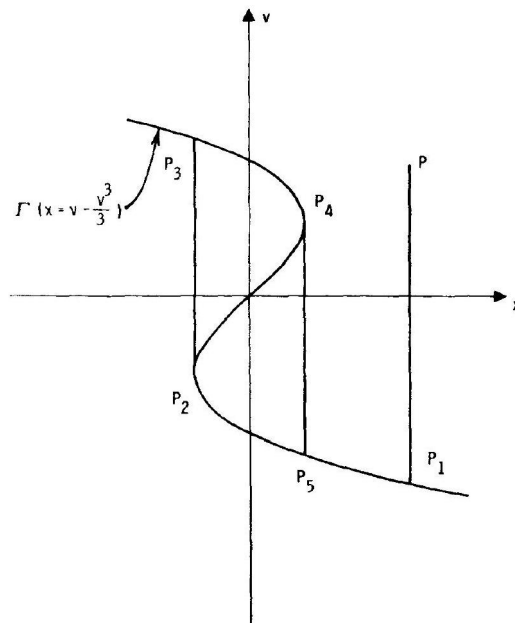


Figure 2-4

it reaches Γ . At this point, $dv/dx = 0$. Since dv/dx is approximately $\pm\infty$ away from Γ , the solution curve tends to follow Γ , staying below it, until it reaches the vicinity of P_2 . At this point the solution curve turns almost vertically upward until it intersects Γ at P_3 . Since $dv/dx \approx \pm\infty$ away from Γ , the solution curve tends to follow Γ from P_3 clockwise, staying above Γ , until it reaches the vicinity of P_4 , where it turns almost vertically downward to intersect Γ at P_5 . Then it tends to follow the path from P_5 to P_2 . Therefore the limit of the periodic solution as $\epsilon \rightarrow 0$ consists of the two segments P_5P_2 and P_3P_4 of Γ , and the two vertical lines P_4P_5 and P_2P_3 . Thus the limit solution as $\epsilon \rightarrow 0$ satisfies $f(u', u) = 0$ except at certain points where $v = u'$ has jump discontinuities.

2.2.4. Unsymmetrical Bending of Prestressed Annular Plates

The last example in this class is the unsymmetrical bending of a prestressed annular plate introduced by Alzheimer and Davis (1968). The plate

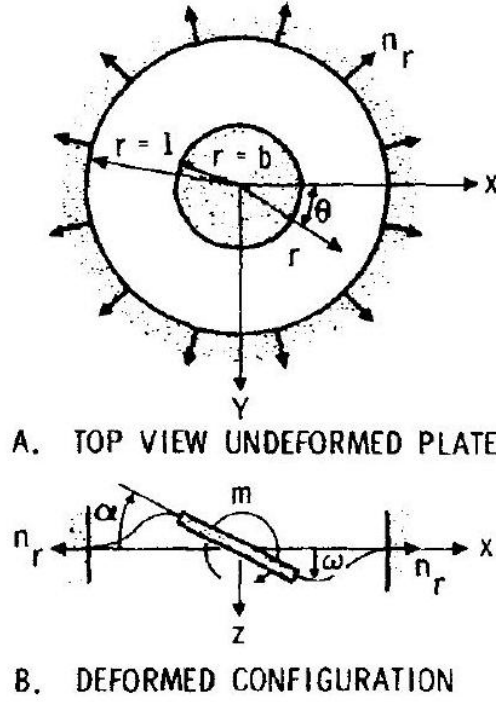


Figure 2-5

is clamped at the outer edge and contains a central rigid inclusion as shown in Figure 2-5. A moment is applied to the rigid inclusion which rotates about a diameter, out of the plane of the plate. For a thin annular plate with in-plane forces and no surface loading, Timoshenko and WoinowskyKrieger (1959) derived the following equation for the lateral displacement ω

$$\nabla^4 \omega = \frac{r_1^2}{D} \left[n_r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + n_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + 2n_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] \quad (2.2.23)$$

where n_r, n_θ , and $n_{r\theta}$ are the in-plane forces per unit length. In (2.2.23) the radial distance is made dimensionless with respect to the outer radius r_1 , and the lateral displacement is made dimensionless with respect to the plate thickness h . The flexural rigidity $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, where E is Young's modulus and ν is Poisson's ratio.

We assume that the in-plane forces are applied in the form of an initial uniform radial prestressing, and that they are large enough to remain essentially constant during any subsequent lateral motion (i.e., $n_r = n_\theta = n = \text{constant}$, $n_{r\theta} = 0$). Thus (2.2.23) reduces to

$$\epsilon^2 \nabla^4 \omega - \nabla^2 \omega = 0 \quad (2.2.24)$$

where

$$\epsilon^2 = \frac{D}{r_1^2 n}$$

Figure 2-5 yields the following boundary conditions

$$\omega = b\alpha \cos \theta, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = \alpha \cos \theta \quad \text{at} \quad r = b \quad (2.2.25)$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = 1 \quad (2.2.26)$$

where α is assumed to be small so that $\sin \alpha \approx \alpha$, and $b = r_2/r_1$ with r_2 the radius of the rigid inclusion.

The boundary conditions (2.2.25) and (2.2.26) suggest a solution of the form

$$\omega = u(r) \cos \theta \quad (2.2.27)$$

Hence

$$\epsilon^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) - \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \quad (2.2.28)$$

$$u(b) = b\alpha, \quad \frac{du}{dr}(b) = \alpha \quad (2.2.29)$$

$$u(1) = 0, \quad \frac{du}{dr}(1) = 0 \quad (2.2.30)$$

As $\epsilon \rightarrow 0$, (2.2.28) reduces to

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (2.2.31)$$

which is of the second order, and its solution cannot satisfy the four boundary conditions (2.2.29) and (2.2.30). Hence two boundary conditions have to be dropped. If we seek a straightforward expansion of the form

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n(r) \quad (2.2.32)$$

we find that each u_n satisfies (2.2.31). Consequently, (2.2.32) is not valid for all r in $[b, 1]$. A uniformly valid expansion is obtained in Section 4.1.5 by using the method of matched asymptotic expansions.

9.2.3 2.3. Type Change of a Partial Differential Equation

Since the boundary and initial conditions required to make a well-posed problem depend on the type of the partial differential equation, difficulties might arise if the original equation changes, say, from elliptic to parabolic or hyperbolic as the small parameter vanishes. This class can be considered a

subclass of that discussed in Sections 2.2.1 through 2.2.4. In the following discussion we describe two examples and the difficulties encountered in the expansion of one of them.

2.3.1. A Simple Example

Let us consider the following Dirichlet problem for the function $\phi(x, y, \epsilon)$

$$\phi_{xx} + \epsilon \phi_{yy} - \phi_y = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (2.3.1)$$

$$\phi(0, y) = a(y) \quad (2.3.2)$$

$$\phi(x, 0) = b(x) \quad (2.3.3)$$

$$\phi(1, y) = c(y) \quad (2.3.4)$$

$$\phi(x, 1) = d(x) \quad (2.3.5)$$

For $\epsilon > 0$ the above problem is a well-posed problem and admits a unique solution. However, if $\epsilon = 0$, (2.3.1) reduces to

$$\phi_{xx} - \phi_y = 0 \quad (2.3.6)$$

which is parabolic (diffusion equation). The solution of (2.3.6) cannot in general satisfy all the boundary conditions (2.3.2) through (2.3.5) and one of them must be dropped. As discussed in Section 4.1.2, (2.3.5) must be dropped, and thus the resulting solution is not valid near $y = 1$. For small ϵ the solution of the reduced equation is expected to be close to the exact solution except in a narrow region near $y = 1$ where the latter changes rapidly so that it satisfies the boundary condition which is about to be lost.

It should be noted that the singular nature of the problem depends not only on the change in type of equation but also on the given region in which the solution is obtained. Although the solution of (2.3.1) in the region $0 \leq x, y \leq 1$ does not tend to that of (2.3.6) uniformly, the solution of (2.3.1) tends uniformly to the solution of (2.3.6) in the upper half-plane.

Next we discuss an example in which the change in type of equation does not lead to nonuniformities.

2.3.2. Long Waves on Liquids Flowing Down Inclined Planes

In this section we consider the characteristics of waves on the surface of a liquid film flowing down an inclined plane (Figure 2-6). This is a rather involved example, and it is discussed here because it illustrates a general technique for long nonlinear dispersive waves. The flow is governed by the

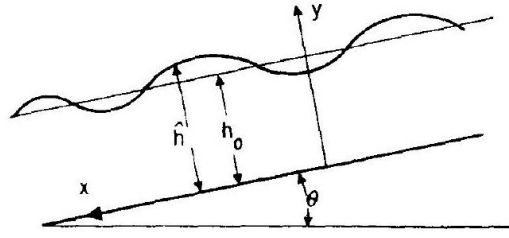


Figure 2-6

Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + g \sin \theta + \nu \nabla^2 \hat{u} \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} - g \cos \theta + \nu \nabla^2 \hat{v} \quad (2.3.9)$$

where $\hat{u}$ and $\hat{v}$ are the components of the velocity in the x and y directions, $\hat{p}$ is liquid pressure, t is time, and ρ and ν are the liquid's density and kinematic viscosity, respectively. At the liquid/solid interface, both components of velocity vanish; that is

$$\hat{u} = \hat{v} = 0 \quad \text{at} \quad \hat{y} = 0 \quad (2.3.10)$$

If the liquid surface is flat (i.e., no waves), the following laminar steady solution exists

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2h_0 \hat{y} - \hat{y}^2), \quad \hat{V} = 0 \\ \hat{P} &= \hat{p}_0 - \rho g \cos \theta (\hat{y} - h_0) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

In this solution we used the boundary condition $\partial\hat{u}/\partial\hat{y} = 0$ at $\hat{y} = h_0$ (i.e., no shear).

We next consider fluctuations in this steady-flow configuration. We introduce dimensionless quantities according to

$$\begin{aligned}\alpha &= h_0/l, \quad h = \hat{h}/h_0, \quad y = \hat{y}/h_0, \quad x = \hat{x}/l \\ U &= \hat{O}/U_L, \quad u + U = \hat{u}/U_L, \quad v = \hat{v}/\alpha U_L \\ t &= \hat{t}U_L/l, \quad P = \hat{P}/\rho gh_0 \sin \theta, \quad p + P = \hat{p}/\rho gh_0 \sin \theta\end{aligned}\quad (2.3.12)$$

where $U_L = gh_0^2 \sin \theta / 2\nu$, l is a characteristic length of the waves, and α is a dimensionless quantity measuring the shallowness of the liquid. Substituting (2.3.12) into (2.3.7) through (2.3.9) and using (2.3.11), we obtain the following equations for the dimensionless fluctuations

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.3.13)$$

$$u_t + (u + U)u_x + v(u_y + U') = -\frac{2p_x}{R} + \frac{1}{\alpha R}(u_{yy} + \alpha^2 u_{xx}) \quad (2.3.14)$$

$$v_t + (u + U)v_x + uv_y = -\frac{2}{R\alpha^2}p_y + \frac{1}{\alpha R}(v_{yy} + \alpha^2 v_{xx}) \quad (2.3.15)$$

where $R = U_L h_0 / \nu$ is a Reynolds number for the liquid film, $U = 2y - y^2$, and primes denote differentiation with respect to y .

Equation (2.3.13) can be solved by introducing a stream function $\psi(x, y, t)$ such that

$$(u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$$

Then (2.3.14) and (2.3.15) can be combined into

$$\begin{aligned}\psi_{yyyy} &= \alpha R [\psi_{yyt} + (U + \psi_y) \psi_{xyy} - (U'' + \psi_{yyy}) \psi_x] - 2\alpha^2 \psi_{xxyy} \\ &\quad + \alpha^3 R [\psi_{xxt} + (U + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy}] - \alpha^4 \psi_{xxxx}\end{aligned}\quad (2.3.16)$$

Equation (2.3.16) must be supplemented by boundary conditions. At the solid/liquid interface, (2.3.10) gives

$$\psi_y(x, 0, t) = \psi(x, 0, t) = 0 \quad (2.3.17)$$

At the free surface the normal velocity of the liquid is equal to the velocity of the interface; that is

$$h_t + (U + \psi_y) h_x + \psi_x = 0 \quad \text{at} \quad y = h(x) \quad (2.3.18)$$

Moreover, the condition that the tangential stress vanishes at this free surface gives

$$(U' + \psi_{yy} - \alpha^2 \psi_{xx}) (1 - \alpha^2 h_x^2) - 4\alpha^2 \psi_{xy} h_x = 0 \quad \text{at} \quad y = h \quad (2.3.19)$$

Finally, the continuity of the normal stress across this free surface demands that

$$\begin{aligned}-p + (h - 1) \cot \theta - \frac{Th_{xx} \operatorname{cosec} \theta}{(1 + \alpha^2 h_x^2)^{3/2}} - 2\alpha \frac{(\psi_{yy} - \alpha^2 \psi_{xx}) h_x}{1 + \alpha^2 h_x^2} \\ - 2\alpha \psi_{xy} \frac{1 - \alpha^2 h_x^2}{1 + \alpha^2 h_x^2} = C \quad \text{at} \quad y = h\end{aligned}\quad (2.3.20)$$

where from (2.3.14)

$$p_x = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \psi_{yyy} - \frac{1}{2} R [\psi_{yt} + (U + \psi_y) \psi_{xy} - (U' + \psi_{yy}) \psi_x] + \frac{1}{2} \alpha \psi_{xxy} \quad (2.3.21)$$

and

$$T = \frac{\sigma}{\rho g l^2}$$

with σ the liquid surface tension.

To determine an equation describing the dimensionless elevation of the disturbed surface, we follow Benney (1966a) by first finding a perturbation solution for (2.3.16), (2.3.17), and (2.3.19) through (2.3.21) in powers of α and substituting the expansion for ψ into (2.3.18). Thus we let

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \alpha\psi_1 + \cdots \\ p &= \alpha^{-1}p_{-1} + p_0 + \alpha p_1\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

in the former equations and equate coefficients of like powers of α to obtain
Order α^0

$$\psi_{0yyyy} = 0\tag{2.3.23}$$

$$\psi_0 = \psi_{0y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0\tag{2.3.24}$$

$$\psi_{0yy} = 2(y-1) \quad \text{at} \quad y = h\tag{2.3.25}$$

$$\psi_{0yyy} = 0 \quad \text{at} \quad y = h\tag{2.3.26}$$

Order α

$$\psi_{1yyyy} = R[\psi_{0yyt} + (U + \psi_{0y})\psi_{0xyy} - (U'' + \psi_{0yyy})\psi_{0x}]\tag{2.3.27}$$

$$\psi_1 = \psi_{1y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0\tag{2.3.28}$$

$$\psi_{1yy} = 0 \quad \text{at} \quad y = h\tag{2.3.29}$$

$$p_0 = (h-1)\cot\theta - T\operatorname{cosec}\theta h_{xx} \quad \text{at} \quad y = h\tag{2.3.30}$$

where

$$p_{0x} = \frac{1}{2}\psi_{1yyy} - \frac{1}{2}R[\psi_{0yt} + (U + \psi_{0y})\psi_{0xy} - (U' + \psi_{0yy})\psi_{0x}]\tag{2.3.31}$$

The solution of (2.3.23) through (2.3.26) is

$$\psi_0 = (h-1)y^2\tag{2.3.32}$$

Then (2.3.27) becomes

$$\psi_{1yyyy} = 2R(h_t + 2hh_xy)$$

whose solution subject to (2.3.28) is

$$\psi_1 = A(x, t)y^2 + B(x, t)y^3 + \frac{R}{12}\left(h_ty^4 + \frac{2}{5}hh_xy^5\right)\tag{2.3.33}$$

Substituting for ψ_1 into (2.3.29) through (2.3.31) and solving the resulting equations for A and B , we obtain

$$B = \frac{1}{3}(h_x \cot\theta - T\operatorname{cosec}\theta h_{xxx})\tag{2.3.34}$$

$$A = -h(h_x \cot\theta - T\operatorname{cosec}\theta h_{xxx}) - \frac{1}{2}Rh^2\left(h_t + \frac{2}{3}h^2h_x\right)$$

Since

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\psi(x, y, t)|_{y=h} \right] = (\psi_y h_x + \psi_x)|_{y=h}$$

we can rewrite (2.3.18) as

$$h_t + (2h - h^2) h_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi(x, y, t)|_{y=h} \right] = 0 \quad (2.3.35)$$

Substituting $\psi = \psi_0 + O(\alpha)$ into this equation, we have

$$h_t + 2h^2 h_x = 0 \quad (2.3.36)$$

Then

$$\psi_1(x, h, t) = -\frac{2}{3}h^3 (h_x \cot \theta - T \operatorname{cosec} \theta h_{xxx}) + \frac{8}{15}Rh^6 h_x$$

Letting $\psi = \psi_0 + \alpha\psi_1 + O(\alpha^2)$ in (2.3.35), we obtain

$$\begin{aligned} h_t + 2h^2 h_x + \alpha \left[-\frac{2}{3}h^3 \left(\cot \theta - \frac{4}{5}Rh^3 \right) h_{xx} + \frac{2}{3}T \operatorname{cosec} \theta h^3 h_{xxx} \right. \\ \left. - 2h^2 \left(\cot \theta - \frac{8}{5}Rh^3 \right) h_x^2 + 2T \operatorname{cosec} \theta h^2 h_x h_{xxx} \right] + O(\alpha^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Let us summarize what we have accomplished in this section. We started with the elliptic equation (2.3.16) which was replaced by (2.3.23) and (2.3.27) which are clearly not elliptic. From these perturbation equations we arrived at (2.3.37) which is clearly hyperbolic. Thus nonuniformities due to the type change of equation did not arise because of the unboundedness of the domain.

9.2.4 2.4. The Presence of Singularities

In this class the expansions have singularities within the region of interest, which are not part of the exact solution. Moreover, in the higher-order terms, the singularities are not only preserved, but they become even more pronounced.

2.4.1. Shift in Singularity

As a first example in this class, we consider the problem discussed by Lighthill (1949a)

$$(x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0 \quad \text{with} \quad y(1) = e^{-1} \quad (2.4.1)$$

This equation is singular along the line $x = -\epsilon y$; the boundary condition makes the exact solution $y(x)$ positive for $x \geq 0$, hence $y(x)$ is regular in $0 \leq x < \infty$.

To determine a straightforward expansion, we let

$$y = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \cdots \quad (2.4.2)$$

Substituting (2.4.2) into (2.4.1), expanding, and equating coefficients of ϵ^0 and ϵ to zero lead to

$$x \frac{dy_0}{dx} + (2+x)y_0 = 0, \quad y_0(1) = e^{-1} \quad (2.4.3)$$

$$x \frac{dy_1}{dx} + (2+x)y_1 = -y_0 \frac{dy_0}{dx}, \quad y_1(1) = 0 \quad (2.4.4)$$

The solution of the zeroth-order problem is

$$y_0 = x^{-2}e^{-x} \quad (2.4.5)$$

Substituting for y_0 into (2.4.4) and solving the resultant equation, we have

$$y_1 = x^{-2}e^{-x} \int_1^x e^{-t}t^{-3} (1+2t^{-1}) dt \quad (2.4.6)$$

As $x \rightarrow 0$, $y_0 = 0(x^{-2})$, while $y_1 = 0(x^{-5})$. Thus although the exact solution is regular at $x = 0$, the zeroth-order solution is singular at $x = 0$, and the singularity grows stronger.

2.4.2. The Earth-moon-spaceship Problem

We consider next the motion of a spaceship of mass m which is moving in the gravitational field of two fixed mass-centers. The mass M_e of the earth is much larger than the mass M_m of the moon. With respect to the rectangular Cartesian coordinate system shown in Figure 2-7, the equations of motion in dimensionless form are

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1-\mu)\frac{x}{r_e^3} - \mu\frac{x-1}{r_m^3} \quad (2.4.7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(1-\mu)\frac{y}{r_e^3} - \mu\frac{y}{r_m^3} \quad (2.4.8)$$

$$r_e^2 = x^2 + y^2, \quad r_m^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad (2.4.9)$$

where

$$\mu = M_m / (M_m + M_e)$$

Distances and time were made dimensionless using, respectively, the distance

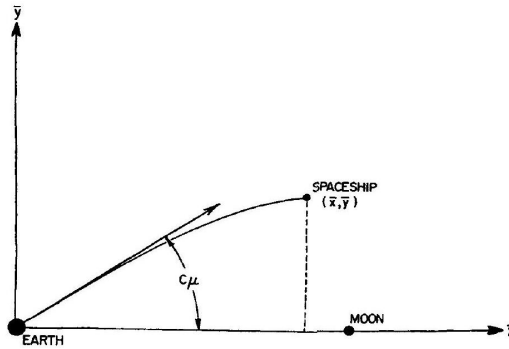


Figure 2-7

d between the mass centers, and

$$\left[\frac{d^3}{G(M_m + M_e)} \right]^{1/2}$$

where G is the universal gravitational constant. This problem has been studied by Lagerstrom and Kevorkian (1963b) for the initial conditions

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\mu c \quad \text{at} \quad t = 0 \quad (2.4.10)$$

$$h = -\rho^2, \quad \rho \neq 1 \quad (2.4.11)$$

where h is the total energy of the spaceship.

We interchange the roles of x and t and assume the following straightforward expansions for small μ

$$t = t_0(x) + \mu t_1(x) + \dots \quad (2.4.12)$$

$$y = \mu y_1 + \dots \quad (2.4.13)$$

Substituting (2.4.12) and (2.4.13) into (2.4.7) through (2.4.9) and equating coefficients of equal powers of μ lead to

$$\frac{t_0''}{t_0'^3} = \frac{1}{x^2} \quad (2.4.14)$$

$$-\frac{t_1''}{t_0'^3} + 3\frac{t_0''t_1'}{t_0'^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \quad (2.4.15)$$

$$\frac{y_1''}{t_0'^2} - \frac{t_0''}{t_0'^3}y_1' + \frac{y_1}{x^2} = 0 \quad (2.4.16)$$

The solutions of these equations subject to the initial conditions (2.4.10) and (2.4.11) are

$$\sqrt{2}t_0 = \frac{1}{\rho^3} \sin^{-1} \rho\sqrt{x} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{x(1-\rho^2x)} \quad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t_1 = & -\frac{2}{\rho^3} \sin^{-1} \rho\sqrt{x} + \frac{2-\rho^2}{\rho^2(1-\rho^2)} \sqrt{\frac{x}{1-\rho^2x}} - \frac{1}{2(1-\rho^2)^{3/2}} \\ & \times \ln \frac{1+(1-2\rho^2)x + 2[(1-\rho^2)(1-\rho^2x)x]^{1/2}}{1-x} \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

$$y_1 = -cx \quad (2.4.19)$$

Thus the above expansion breaks down as $x \rightarrow 1$ because t_1 has a logarithmic singularity. We find that the higher approximations are increasingly more singular near $x = 1$. In fact

$$t_2 = O[(1-x)^{-1}] \quad \text{as} \quad x \rightarrow 1 \quad (2.4.20)$$

2.4.3. Thermoelastic Surface Waves

We consider next the effect of heat conduction on waves propagating along the free surface of an isotropic elastic half-space. Maxwell's modified heat conduction law is used rather than that of Fourier in order to take into account the short time required to establish a steady-state

heat conduction when a temperature gradient is suddenly produced in the solid. Thus the heat flux h is assumed to be given by

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathbf{h} = -k \text{grad } \theta \quad (2.4.21)$$

where θ denotes the change in the absolute basic temperature θ_0 , k is the coefficient of thermal conductivity, and τ_0 is the thermal relaxation time. Equation (2.4.21) implies that thermal signals have finite rather than infinite speed of propagation. Our discussion here follows that of Nayfeh and Nemat-Nasser (1971).

Since the material is assumed to be isotropic, we consider two-dimensional motions in the $x - y$ plane, and we denote the corresponding displacements by u and v , respectively. The x axis is taken to coincide with the free surface and the y axis normal to it and directed toward the body. If $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ with λ and μ the Lam coefficients of elasticity, $b = [2 + (3\lambda/\mu)]\alpha\theta_0$ with α the coefficient of linear thermal expansion, and $g = \alpha(3\lambda + 2\mu)/\rho c_v$ with ρ the material density and c_v the specific heat at constant volume, then the coupled elastic and heat conduction equations can be written as

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.4.22)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (2.4.23)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = g \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + g\tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (2.4.24)$$

In the above equations time was made dimensionless by using $1/\omega^*$ and lengths were made dimensionless by using v_p/ω^* where

$$\omega^* = \frac{\rho c_v v_p^2}{k}, \quad v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (2.4.25)$$

At the free surface the normal and tangential stresses as well as the temperature gradient vanish; that is, at $y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.4.26)$$

$$(\beta^2 - 2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} - b\theta = 0 \quad (2.4.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (2.4.28)$$

The solution of (2.4.22) through (2.4.28) is assumed to be of the form

$$(u, v, \theta) = (a_1, a_2, a_3) \exp(-\alpha y + i\omega t + iqx) \quad (2.4.29)$$

where the real part of α is positive. The wave speed is then given by $c = \omega/\text{Real}(q)$ and the attenuation constant by $s = \text{Imaginary}(q)$. Substituting (2.4.29) into (2.4.22) through (2.4.25) and setting the determinant of the resulting linear system of equations for a_k to zero lead to the following three solutions for α in terms of q and ω

$$\alpha_1^2 = q^2 - \beta^2 \omega^2 \quad (2.4.30)$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 2q^2 - \tau\omega^2 - \omega^2(1 + \tau\epsilon) + i\omega(1 + \epsilon) \quad (2.4.31)$$

$$\alpha_2^2 \alpha_3^2 = \omega^4 \tau - \omega^2 q^2 - i\omega^3 + i\omega q^2(1 + \epsilon) + q^4 - q^2 \omega^2 \tau(1 + \epsilon) \quad (2.4.32)$$

where $\epsilon = bg/\beta^2$. For each α_k there exists an eigenvector which is given by

$$\left[1, i \frac{\alpha_k}{q}, i \frac{\beta^2 (q^2 - \omega^2 - \alpha_k^2)}{bq} \right] a_{1k} \quad \text{for } k = 2 \text{ and } 3 \quad (2.4.33)$$

and

$$\left(1, i \frac{\alpha_1 q}{q^2 - \beta^2 \omega^2}, 0 \right) a_{11} \text{ for } k = 1 \quad (2.4.34)$$

Substituting the eigenfunctions corresponding to the eigenvectors (2.4.33) and (2.4.34) into (2.4.26) through (2.4.28) and setting the determinant of the set of equations for a_{1k} to zero lead to, as $\omega \rightarrow \infty$

$$G(c^2) = \frac{A^2 [2 - c^2 - c^2 \tau(1 + \epsilon) + 2A]}{[1 - c^2 \tau(1 + \epsilon) + A]^2} \quad (2.4.35)$$

where

$$A^2 = (1 - c^2) (1 - c^2 \tau) - c^2 \tau \epsilon, \quad G(c^2) = \frac{(1 - \frac{1}{2} \beta^2 c^2)^4}{1 - \beta^2 c^2} \quad (2.4.36)$$

The classic Rayleigh wave speed can be obtained from (2.4.35) and (2.4.36) by letting $\epsilon = 0$; if $\beta^2 = 3$ (corresponding to a Poisson's ratio of $1/4$), $c^2 = 0.2817$. For small ϵ we may attempt to determine an expansion for c^2 whose first term is the Rayleigh solution. Thus we let

$$c^2 = c_R^2 (1 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots) \quad (2.4.37)$$

Substituting (2.4.37) into (2.4.35) and (2.4.36), expanding, and equating coefficients of equal powers of ϵ on both sides, we obtain

$$c_1 = - \frac{\tau c_R^2 \left[1 - \frac{1 - c_R^2}{F} \right]}{(1 - \tau c_R^2) \left[1 + \frac{dG}{dc^2} (c_R^2) \right]} \quad (2.4.38)$$

where

$$F = 2 - c_R^2(1 + \tau) + 2\sqrt{(1 - c_R^2)(1 - \tau c_R^2)} \quad (2.4.39)$$

Equation (2.4.38) shows that the expansion (2.4.37) breaks down as τ increases toward the value $\overline{c_R}^2$ where c_1 becomes unbounded. Higher approximation can be shown to be more singular than the second terms at $\tau = \overline{c_R}^2$.

If $\tau > \overline{c_R}^2$ the expansion (2.4.37) must be modified; otherwise A^2 is negative, hence from (2.4.32) a real part of one of the α terms becomes negative. The modified expansion is of the form

$$c^2 = \frac{1}{\tau} (1 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots) \quad (2.4.40)$$

The functions c_1 and c_2 can be determined by substituting (2.4.40) into (2.4.35) and equating coefficients of ϵ and ϵ^2 on both sides. The result is

$$c_1 = -\frac{\tau}{\tau - 1}, \quad c_2 = -\frac{\tau^3}{(1 - \tau)^3} - \frac{\tau}{\tau - 1}M^2 \quad (2.4.41)$$

where M is a root of

$$\left[G^{-1}(\tau^{-1}) + \frac{\tau}{1 - \tau} \right] M^2 - \frac{2\tau^2}{(1 - \tau)^2}M + \frac{\tau}{(1 - \tau)^2} = 0 \quad (2.4.42)$$

The coefficient of M^2 vanishes at $\tau = c_R^{-2}$, hence the expansion (2.4.40) is singular at this point. It can also be shown that this singularity is compounded in the higher approximation. Thus the first of the above expansions is valid for $\tau < c_R^{-2}$ and the second is valid for $\tau > c_R^{-2}$; both break down near $\tau = c_R^{-2}$. An expansion valid near this singularity is determined in Section 4.1.6 by using the method of matched asymptotic expansions.

2.4.4. Turning Point Problems

As a last example, we consider the asymptotic expansions of the solutions of

$$y'' + \lambda^2(1 - x^2)y = 0 \quad (2.4.43)$$

for large λ . For $|x| < 1$, the solutions of this equation are oscillatory, while for $|x| > 1$ they behave as exponentials. This suggests an expansion of the form

$$y = e^{\lambda\phi(x;\lambda)} \quad (2.4.44)$$

where

$$\phi = \phi_0(x) + \lambda^{-1}\phi_1(x) + \dots \quad (2.4.45)$$

Substituting this expansion into (2.4.43) and equating coefficients of like powers of λ , we obtain

$$\phi_0'^2 = -(1 - x^2) \quad (2.4.46)$$

$$2\phi_0'\phi_1' + \phi_0'' = 0 \quad (2.4.47)$$

The solutions of these equations are

$$\phi_0 = \begin{cases} \pm i \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau & \text{for } |x| < 1 \\ \pm \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau & \text{for } |x| > 1 \end{cases} \quad (2.4.48)$$

$$\phi_1 = -\frac{1}{2} \ln \phi_0' + \text{a constant} \quad (2.4.49)$$

Hence

$$y = \frac{1}{(1 - x^2)^{1/4}} \left[a_1 \cos \left(\lambda \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau \right) + b_1 \sin \left(\lambda \int^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau \right) \right] \quad (2.4.50)$$

for $|x| < 1$

and

$$y = \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/4}} \left[a_2 \exp \left(\lambda \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau \right) + b_2 \exp \left(-\lambda \int^x \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau \right) \right] \quad (2.4.51)$$

for $|x| > 1$

where a_i and b_i are constants.

The expansions (2.4.50) and (2.4.51) are called the Liouville-Green or WKB approximation (Section 7.1.3). These expansions are singular at $x = \pm 1$, hence they are not uniformly valid. The points $x = \pm 1$ are called turning points. The nonuniformity in this example arose because of the representation of the solutions in terms of elementary functions (namely, exponential and circular functions). The expansions show that the behavior of the solution changes across $|x| = 1$ from oscillatory to exponential, hence we need to represent the solutions by functions that exhibit this qualitative behavior. In this case the appropriate functions are the Airy functions (Section 7.3.1).

9.2.5 2.5. The Role of Coordinate Systems

In obtaining a parameter perturbation for a quantity such as $u(x; \epsilon)$, we first choose an independent variable which need not be the physical independent variable x but a function ζ of x and the small parameter ϵ . Then we assume

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\epsilon) u_m[\zeta(x; \epsilon)] \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.5.1)$$

where $\delta_m(\epsilon)$ is an asymptotic sequence. We substitute this expansion into the governing equations, expand for small ϵ keeping now ζ fixed, and then equate the coefficient of each δ_m to zero. Thus

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ fixed}}} \left[\frac{u}{\delta_0(\epsilon)} \right] \\ u_n &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ fixed}}} \left[\frac{u - \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m(\epsilon) u_m(\zeta)}{\delta_n(\epsilon)} \right] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

It is clear that, for a given sequence δ_n , u_m depends on the choice of $\zeta(x; \epsilon)$. Some of these choices ζ lead to nonuniform expansions, whereas others lead to uniform expansions. For example, choosing $\zeta = t$ in (2.1.1), we obtain the nonuniform expansion

$$u(t; \epsilon) = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\epsilon^2) \quad (2.5.3)$$

for Duffing's equation (Section 2.1.1). Had we chosen $\zeta = [1 + (3/8)\epsilon a^2] t$, we would have obtained

$$u(t; \epsilon) = a \cos \zeta + \frac{\epsilon a^3}{32} [\cos 3\zeta - \cos \zeta] + O(\epsilon^2) \quad (2.5.4)$$

which is uniformly valid. Coordinates such as $\zeta = [1 + (3/8)\epsilon a^2] t$, which lead to uniform expansions, are called optimal coordinates (Kaplun, 1954).

As a second example, we consider the model for the weak nonlinear instability problem of Section 2.1.2. Equation (2.1.18) gives the following expansion

$$\begin{aligned} u &= \epsilon \cos \sigma_1 t \cos kx \\ &+ \epsilon^3 \left[\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{terms bounded as } t \rightarrow \infty \right] \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

This nonuniform expansion corresponds to the choice $\zeta = t$. Had we chosen $\zeta = \sigma_1 [1 - (9/32\sigma_1^2)] t$, we would have obtained

$$u = \epsilon \cos \zeta \cos kx + O(\epsilon^3) \quad (2.5.6)$$

which is uniformly valid for all t . Hence this latter ζ is an optimal coordinate.

As a third example, we consider supersonic flow past a thin airfoil (Section 2.1.3). Equation (2.1.36) gives the following expansion for the axial velocity component

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2 \right. \\ \left. - \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{B^3} y T' T'' - T T'' \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

where $T = T(x - By)$; $y = \epsilon T(x)$ (airfoil shape).

This nonuniform expansion was obtained holding x and y fixed. Had we chosen

$$\xi = y \quad \text{and} \quad x - By = \zeta - \epsilon \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{B^2} \xi T'(\zeta) \quad (2.5.8)$$

to be fixed, we would have obtained

$$\frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'(\zeta)}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma+1)}{4B^2} \right) T'^2 - T T'' \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.5.9)$$

which is uniformly valid. Hence (2.5.8) are optimal coordinates.

It should be mentioned that a coordinate may be optimal for $O(\epsilon)$ but not optimal for $O(\epsilon^2)$. For example

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right) t \quad (2.5.10)$$

is an optimal coordinate for $O(\epsilon)$ for the Duffing equation (2.1.1), whereas it is not optimal for any higher order. However,

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 - \frac{15}{256} \epsilon^2 a^4 \right) t \quad (2.5.11)$$

is optimal for $O(\epsilon^2)$ for (2.1.1).

Since most straightforward perturbation expansions (obtained by holding the physical coordinates fixed) are nonuniform, perturbation techniques have been devised to render these expansions uniformly valid. In the method of strained coordinates (Chapter 3), some of these expansions are rendered uniformly valid by determination of the optimal coordinates as near-identity transformations.

In some of the problems considered, such as (2.2.1) and (2.2.2), a uniformly valid expansion was given by (2.2.11) as

$$y = b \exp(1 - x) + (a - be) \exp\left(x - \frac{x}{\epsilon}\right) + O(\epsilon) \quad (2.5.12)$$

This expansion could not be obtained by keeping x fixed or by keeping x/ϵ fixed. Had we kept x fixed, we would have obtained

$$y = b \exp(1 - x) + O(\epsilon) \quad (2.5.13)$$

which is not valid near $x = 0$ because $y(0) = a \neq be$ in general. However, had we kept x/ϵ fixed, we would have obtained

$$y = be + (a - be) \exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (2.5.14)$$

which is not uniformly valid because $y(1) = b \neq be$. Thus the solution is represented by two different expansions using the coordinates (scales) x and x/ϵ . Since they are different asymptotic representations of the same function, they can be related to each other by what is called the matching principle (Chapter 4). This suggests that uniformly valid expansions can be obtained by determining different expansions using different scales, relating these expansions by matching, and then combining the expansions. This is the method of matched asymptotic expansions described in Chapter 4.

Rather than obtaining, say, two expansions using two different scales to represent the asymptotic solutions of (2.2.1), we keep both x and x/ϵ or some functions of them fixed in carrying out the expansions. This means that we increase the number of independent variables to two and transform our original ordinary differential equation into a partial differential equation. This is the method of multiple scales described in Chapter 6.

In oscillation problems such as

$$\ddot{u} + u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

the unperturbed solution (i.e., $\epsilon = 0$) is

$$u = a \cos \phi, \quad \phi = t + \theta \quad (2.5.15)$$

where a and θ are constants. If $\epsilon \neq 0$ the solution can still be expressed in the above form provided that a and θ are taken to be time-dependent. The method of variation of parameters (Section 5.1.1) can be used to find the following equations for a and ϕ

$$\frac{da}{dt} = -\epsilon \sin \phi f[a \cos \phi, -a \sin \phi] \quad (2.5.16)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 - \frac{\epsilon}{a} \cos \phi f[a \cos \phi, -a \sin \phi] \quad (2.5.17)$$

To determine a uniformly valid expansion of the solution of these equations, we can introduce near-identity transformations for both dependent variables a and ϕ rather than a near-identity transformation for the independent variable as in the method of strained coordinates. This is the method of averaging described in Chapter 5.

9.2.6 Exercises

2.1. Determine a three-term expansion for the solution near unity of

$$(x - 1)(x - \tau) + \epsilon = 0, \quad \epsilon \ll 1$$

Is it valid for all values of τ ?

2.2. Calculate three terms in the asymptotic expansion of

$$\epsilon y' + xy = -1, \quad y(0) = 1$$

What is its region of nonuniformity?

2.3. The problem of isoenergetic cylindrical shock waves can be reduced to (Levey, 1959)

$$\alpha w^2 g \frac{dg}{dw} = g(1 - w^2) - w(1 - \beta w^2)$$

where β and α are constants. Determine a second-order expansion for g in terms of α when $\alpha \ll 1$ and discuss its uniformity.

2.4. Determine a first-order (two-term) expansion for small ϵ for

$$\ddot{x} + x = \epsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right), \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Is this expansion uniformly valid?

2.5. Consider the problem

$$(x + \epsilon y)y' + y = 0, \quad y(1) = 1$$

- (a) Determine a second-order (three-term) expansion for this problem assuming that $\epsilon \ll 1$.
- (b) What is its region of nonuniformity?
- (c) Show that the exact solution to this problem is

$$y = -\frac{x}{\epsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} + 1}$$

(d) Expand this exact solution for small ϵ and compare the result with (a). Can you conclude anything about the source of nonuniformity?

2.6. Find a first-order (two-term) expansion for small ϵ of

$$(x + \epsilon y)y' - \frac{1}{2}y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1$$

What is its region of nonuniformity?

2.7. Determine a first-order expansion for small ϵ of

$$(x + \epsilon y)y' + xy = be^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}$$

What is its region of nonuniformity?

2.8. Determine a two-term expansion for the particular solution of

$$\epsilon u'' + (1 - x^2)u = f(x)$$

What conditions must be imposed on f for this expansion to be uniform?

2.9. Determine an expansion for large λ for the solution of

$$xy'' + y' + \lambda^2 x(1 - x^2)y = 0$$

in the form $y = \exp[\lambda\phi_1(x) + \phi_0(x) + \cdots]$. Where does this expansion break down?

2.10. Determine a two-term expansion of

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + k \cos \omega t = \epsilon u^2$$

Is this expansion valid for all values of ω ?

2.11. Determine a second-order (three-term) expansion for small ϵ for the solution of

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u &= 0 \\ u(0) &= a, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{aligned}$$

For what values of δ is this expansion nonuniform?

2.12. Show that a first-order expansion for small μ of

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0$$

is

$$\sqrt{2t} = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + O[\mu^2(1-x)^{-1}]$$

What is its region of nonuniformity?

2.13. For what values of $a > 0$ is the expansion

$$u = a \cos t - \frac{\epsilon}{8} \left[(a^3 - 4a) t \cos t + \frac{1}{4} a^3 \cos 3t \right] + \dots$$

uniformly valid? Is there an $a > 0$ for which the expansion

$$u = a \cos t + \frac{\epsilon a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \cos 3t - 3t \sin t \right) + \dots$$

is uniformly valid.

2.14. Let $t = (1 + \epsilon\sigma)s$ in the second expansion in Exercise 2.13 and expand the result to $O(\epsilon)$ keeping s fixed. Can you choose σ to make this expansion uniformly valid?

2.15. Introduce the new variable

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right) t$$

in

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0$$

Determine a first-order expansion for the resulting problem. Is it uniformly valid? Can you conclude anything about the role of the independent variables in rendering the expansions uniform?

2.16. Consider the problem

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 p \frac{dp}{dx} \right) = \Lambda \frac{d}{dx} (ph)$$

$$p(0) = p(1) = 1$$

where $h = h(x)$ is a known function. Determine an expansion for large Λ . Discuss the nonuniformity of this expansion. Calculate two terms if $p(1) = 1$ is dropped.

2.17. Consider the problem

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} = \alpha^2 f \sin(\xi + \beta)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \cos(\xi + \beta)$$

$$f'(0) = \beta(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

which arises in the bending of circular cylindrical tubes (Reissner and Weintschke, 1963). Determine an expansion to $O(\alpha^2)$ for small α and discuss its uniformity.

2.18. The laminar flow through a channel with uniformly porous walls of different permeabilities can be reduced to (Proudman, 1960; Terrill and Shrestha, 1965)

$$\begin{aligned} f''' + R(f f'' - f'^2) &= c \\ f(0) &= 1, \quad f'(0) = 0 \\ f(1) &= 1 - \alpha, \quad f'(1) = 0 \end{aligned}$$

Show that for small α

$$\begin{aligned} f &= 1 + \alpha A [2(e^{-Rx} + Rx - 1) - R(1 - e^{-R})x^2] + O(\alpha^2) \\ c &= 2\alpha R^2 A (e^{-R} - 1) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

and determine A .

2.19. Determine a first-order expansion for

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + u &= \epsilon u^3, \quad \epsilon \ll 1 \\ u(x, 0) &= a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

and discuss its uniformity.

2.20. Determine a first-order straightforward expansion for small ϵ of

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \epsilon u u_x \\ u(x, 0) &= f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c[g'(x) - f'(x)] \end{aligned}$$

where $f(x)$ and $g(x)$ are bounded functions of x . Discuss its uniformity.

9.3 3 The Method of Strained Coordinates

In this chapter we describe techniques of rendering the approximate solutions to some of the differential equations discussed in the previous chapters uniformly valid by introducing near-identity transformations of the independent variables. This technique goes back to the nineteenth century when astronomers, such as Lindstedt (1882), Bohlin (1889), and Gylden (1893), devised techniques to avoid the appearance of secular terms in perturbation solutions of equations such as

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}), \quad \epsilon \ll I$$

The fundamental idea in Lindstedt's technique is based on the observation that the nonlinearities alter the frequency of the system from the linear one ω_0 to $\omega(\epsilon)$. To account for this change in frequency, he introduced a new variable $\tau = \omega t$ and expanded ω and u in powers of ϵ as

$$\begin{aligned} u &= u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + \epsilon^2 u_2(\tau) + \cdots \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots \end{aligned}$$

Then he chose the parameters $\omega_i, i \geq 1$, to prevent the appearance of secular terms. Poincaré (1892) proved that the expansions obtained by Lindstedt's technique are asymptotic.

Various forms of this idea have been utilized to obtain approximate solutions to problems in physics and engineering. The idea is to find a parameter in the problem (such as frequency, wave number, wave speed, eigenvalue, or energy level) that is altered by the perturbations and then expand both the dependent variables as well as this parameter in, say, powers of the strength of these perturbations. The perturbations in the parameter are then chosen to render the expansion uniformly valid. Thus we call this technique the method of strained parameters.

This idea is the basis of the Rayleigh-Schrödinger method of obtaining approximate stationary solutions to the Schrödinger equation, in which one expands not only the wave function but also the energy level (Schrödinger,

1926). It is also the basis of Stoker's method of treating finite-amplitude water waves in which the stream function and the wave speed are expanded in powers of the steepness ratio of the waves (Stoker, 1957).

If we interpret this parameter expansion as a near-identity transformation, then Lighthill's technique of rendering approximate solutions uniformly valid is a generalization of this technique. According to Lighthill (1949a, 1961), if we encounter a nonuniformity in expanding a function such as $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \epsilon)$ in powers of ϵ , we expand not only the dependent variable u but also the independent variable exhibiting the nonuniformity, say x_1 , in powers of ϵ in terms of a new independent variable as

$$u = \sum_{m=0}^{N-1} \epsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\epsilon^N)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^N \epsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\epsilon^{N+1})$$

The last expansion can be viewed as a near-identity transformation from x_1 to s . The functions ξ_m are called straining functions, and they are determined such that the expansion for u is uniformly valid. In other words, $u_m/u_{m-1} < \infty$ for all values of x_1 of interest, or equivalently higher approximations are no more singular than the first. Note that if $\xi_m = \omega_m s$ with ω_m constant, Lighthill's technique becomes the Lindstedt-Poincaré technique. Since Lighthill's transformation strains a coordinate rather than a parameter, his technique is called the method of strained coordinates.

For hyperbolic differential equations, Lighthill's technique is equivalent to expanding the dependent and independent variables in terms of some, or all, of the exact characteristics of the equations (Whitham, 1952, 1953; Lin, 1954; Fox, 1955).

Rather than introducing the transformation into the differential equations and then carrying out the expansion in terms of the new variable, Pritulo (1962) suggested introducing the transformation into the nonuniform straightforward expansion. The transformation can then be found directly therefrom by solving algebraic rather than differential equations. This is another form of the method of renormalization (Section 7.4.2) introduced by Rayleigh in his analysis of scattering. Rayleigh carried out an expansion $u = u_0 + \epsilon u_1$ for scattering from a thin slab and then recast this expansion in the form $u = u_0 \exp(\epsilon u_1/u_0)$ to make it valid for many slabs.

The method of strained parameters is described by applying it to several physical examples in the following section. In Section 3.2, Lighthill's technique is applied first to ordinary differential equations and then to partial differential equations. This is followed by a description of Temple's method of linearization. The method of renormalization is then taken up in Section 3.4, while limitations of the method of strained coordinates are discussed in Section 3.5.

9.3.1 3.1. The Method of Strained Parameters

As discussed above, this method is based on the presence of a parameter in the problem which is altered by the perturbations. As shown in the following sections, this parameter may be the frequency of a weakly nonlinear system, the energy level in a quantum mechanical problem, the characteristic exponent in the normal solution of a linear problem with periodic coefficients, the wave number or frequency in plasma oscillations, and the wave speed or frequency in finite-amplitude surface waves.

3.1.1. The Lindstedt-poincar Method

The simple examples of Sections 1.1.2 and 2.1.1 show that truncated straightforward expansions in powers of ϵ of equations of the form

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}) \quad (3.1.1)$$

are valid only for short intervals of time because of the presence of secular terms. The essence of the Lindstedt-Poincar technique is to prevent the appearance of these secular terms by introducing a new variable

$$t = s (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots) \quad (3.1.2)$$

in (3.1.1) to obtain

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots)^{-2} \frac{d^2 u}{ds^2} + \omega_0^2 u \\ = \epsilon f \left[u, (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots)^{-1} \frac{du}{ds} \right] \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Letting

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n(s) \quad (3.1.4)$$

in (3.1.3) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations to determine u_m in succession. The solutions for u_m contain secular terms unless the ω_m have specific values.

This technique was applied to a wide range of physical and mathematical problems. For example, Keller (1968) adapted this technique to boundary value problems for systems of ordinary differential equations. A combination of this technique and the Ritz-Galerkin procedure is frequently used in the dynamic response of elastic bodies (e.g., Han, 1965; Bauer, 1968; Sweet, 1971). As an example, we consider Duffing's equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u + \epsilon u^3 = 0 \quad (3.1.5)$$

Under the transformation (3.1.2) it becomes

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots)^2 (u + \epsilon u^3) = 0 \quad (3.1.6)$$

We substitute (3.1.4) into (3.1.6) and equate coefficients of like powers of ϵ to obtain

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} + u_0 = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0 \quad (3.1.8)$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = -3u_0^2 u_1 - 2\omega_1 (u_1 + u_0^3) - (\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0 \quad (3.1.9)$$

The general solution of (3.1.7) is

$$u_0 = a \cos(s + \phi) \quad (3.1.10)$$

where a and ϕ are constants of integration. With (3.1.10), (3.1.8) becomes

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -\frac{1}{4}a^3 \cos 3(s + \phi) - \left(\frac{3}{4}a^2 + 2\omega_1\right) a \cos(s + \phi) \quad (3.1.11)$$

If a straightforward perturbation expansion is used, $\omega_n \equiv 0$, and (3.1.11) reduces to (2.1.7) whose particular solution contains a secular term. In order to avoid this secular term, ω_1 is chosen to eliminate the coefficient of $\cos(s + \phi)$ on the right-hand side of (3.1.11). This condition determines ω_1 to be

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2 \quad (3.1.12a)$$

Then the solution of (3.1.11) becomes

$$u_1 = \frac{1}{32}a^3 \cos 3(s + \phi) \quad (3.1.12b)$$

Substituting for u_0, u_1 , and ω_1 into (3.1.9), we obtain

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = \left(\frac{51}{128}a^4 - 2\omega_2\right) a \cos(s + \phi) + \text{NST} \quad (3.1.13)$$

where NST stands for terms that do not produce secular terms. Secular terms are eliminated if

$$\omega_2 = \frac{51}{256}a^4 \quad (3.1.14)$$

Therefore

$$u = a \cos(\omega t + \phi) + \frac{\epsilon}{32}a^3 \cos 3(\omega t + \phi) + O(\epsilon^2) \quad (3.1.15)$$

where a and θ are constants of integration, and

$$\begin{aligned} \omega &= \left(1 - \frac{3}{8}a^2\epsilon + \frac{51}{256}a^4\epsilon^2 + \dots\right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{3}{8}a^2\epsilon - \frac{15}{256}a^4\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

3.1.2. Transition Curves for the Mathieu Equation

As a second example, we determine the transition curves that separate stable from unstable solutions of the Mathieu equation

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0 \quad (3.1.17)$$

which has been studied extensively. This equation is a special case of Hill's equation which is a linear differential equation with periodic coefficients. Equations similar to this appear in many problems in applied mathematics such as stability of a transverse column subjected to a periodic longitudinal load, stability of periodic solutions of nonlinear conservative systems, electromagnetic wave propagation in a medium with periodic structure, the lunar motion, and the excitation of certain electrical systems.

The qualitative nature of the solutions of (3.1.17) can be described by using Floquet theory (see, e.g., Coddington and Levinson, 1955, Chapter 3). This equation has normal solutions of the form

$$u = e^{\gamma t} \phi(t) \quad (3.1.18)$$

where ϕ is a periodic function of t having a period π or 2π , and γ may be real or complex depending on the values of the parameters δ and ϵ . Floquet theory shows that the transition curves, in the $\delta - \epsilon$ plane, separating stable from unstable solutions, correspond to periodic solutions of (3.1.17). Some of these curves are determined below by expanding both δ and u as functions of ϵ . Thus we let

$$\delta = n^2 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \cdots \quad (3.1.19)$$

$$u(t) = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots \quad (3.1.20)$$

where n is an integer including zero, and u_m/u_0 is bounded for all m in order that (3.1.20) be a uniformly valid asymptotic expansion.

Substituting (3.1.19) and (3.1.20) into (3.1.17), expanding, and equating coefficients of equal powers of ϵ , we obtain

$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 = 0 \quad (3.1.21)$$

$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -(\delta_1 + \cos 2t) u_0 \quad (3.1.22)$$

$$\ddot{u}_2 + n^2 u_2 = -(\delta_1 + \cos 2t) u_1 - \delta_2 u_0 \quad (3.1.23)$$

The solution of the zeroth-order equation is

$$u_0 = \begin{cases} \cos nt \\ \sin nt \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.24)$$

Next, we determine the higher approximations for the cases $n = 0, 1$, and 2 .

The Case of $n = 0$

In this case $u_0 = 1$, and (3.1.22) becomes

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 - \cos 2t \quad (3.1.25)$$

In order for (3.1.20) to be a uniformly valid asymptotic expansion, δ_1 must vanish; and

$$u_1 = \frac{1}{4} \cos 2t + c \quad (3.1.26)$$

where c is a constant. With u_0 and u_1 known (3.1.23) becomes

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 - \frac{1}{8} - c \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 4t \quad (3.1.27)$$

In order for u_2/u_0 to be bounded, δ_2 must be equal to $-1/8$, hence

$$\delta = -\frac{1}{8} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (3.1.28)$$

The Case of $n = 1$

In this case $u_0 = \cos t$ or $\sin t$. Taking $u_0 = \cos t$, we find that (3.1.22) becomes

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \quad (3.1.29)$$

In order that u_1/u_0 be bounded, δ_1 must be equal to $-1/2$, and then

$$u_1 = \frac{1}{16} \cos 3t \quad (3.1.30)$$

Equation (3.1.23) then becomes

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\frac{1}{32} + \delta_2\right) \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos 5t \quad (3.1.31)$$

The condition that u_2/u_0 be bounded demands that $\delta_2 = -1/32$, hence

$$\delta = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{32}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (3.1.32)$$

Had we used $u_0 = \sin t$, we would have obtained the transition curve

$$\delta = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{32}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (3.1.33)$$

The Case of $n = 2$

In this case $u_0 = \cos 2t$ or $\sin 2t$, and (3.1.22) becomes, in the former case,

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = -\frac{1}{2} - \delta_1 \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t \quad (3.1.34)$$

Since u_1/u_0 must be bounded, δ_1 must vanish, hence

$$u_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cos 4t \quad (3.1.35)$$

Substituting for u_0 and u_1 into (3.1.23) yields

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\left(\delta_2 - \frac{5}{48}\right) \cos 2t - \frac{1}{48} \cos 6t \quad (3.1.36)$$

Because u_2/u_0 must be bounded, we require that $\delta_2 = 5/48$, hence

$$\delta = 4 + \frac{5}{48}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (3.1.37)$$

Taking $u_0 = \sin 2t$ leads to

$$\delta = 4 - \frac{1}{48}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (3.1.38)$$

3.1.3. Characteristic Exponents for the Mathieu Equation (whittaker's Method)

Floquet theory (see, e.g., Coddington and Levinson 1955, Chapter 3) shows that (3.1.17) has solutions of the form indicated in (3.1.18), where ϕ is periodic (having a period π or 2π) and γ is a real or a complex constant. Substituting (3.1.18) into (3.1.17), we transform the latter into

$$\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + (\delta + \gamma^2 + \epsilon \cos 2t) \phi = 0 \quad (3.1.39)$$

Since the transition curves correspond to $\gamma = 0$, Whittaker (1914) obtained an approximation to ϕ near the transition curves by assuming the following expansions for ϕ, δ , and γ

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots \quad (3.1.40)$$

$$\delta = \delta_0 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (3.1.41)$$

$$\gamma = \epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2 + \dots \quad (3.1.42)$$

Next we carry out the solution for the case $\delta_0 = 1$.

Substituting (3.1.40) through (3.1.42) into (3.1.39) and equating like powers of ϵ , we obtain

$$\ddot{\phi}_0 + \phi_0 = 0 \quad (3.1.43)$$

$$\ddot{\phi}_1 + \phi_1 = -2\gamma_1 \dot{\phi}_0 - (\delta_1 + \cos 2t) \phi_0 \quad (3.1.44)$$

$$\ddot{\phi}_2 + \phi_2 = -2\gamma_1 \dot{\phi}_1 - 2\gamma_2 \dot{\phi}_0 - (\gamma_1^2 + \delta_2) \phi_0 - (\delta_1 + \cos 2t) \phi_1 \quad (3.1.45)$$

The general solution of (3.1.43) is

$$\phi_0 = a \cos t + b \sin t \quad (3.1.46)$$

where a and b are constants. Equation (3.1.44) then becomes

$$\ddot{\phi}_1 + \phi_1 = \left[2\gamma_1 a + \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) b \right] \sin t - \left[2\gamma_1 b + \left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) a \right] \cos t - \frac{1}{2} a \cos 3t - \frac{1}{2} b \sin 3t \quad (3.1.47)$$

Since ϕ is periodic, the terms that produce secular terms must vanish; that is

$$2\gamma_1 a + \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) b = 0 \quad (3.1.48)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) a + 2\gamma_1 b = 0 \quad (3.1.49)$$

For a nontrivial solution for a and b , the determinant of the coefficients of a and b in (3.1.48) and (3.1.49) must be zero. Hence

Then

$$\gamma_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\delta_1^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (3.1.50)$$

$$b = \frac{2\gamma_1}{\delta_1 - \frac{1}{2}} a \quad (3.1.51)$$

The solution of (3.1.47) subject to the conditions (3.1.48) and (3.1.49) becomes

$$\phi_1 = \frac{1}{16} a \cos 3t + \frac{1}{16} b \sin 3t \quad (3.1.52)$$

With the above results (3.1.45) becomes

$$\ddot{\phi}_2 + \phi_2 = \left[2\gamma_2 a - \left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) b \right] \sin t - \left[\left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) a + 2\gamma_2 b \right] \cos t + \text{NST} \quad (3.1.53)$$

Terms that produce secular terms will be eliminated if

$$2\gamma_2 a - \left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) b = 0 \quad (3.1.54)$$

$$\left(\delta_2 + \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \right) a + 2\gamma_2 b = 0 \quad (3.1.55)$$

Since b is related to a by (3.1.51), (3.1.54) and (3.1.55) are satisfied simultaneously if and only if

$$\gamma_2 = 0 \quad \text{and} \quad \delta_2 = -\gamma_1^2 - \frac{1}{32} \quad (3.1.56)$$

Therefore, to first approximation

$$u = ae^{\pm(1/2)\epsilon t \sqrt{(1/4) - \delta_1^2}} \left[\left(\cos t + \frac{1}{16} \epsilon \cos 3t \right) + \frac{2\gamma_1}{\delta_1 - \frac{1}{2}} \left(\sin t + \frac{1}{16} \epsilon \sin 3t \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.1.57)$$

$$\delta = 1 + \epsilon \delta_1 + \frac{1}{4} \epsilon^2 \left(\delta_1^2 - \frac{3}{8} \right) + O(\epsilon^3) \quad (3.1.58)$$

If we let

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cos 2\sigma \quad (3.1.59)$$

then

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{4} \sin 2\sigma, \quad \delta_2 = \frac{1}{32} (\cos 4\sigma - 2) \\ \frac{b}{a} &= \frac{\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma - 1} = -\cot \sigma \end{aligned} \quad (3.1.60)$$

Hence (3.1.57) and (3.1.58) become

$$u = \tilde{a} e^{(1/4)(\sin 2\sigma)\epsilon t} \left[\sin(t - \sigma) + \frac{1}{16} \epsilon \sin(3t - \sigma) \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.1.61)$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \cos 2\sigma + \frac{1}{32} \epsilon^2 (\cos 4\sigma - 2) + O(\epsilon^3) \quad (3.1.62)$$

where $\tilde{a}$ is a constant.

3.1.4. The Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies

We consider next a fourth-order system with periodic coefficients involving the stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. The problem is governed mathematically by

$$x'' - 2y' - \frac{h_2 x}{1 + e \cos f} = 0 \quad (3.1.63)$$

$$y'' + 2x' - \frac{h_1 y}{1 + e \cos f} = 0 \quad (3.1.64)$$

where primes denote differentiation with respect to f , and

$$h_{1,2} = \frac{3}{2}[1 \pm \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}] \quad (3.1.65)$$

Equations (3.1.63) through (3.1.65) describe the linearized motion of a particle near the triangular points in the restricted problem of three bodies. Here e is the eccentricity of the orbit of the two primaries and μ is the ratio of the smaller primary to the sum of the two primaries. If $e = 0$, it is known that the motion is stable if $0 \leq \mu < \tilde{\mu} \approx 0.03852$ and unstable for $\mu \geq \tilde{\mu}$. Therefore $\tilde{\mu}$ is the intersection of a transition curve (from stable to unstable motion) with the μ axis in the $e - \mu$ plane. Also, it is known from Floquet theory that periodic solutions with periods 2π and 4π correspond to transition curves. In the interval $0 \leq \mu < \tilde{\mu}$, the period 2π corresponds to $\mu = 0$, while 4π corresponds to $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2}/3)/2$; $\mu = 0$ corresponds to a transition curve that coincides with the e axis. In the following discussion we present an analysis following Nayfeh and Kamel (1970a) for the determination of the transition curves that intersect the μ axis at μ_0 .

We assume that

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} e^n x_n(f) \quad (3.1.66)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} e^n y_n(f) \quad (3.1.67)$$

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mu_n \quad (3.1.68)$$

Substituting (3.1.68) into (3.1.65) and expanding for small e , we have

$$h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) e^n \quad (3.1.69)$$

$$h_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) e^n \quad (3.1.70)$$

where

$$a_0, b_0 = \left[\frac{3}{2}(1 + k), \frac{3}{2}(1 - k) \right], \quad k = \sqrt{\frac{1}{12}} \quad (3.1.71)$$

$$b_1 = -a_1 = 3\sqrt{\frac{6}{11}}\mu_1 \quad (3.1.72)$$

Substituting (3.1.66) through (3.1.70) into (3.1.63) and (3.1.64) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$x_n'' - 2y_n' = \sum_{\substack{t=0, s=0, r=0 \\ n=s+r+t}} (-1)^t x_r b_s \cos^t f \quad (3.1.73)$$

$$y_n'' + 2x_n' = \sum_{\substack{t=0, s=0, r=0 \\ n=r+s+t}} (-1)^t y_r a_s \cos^t f \quad (3.1.74)$$

The zeroth-order equations admit the following periodic solutions of period 4π

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \tau, & y_0 &= -\alpha \sin \tau \\ x_0 &= \sin \tau, & y_0 &= \alpha \cos \tau \end{aligned} \quad (3.1.76)$$

where

$$\tau = \frac{f}{2}, \quad \alpha = b_0 + \frac{1}{4} = \left(a_0 + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{33}) \quad (3.1.77)$$

There are two transition curves intersecting the μ axis at $\mu = \mu_0$ corresponding to the above two independent solutions. If we take (3.1.75) we find that the first-order problem becomes

$$x_1'' - 2y_1' - b_0x_1 = \left(b_1 - \frac{1}{2}b_0\right) \cos \tau - \frac{1}{2}b_0 \cos 3\tau \quad (3.1.78)$$

$$y_1'' + 2x_1' - a_0y_1 = -\alpha \left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right) \sin \tau + \frac{1}{2}\alpha a_0 \sin 3\tau \quad (3.1.79)$$

The terms proportional to $\cos \tau$ and $\sin \tau$ lead to secular terms in the particular solutions for x_1 and y_1 . To determine the condition necessary for the removal of these secular terms, we assume a particular solution of the form

$$x_p = 0, \quad y_p = c \sin \tau \quad (3.1.80)$$

Substituting (3.1.80) into (3.1.78) and (3.1.79) and equating the coefficients of $\cos \tau$ and $\sin \tau$ on both sides, we obtain

$$c = -\left(b_1 - \frac{b_0}{2}\right), \quad c \left(a_0 + \frac{1}{4}\right) = \alpha \left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right) \quad (3.1.81)$$

Elimination of c leads to

$$b_1 - \frac{1}{2}b_0 = -\alpha^2 \left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right) \quad (3.1.82)$$

Since $b_1 = -a_1$

$$b_1 = \frac{b_0 - a_0\alpha^2}{2(1 - \alpha^2)} \approx -0.1250 \quad (3.1.83)$$

Hence from (3.1.72)

$$\mu_1 \approx -0.05641 \quad (3.1.84)$$

Therefore the transition curve to first order is given by

$$\mu = 0.02859 - 0.05641e + O(e^2) \quad (3.1.85)$$

Had we used the solution given by (3.1.76) for the zeroth-order problem, we would have obtained the second branch

$$\mu = 0.02859 + 0.05641e + O(e^2) \quad (3.1.86)$$

The above analysis could be continued to higher orders in a straightforward manner and has been carried out to fourth order by Nayfeh and Kamel (1970a).

3.1.5. Characteristic Exponents for the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies

It is known from Floquet theory that (3.1.63) and (3.1.64) have normal solutions of the form

$$x, y = e^{\gamma f} [\phi(f), \psi(f)] \quad (3.1.87)$$

where ϕ and ψ are periodic, having a period of either 2π or 4π , and γ is a real or complex number. Substitution of (3.1.87) into (3.1.63) and (3.1.64) transforms the latter into

$$\phi'' + 2\gamma\phi' - 2\psi' + \gamma^2\phi - 2\gamma\psi - \frac{h_2\phi}{1 + e \cos f} = 0 \quad (3.1.88)$$

$$\psi'' + 2\gamma\psi' + 2\phi' + \gamma^2\psi + 2\gamma\phi - \frac{h_1\psi}{1 + e \cos f} = 0 \quad (3.1.89)$$

The transition curves correspond to $\gamma = 0$, hence near these transition curves γ is small. Thus to obtain expansions for ϕ and ψ valid near the transition curves intersecting the μ axis at μ_0 , we let

$$\phi = \phi_0 + e\phi_1 + \cdots \quad (3.1.90)$$

$$\psi = \psi_0 + e\psi_1 + \cdots \quad (3.1.91)$$

$$\gamma = e\gamma_1 + \cdots \quad (3.1.92)$$

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + \cdots \quad (3.1.93)$$

Substituting (3.1.90) through (3.1.93) into (3.1.88), (3.1.89), and (3.1.65) and equating like powers of e , we obtain

Order e^0

$$\phi_0'' - 2\psi_0' - b_0\phi_0 = 0 \quad (3.1.94)$$

$$\psi_0'' + 2\phi_0' - a_0\psi_0 = 0 \quad (3.1.95)$$

Order e

$$\phi_1'' - 2\psi_1' - b_0\phi_1 = -2\gamma_1\phi_0' + 2\gamma_1\psi_0 + b_1\phi_0 - b_0\phi_0 \cos f \quad (3.1.96)$$

$$\psi_1'' + 2\phi_1' - a_0\psi_1 = -2\gamma_1\psi_0' - 2\gamma_1\phi_0 + a_1\psi_0 - a_0\psi_0 \cos f \quad (3.1.97)$$

The general solution of (3.1.94) and (3.1.95) is

$$\phi_0 = A \cos \tau + B \sin \tau \quad (3.1.98)$$

$$\psi_0 = \alpha B \cos \tau - \alpha A \sin \tau \quad (3.1.99)$$

This solution determines the right-hand sides of (3.1.96) and (3.1.97). Thus

$$\begin{aligned} \phi_1'' - 2\psi_1' - b_0\phi_1 = & P_{11} \cos \tau + Q_{11} \sin \tau \\ & - \frac{1}{2}b_0A \cos 3\tau - \frac{1}{2}b_0B \sin 3\tau \end{aligned} \quad (3.1.100)$$

$$\begin{aligned} \psi_1'' + 2\phi_1' - a_0\psi_1 = & P_{12} \cos \tau + Q_{12} \sin \tau \\ & - \frac{1}{2}a_0\alpha B \cos 3\tau + \frac{1}{2}a_0\alpha A \sin 3\tau \end{aligned} \quad (3.1.101)$$

where

$$\begin{aligned} P_{11} &= \gamma_1(2\alpha - 1)B + \left(b_1 - \frac{b_0}{2}\right)A \\ P_{12} &= \gamma_1(\alpha - 2)A + \alpha\left(a_1 - \frac{a_0}{2}\right)B \\ Q_{11} &= -\gamma_1(2\alpha - 1)A + \left(b_1 + \frac{b_0}{2}\right)B \\ Q_{12} &= \gamma_1(\alpha - 2)B - \alpha\left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right)A \end{aligned}$$

Since ϕ and ψ are periodic, the secular terms in the solution of ϕ_1 and ψ_1 must vanish. To eliminate these secular terms, we let

$$\phi_1 = 0, \quad \psi_1 = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau \quad (3.1.102)$$

Substituting (3.1.102) into (3.1.100) and (3.1.101) and equating the coefficients of $\cos \tau$ and $\sin \tau$ on both sides, we obtain

$$\begin{aligned} c_1 &= Q_{11}, & -c_2 &= P_{11} \\ -\left(a_0 + \frac{1}{4}\right)c_1 &= P_{12}, & -\left(a_0 + \frac{1}{4}\right)c_2 &= Q_{12} \end{aligned} \quad (3.1.103)$$

Elimination of c_1 and c_2 from (3.1.103) results in

$$P_{11} = \alpha Q_{12}, \quad Q_{11} = -\alpha P_{12} \quad (3.1.104)$$

Substituting the above expressions for P and Q into (3.1.104) and rearranging, we obtain

$$\left[b_1 - \frac{b_0}{2} + \alpha^2\left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right)\right]A - \gamma_1(1 - 4\alpha + \alpha^2)B = 0 \quad (3.1.105)$$

$$\gamma_1(1 - 4\alpha + \alpha^2)A + \left[b_1 + \frac{b_0}{2} + \alpha^2\left(a_1 - \frac{a_0}{2}\right)\right]B = 0 \quad (3.1.106)$$

For a nontrivial solution the determinant of the coefficients of A and B in (3.1.105) and (3.1.106) must vanish. This condition leads to

$$\gamma_1^2 = -\frac{\left[b_1 - \frac{1}{2}b_0 + \alpha^2\left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right)\right]\left[b_1 + \frac{1}{2}b_0 + \alpha^2\left(a_1 - \frac{1}{2}a_0\right)\right]}{(1 - 4\alpha + \alpha^2)^2} \quad (3.1.107)$$

Then

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1 - \frac{1}{2}b_0 + \alpha^2\left(a_1 + \frac{1}{2}a_0\right)}{\gamma_1(1 - 4\alpha + \alpha^2)} = \tan \sigma \quad (3.1.108)$$

Therefore, to first approximation

$$x, y = e^{\gamma_1 f} \left[\cos\left(\frac{1}{2}f - \sigma\right), -\alpha \sin\left(\frac{1}{2}f - \sigma\right) \right] + O(e) \quad (3.1.109)$$

The transition curves (3.1.85) and (3.1.86) correspond to $\gamma_1 = 0$, while (3.1.75) and (3.1.76) can be obtained from (3.1.109) by letting $\gamma_1 = 0$ and $\sigma = 0$ or $\pi/2$.

The present analysis can be continued to higher order in a straightforward manner even though the algebra is involved. The expansion has been carried out to second order by Nayfeh (1970a).

3.1.6. A Simple Linear Eigenvalue Problem

Let us now consider the problem of determining the eigenvalue λ and the eigenfunction u where

$$u'' + [\lambda + \epsilon f(x)]u = 0, \quad f(x) = f(-x) \quad (3.1.110)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.111)$$

and ϵ is a small quantity. If $\epsilon = 0$, the eigenfunctions and eigenvalues are given, respectively, by

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.112)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \quad (3.1.113)$$

The above eigenfunctions are orthonormal; that is

$$\int_0^1 u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (3.1.114)$$

where δ_{mn} , the Kronecker delta function, is defined as follows

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

For a small but nonzero ϵ , we obtain an approximate solution to u_n and λ_n by letting

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x + \epsilon u_{n1} + \epsilon^2 u_{n2} + \dots \quad (3.1.115)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \epsilon \lambda_{n1} + \epsilon^2 \lambda_{n2} + \dots \quad (3.1.116)$$

Substituting (3.1.115) and (3.1.116) into (3.1.110) and (3.1.111) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$u_{n1}'' + n^2 \pi^2 u_{n1} = -f(x) u_{n0} - \lambda_{n1} u_{n0} \quad (3.1.117)$$

$$u_{n1}(0) = u_{n1}(1) = 0$$

$$\begin{aligned} u_{n2}'' + n^2 \pi^2 u_{n2} &= -f(x) u_{n1} - \lambda_{n1} u_{n1} - \lambda_{n2} u_{n0} \\ u_{n2}(0) &= u_{n2}(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.118)$$

where the zeroth-order problem is satisfied identically, and $u_{n0} = \sqrt{2} \sin n\pi x$.

We assume that u_{n1} can be expressed as a linear combination of the zeroth-order eigenfunctions u_{n0} ; that is

$$u_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sqrt{2} \sin m\pi x \quad (3.1.119)$$

This solution satisfies the boundary conditions on u_{n1} . Substituting (3.1.119) into (3.1.117), we obtain

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} \pi^2 (n^2 - m^2) a_{nm} \sin m\pi x = -\sqrt{2} f(x) \sin n\pi x - \sqrt{2} \lambda_{n1} \sin n\pi x \quad (3.1.120)$$

Multiplying (3.1.120) by $\sqrt{2} \sin k\pi x$, integrating from 0 to 1, and using the orthonormality property (3.1.114) of the eigenfunctions (3.1.112), we obtain where

$$\pi^2 (n^2 - k^2) a_{nk} = -F_{nk} - \lambda_{n1} \delta_{nk} \quad (3.1.121)$$

$$F_{nk} = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \sin k\pi x dx \quad (3.1.122)$$

If $k = n$, the left-hand side of (3.1.121) vanishes, hence

$$\lambda_{n1} = -F_{nn} = -2 \int_0^1 f(x) \sin^2 n\pi x dx \quad (3.1.123)$$

However, if $k \neq n$

$$a_{nk} = -\frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \quad (3.1.124)$$

Condition (3.1.123) is equivalent to the removal of secular terms. The function u_{n1} is then

$$u_{n1} = -\sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x + a_{nn} \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (3.1.125)$$

Note that a_{nn} is still undetermined. It is determined in the final solution by normalization of u_n .

Proceeding to second order, we assume that

$$u_{n2} = \sum_{r=1}^{\infty} b_{nr} \sqrt{2} \sin r\pi x \quad (3.1.126)$$

Substituting for u_{n2} , u_{n1} , and u_{n0} into (3.1.118), we obtain

$$\begin{aligned} \pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} (n^2 - r^2) \sqrt{2} b_{nr} \sin r\pi x &= -\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sqrt{2} f(x) \sin k\pi x \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \lambda_{n1} \sqrt{2} \sin k\pi x - \lambda_{n2} \sqrt{2} \sin n\pi x \end{aligned} \quad (3.1.127)$$

Multiplying (3.1.127) by $\sqrt{2} \sin s\pi x$, integrating from 0 to 1, and using the orthonormality property (3.1.114), we obtain

$$\pi^2 (n^2 - s^2) b_{ns} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F_{ks} - a_{ns} \lambda_{n1} - \lambda_{n2} \delta_{ns} \quad (3.1.128)$$

If $s = n$, the left-hand side of (3.1.128) vanishes, while the right-hand side gives

$$\lambda_{n2} = -\sum_{k \neq n} a_{nk} F_{kn} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \quad (3.1.129)$$

If $s \neq n$, (3.1.128) gives

$$b_{ns} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk} F_{ks}}{\pi^4 (n^2 - k^2) (n^2 - s^2)} - \frac{a_{nn} F_{ns}}{\pi^2 (n^2 - s^2)} - \frac{F_{nn} F_{ns}}{\pi^4 (n^2 - s^2)^2} \quad (3.1.130)$$

Here again b_{nn} is still undetermined; it will be determined from the normalization of u_n . To normalize u_n we require that

$$\int_0^1 (u_{n0} + \epsilon u_{n1} + \epsilon^2 u_{n2})^2 dx = 1 \quad (3.1.131)$$

Since u_{n0} is normalized, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{n0} u_{n1} dx &= 0 \\ \int_0^1 (2u_{n0} u_{n2} + u_{n1}^2) dx &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.133)$$

Condition (3.1.132) gives $a_{nn} = 0$, while condition (3.1.133) gives

$$b_{nn} = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq n} a_{nk}^2 \quad (3.1.134)$$

Therefore, to second order

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2} \sin n\pi x - \epsilon \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x \\ &+ \epsilon^2 \sum_{k \neq n} \left\{ \left[\sum_{s \neq n} \frac{F_{ns} F_{ks}}{\pi^4 (n^2 - s^2) (n^2 - k^2)} - \frac{F_{nn} F_{nk}}{\pi^4 (n^2 - k^2)^2} \right] \sqrt{2} \sin k\pi x \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{F_{nk}^2}{\pi^4 (n^2 - k^2)^2} \sqrt{2} \sin n\pi x \right\} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.1.135)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \epsilon F_{nn} + \epsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2 (n^2 - k^2)} + O(\epsilon^3) \quad (3.1.136)$$

The expansion method described in this section is called the RayleighSchrödinger method; it was developed by Schrödinger (1926) to treat stationary solutions of the Schrödinger equation. For more references and more complete treatment, we refer the reader to the book edited by Wilcox (1966) and to the article by Hirschfelder (1969).

3.1.7. A Quasi-linear Eigenvalue Problem

Let us next consider the eigenvalue problem

$$H\phi + \lambda\phi = \epsilon F(\phi) \quad (3.1.137)$$

subject to the linear homogeneous boundary condition

$$B(\phi) = 0 \quad (3.1.138)$$

where H is a linear operator and F is a nonlinear operator of ϕ . We seek an approximate solution for small ϵ by letting

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \cdots \quad (3.1.139)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \cdots \quad (3.1.140)$$

Substituting (3.1.139) and (3.1.140) into (3.1.137) and (3.1.138) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$H\phi_0 + \lambda_0\phi_0 = 0, \quad B(\phi_0) = 0 \quad (3.1.141)$$

$$H\phi_1 + \lambda_0\phi_1 = -\lambda_1\phi_0 + F(\phi_0), \quad B(\phi_1) = 0 \quad (3.1.142)$$

We must distinguish between two cases depending on whether the eigenvalues of (3.1.141) are distinct or not. The first case is called the nondegenerate case, while the second case is called the degenerate case because more than one eigenfunction corresponds to a repeated eigenvalue. Both of these cases are treated in order below.

The Nondegenerate Case. Let us assume that (3.1.141) is solvable and that its solution yields the eigenfunctions u_n corresponding to the eigenvalues $\mu_n, n = 1, 2, \dots$. We assume further that $\mu_m \neq \mu_n$ if $m \neq n$, and that the eigenfunctions $\{u_n\}$ form an orthonormal set so that

$$\int_D u_n \bar{u}_m d\mathbf{x} = \delta_{mn} \quad (3.1.143)$$

where $\mathbf{x}$ is the vector representing the coordinates, $\bar{u}$ is the complex conjugate of u , and the integration is over the domain D of interest. To solve (3.1.142) we expand ϕ_1 in terms of the orthonormal set $\{u_n\}$ as in the previous section; that is

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m \quad (3.1.144)$$

Thus ϕ_1 satisfies $B(\phi_1) = 0$ because $B(u_m) = 0$ for each m . Letting $\phi_0 = u_n$ and $\lambda_0 = \mu_n$, and substituting (3.1.144) into (3.1.142), we obtain

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_m) a_m u_m = -\lambda_1 u_n + F(u_n) \quad (3.1.145)$$

Multiplying (3.1.145) by $\bar{u}_s$, integrating over D , and using the orthonormality condition, we obtain

$$(\mu_n - \mu_s) a_s = -\lambda_1 \delta_{ns} + F_{ns} \quad (3.1.146)$$

where

$$F_{ns} = \int_D F(u_n) \bar{u}_s d\mathbf{x} \quad (3.1.147)$$

If $n = s$, (3.1.146) gives

If $n \neq s$

$$\lambda_1 = F_{nn} \quad (3.1.148)$$

Thus

$$a_s = \frac{F_{ns}}{\mu_n - \mu_s} \quad (3.1.149)$$

$$\phi_1 = \sum_{m \neq n} \frac{F_{nm}}{\mu_n - \mu_m} u_m + a_{nn} u_n \quad (3.1.150)$$

The coefficient a_{nn} can be determined to be zero if we assume that $\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + O(\epsilon^2)$ is normalized as in the previous section.

Therefore, to first order

$$\phi = u_n + \epsilon \sum_{m \neq n} \frac{F_{nm}}{\mu_n - \mu_m} u_m + O(\epsilon^2) \quad (3.1.151)$$

$$\lambda = \mu_n + \epsilon F_{nn} + O(\epsilon^2) \quad (3.1.152)$$

As an example, let us consider the problem

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = -\epsilon \phi^3 \quad (3.1.153)$$

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \quad (3.1.154)$$

Here D is the interval $[0, 1]$, and

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \mu_n = n^2 \pi^2 \quad (3.1.155)$$

Since $F(\phi) = -\phi^3$ and $\tilde{u}_m = u_m$

$$\begin{aligned} F_{nm} &= -4 \int_0^1 \sin^3 n\pi x \sin m\pi x dx \\ &= \int_0^1 (\sin 3n\pi x - 3 \sin n\pi x) \sin m\pi x dx \\ &= \frac{1}{2} \delta_{m, 3n} - \frac{3}{2} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (3.1.156)$$

Therefore (3.1.151) and (3.1.152) become

$$\phi = \sqrt{2} \sin n\pi x - \frac{\epsilon \sqrt{2}}{16n^2 \pi^2} \sin 3n\pi x + O(\epsilon^2) \quad (3.1.157)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \frac{3}{2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (3.1.158)$$

The Degenerate Case. In this case let $\mu_{n+k} = \mu_n$ for $k = 0, 1, 2, \dots, M$. Then

$$\phi_0 = \sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} \quad (3.1.159)$$

We substitute for ϕ_1 and ϕ_0 from (3.1.144) and (3.1.159) into (3.1.142) and take $\lambda_0 = \mu_n$ to obtain

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_m) a_m u_m = -\lambda_1 \sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} + F \left[\sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} \right] \quad (3.1.160)$$

We multiply (3.1.160) by $\bar{u}_s$ and integrate over D to obtain

$$(\mu_n - \mu_s) a_s = -\lambda_1 \sum_{k=0}^M b_k \delta_{s, n+k} + \mathcal{F}_s(b_0, b_1, \dots, b_M) \quad (3.1.161)$$

where

$$\mathcal{F}_s = \int_D F \left[\sum_{k=0}^M b_k u_{n+k} \right] \bar{u}_s d\mathbf{x} \quad (3.1.162)$$

If $s = n + k$ for $k = 0, 1, 2, \dots, M$, (3.1.161) gives

$$\mathcal{F}_{n+k}(b_0, b_1, \dots, b_M) - \lambda_1 b_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (3.1.163)$$

These constitute $M + 1$ homogeneous algebraic equations for the $M + 1$ unknown b_m terms and the eigenvalue λ_1 . If $s \neq n + k, k = 0, 1, \dots, M$,

$$a_s = \frac{\mathcal{F}_s(b_0, b_1, \dots, b_M)}{\mu_n - \mu_s} \quad (3.1.164)$$

As an example, let us consider the problem

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} + 5\pi^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = \epsilon \phi \frac{d\phi}{dx} \quad (3.1.165)$$

$$\phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0 \quad (3.1.166)$$

In this case the solution of the linearized problem is

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \mu_n = n^2 (5 - n^2) \pi^4 \quad (3.1.167)$$

Thus $\mu_1 = \mu_2 = 4\pi^4$, and we have degeneracy. We assume that, corresponding to the eigenvalue μ_1

$$\phi_0 = b_0 \sqrt{2} \sin \pi x + b_1 \sqrt{2} \sin 2\pi x \quad (3.1.168)$$

Then

$$\begin{aligned} F(\phi_0) &= \phi_0 \frac{d\phi_0}{dx} \\ &= \pi [-b_0 b_1 \sin \pi x + b_0^2 \sin 2\pi x + 3b_0 b_1 \sin 3\pi x + 2b_1^2 \sin 4\pi x] \end{aligned} \quad (3.1.169)$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s &= \sqrt{2} \int_0^1 F(\phi_0) \sin s\pi x dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi [-b_0 b_1 \delta_{1s} + b_0^2 \delta_{2s} + 3b_0 b_1 \delta_{3s} + 2b_1^2 \delta_{4s}] \end{aligned} \quad (3.1.170)$$

With $\mathcal{F}$, known (3.1.163) becomes

$$-\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi b_0 b_1 - \lambda_1 b_0 = 0 \quad (3.1.171)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi b_0^2 - \lambda_1 b_1 = 0 \quad (3.1.172)$$

While (3.1.164) gives

$$a_3 = \frac{3b_0 b_1}{40\sqrt{2}\pi^3}, \quad a_4 = \frac{b_1^2}{90\sqrt{2}\pi^3} \quad (3.1.173)$$

Since $b_0 \neq 0$, (3.1.171) yields

$$b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \lambda_1 \quad (3.1.174)$$

Substituting for b_1 into (3.1.172) and solving for λ_1 , we obtain

$$\lambda_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} i \pi b_0 \quad (3.1.175)$$

Hence

$$b_1 = \pm i b_0 \quad (3.1.176)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \phi = & b_0 \sqrt{2} \sin \pi x \pm i b_0 \sqrt{2} \sin 2\pi x + \epsilon \left[a_1 \sqrt{2} \sin \pi x + a_2 \sqrt{2} \sin 2\pi x \right. \\ & \left. \pm \frac{3}{40\pi^3} i b_0^2 \sin 3\pi x - \frac{1}{90\pi^3} b_0^2 \sin 4\pi x \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.1.177)$$

$$\lambda = 4\pi^4 \mp \frac{\pi}{\sqrt{2}} \epsilon i b_0 + O(\epsilon^2) \quad (3.1.178)$$

The constants a_1 and a_2 can be related to b_0 by normalizing ϕ_0 . The solutions corresponding to $\mu_n, n > 2$ are

$$\phi = \sqrt{2} \sin n\pi x + \epsilon \frac{1}{15n(n^2 - 1)\pi^3} \sin 2n\pi x + O(\epsilon^2) \quad (3.1.179)$$

$$\lambda = n^2(5 - n^2)\pi^4 + O(\epsilon^2) \quad (3.1.180)$$

3.1.8. The Quasi-linear Klein-gordon Equation

We consider in this section the problem of the determination of periodic finite-amplitude traveling waves for the equation

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma^2 u = \beta u^3 \quad (3.1.181)$$

If we neglect the nonlinear term βu^3 , we obtain the linear traveling harmonic wave

$$u = a \cos(kx - \omega t), \quad \omega^2 = \alpha^2 k^2 + \gamma^2 \quad (3.1.182)$$

The phase speed for this wave is ω/k which is independent of the amplitude a . In the nonlinear problem the phase speed is in general a function of the amplitude.

To determine the dependence of the phase speed c on the amplitude, we assume that

$$u = u(\theta), \quad \theta = x - ct \quad (3.1.183)$$

so that (3.1.181) becomes

$$(c^2 - \alpha^2) u'' + \gamma^2 u = \beta u^3 \quad (3.1.184)$$

where primes denote differentiation with respect to θ . We assume the amplitude to be small and expand both u and c as

$$\begin{aligned} u &= a u_1 + a^3 u_3 + \cdots \\ c &= c_0 + a^2 c_2 + \cdots \end{aligned} \quad (3.1.185)$$

Had we included the terms $a c_1$ and $a^2 u_2$, we would have found that $c_1 = 0$ and u_2 satisfies the same equation as u_1 , hence u_2 is not included.

Substituting (3.1.185) into (3.1.184) and equating coefficients of equal powers of a , we obtain

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_1'' + \gamma^2 u_1 = 0 \quad (3.1.186)$$

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_3'' + \gamma^2 u_3 = -2c_0 c_2 u_1'' + \beta u_1^3 \quad (3.1.187)$$

We take the solution of (3.1.186) to be

$$u_1 = \cos k\theta, \quad c_0^2 = \alpha^2 + \gamma^2 k^{-2} \quad (3.1.188)$$

so that (3.1.185) coincides with (3.1.183) to $O(a)$. Then (3.1.187) becomes

$$(c_0^2 - \alpha^2) u_3'' + \gamma^2 u_3 = \left(2c_0 c_2 k^2 + \frac{3}{4} \beta \right) \cos k\theta + \frac{1}{4} \beta \cos 3k\theta \quad (3.1.189)$$

Secular terms are eliminated if $c_2 = -3\beta/8c_0 k^2$. Then

$$u_3 = -\frac{\beta}{32\gamma^2} \cos 3k\theta$$

Therefore

$$\begin{aligned} u &= a \cos k\theta - \frac{a^3 \beta}{32\gamma^2} \cos 3k\theta + \dots \\ c &= \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 k^{-2}} \left[1 - \frac{3a^2 \beta}{8(\alpha^2 k^2 + \gamma^2)} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.190)$$

The technique used in this section was formalized by Stoker (1957) for the treatment of surface waves in liquids. This technique was used to treat the interaction of capillary and gravity waves in deep and finite-depth water by Pierson and Fife (1961) and Barakat and Houston (1968), respectively. It was also used by Maslowe and Kelly (1970) to treat waves in KelvinHelmholtz flow.

Instead of expanding the phase speed, we could have expanded the wavenumber to determine the wave number shift or the frequency to determine the frequency shift. Variations of this technique were applied to a variety of problems. For example, Malkus and Veronis (1958) treated the Bnard convection problem. Pedlowsky (1967) determined the response of a bounded ocean to a surface wind oscillating near one of the Rossby wave frequencies. Keller and Ting (1966) and Millman and Keller (1969) obtained periodic solutions for various systems governed by nonlinear partial differential equations, while Keller and Millman (1969) treated nonlinear electromagnetic and acoustic wave propagation. Rajappa (1970) investigated nonlinear Rayleigh-Taylor instability.

9.3.2 3.2. Lighthill's Technique

The essence of Lighthill's technique is to expand not only the dependent variable $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \epsilon)$ in powers of the small parameter ϵ , but also to expand one of the independent variables, say x_1 , in powers of ϵ . Lighthill (1949a, 1961) introduced a new independent variable and then expanded both u and x_1 in powers of ϵ with coefficients depending on s . To a first approximation he assumed that x_1 and s are identical. Thus Lighthill assumed

the following expansions for u and x_1

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2.1)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2.2)$$

It is clear that the straightforward expansion (Poincaré type) consists of (3.2.1) alone with s replaced by x_1 . Since this straightforward expansion is not uniformly valid, Lighthill introduced (3.2.2) and chose ξ_m (called straining functions) so as to make both of the above expansions uniformly valid; that is, he chose ξ_m so that the resulting approximation is uniformly valid. In some cases this is accomplished by requiring that

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} \text{ and } \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \text{ be bounded} \quad (3.2.3)$$

In other words, higher approximations shall be no more singular than the first. Comparing (3.2.1) and (3.2.2) with (3.1.2) and (3.1.4), we see that Lighthill's technique is an extension of the method of strained parameters.

This technique was modified by Kuo (1953, 1956) to apply to viscous flows. For this reason Tsien (1956) called it the PLK method, that is, the Poincaré-Lighthill-Kuo method.

This method was applied to a variety of problems, especially wave propagation in nondispersive media. Lighthill (1949b) treated conical shock waves in steady supersonic flow. Whitham (1952) determined the pattern of shock waves on an axisymmetric projectile in steady supersonic flow and treated the propagation of spherical shocks in stars (1953). Legras (1951, 1953) and Lee and Sheppard (1966) applied it to steady supersonic flow past a thin airfoil, while Rao (1956) applied it to sonic booms. Holt and Schwartz (1963), Sakurai (1965), Holt (1967), and Akinsete and Lee (1969) investigated nonsimilar effects in the collapsing of an empty spherical cavity, while Jahsman (1968) treated the collapse of a gas-filled spherical cavity. Sirignano and Crocco (1964) analyzed combustion instability which is driven by chemical kinetics. Savage and Hasegawa (1967) studied the attenuation of pulses in metals, while Sakurai (1968) discussed the effect of plasma impedance in the problem of inverse pinch. Einaudi (1969, 1970) applied it to the propagation of acoustic gravity waves. Lewak (1969) and Zawadzki and Lewak (1971) solved Vlasov's equation. Espedal (1971) used a combination of this technique and the method of matched asymptotic expansions to determine the effect of ion-ion collision on an ion-acoustic plasma pulse.

Asano and Taniuti (1969, 1970) and Asano (1970) extended this technique to nondispersive wave propagation in slightly inhomogeneous media.

Melnik (1965) applied it to the entropy layer in the vicinity of a conical symmetry plane. McIntyre (1966) treated optimal control with discontinuous forcing functions. Ross (1970) applied it to diffusion-coupled biochemical reaction kinetics.

Barua (1954) analyzed secondary flows due to rotation in an unheated tube, Morton (1959) treated laminar convection in a heated tube, and Morris (1965) investigated the case of laminar convection in a vertical tube. Chang, Akins, and Bankoff (1966) analyzed the free convection of a liquid metal from a uniformly heated plate.

Crane (1959) rendered an asymptotic expansion for boundary layers uniformly valid. Goldburg and Cheng (1961) discussed the anomaly arising from the application of this technique and parabolic coordinates to the trailing edge boundary layer. Ockendon (1966) investigated the separation points in the Newtonian theory of hypersonic flow.

Since Lighthill's technique is a generalization of the method of strained parameters, the first technique gives results identical to those obtained using the latter technique whenever it

is applicable. Therefore the examples discussed next are problems that cannot be treated by the method of strained parameters.

3.2.1. A First-order Differential Equation

The first example treated by Lighthill is the first-order differential equation

$$(x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad y(1) = b > 0 \quad (3.2.4)$$

where $q(x)$ and $r(x)$ are regular functions for all x of interest. Wasow (1955) determined the necessary conditions for the convergence of Lighthill's expansion for this problem; the proof had an error which was corrected by Lighthill. Usher (1971) investigated the necessary conditions for the applicability of this technique to equations of the form

$$y' = f(x, y) + \epsilon g(x, y) + \cdots$$

Comstock (1968) showed that Lighthill's technique may lead to an erroneous expansion (see Exercise 3.28) for

$$(x^n + \epsilon y) y' + nx^{n-1}y = mx^{m-1}, \quad y(1) = a > 1$$

while Burnside (1970) investigated the uniformity of the expansion obtained by straining $z = x^n$ rather than x .

It is clear that the region of nonuniformity is in the neighborhood of $x = 0$. For $\epsilon = 0$, (3.2.4) has the solution

$$y = \left[\exp \int^x -\frac{q(t)}{t} dt \right] \left[\int^x \frac{r(t)}{t} \left(\exp \int^t \frac{q(\tau)}{\tau} d\tau \right) + c \right] \quad (3.2.5)$$

Let $q(0) = q_0$, then

$$\exp \int^x \frac{q(t)}{t} dt = x^{a_0} R(x) \quad (3.2.6)$$

where $R(x)$ stands for a function regular at $x = 0$. Since $r(x)$ is regular at $x = 0$

$$y = R(x) + O(x^{-20}) \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad (3.2.7)$$

except when q_0 is a negative integer. In the latter case

$$y = R(x) + O(x^{-q_0} \ln x) \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad (3.2.8)$$

Equations (3.2.7) and (3.2.8) show that the zeroth-order solution of (3.2.4) is bounded or unbounded as $x \rightarrow 0$ depending on whether $q_0 < 0$ or $q_0 \geq 0$. In order to show the details of the method, we apply it to a specific example for which $q_0 = 2$.

In this case we consider the following problem treated by Lighthill (1949a) and Tsien (1956)

$$(x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1} \quad (3.2.9)$$

where A is a constant. Following Lighthill, we assume that

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m y_m(s) \quad (3.2.10)$$

$$x = s + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x_m(s) \quad (3.2.11)$$

Then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m y'_m(s)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x'_m(s)} \quad (3.2.12)$$

In order to apply the boundary condition, we need to determine the value of s , denote it by $\tilde{s}$, corresponding to $x = 1$; that is, we must solve

$$\tilde{s} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x_m(\tilde{s}) \quad (3.2.13)$$

We expand $\tilde{s}$ in powers of ϵ according to

$$\tilde{s} = 1 + \epsilon \tilde{s}_1 + \epsilon^2 \tilde{s}_2 + \cdots \quad (3.2.14)$$

Substituting (3.2.14) into (3.2.13), expanding, and equating coefficients of equal powers of ϵ lead to

$$\tilde{s} = 1 - \epsilon x_1(1) - \epsilon^2 [x_2(1) - x_1(1)x'_1(1)] + \cdots \quad (3.2.15)$$

The boundary condition can now be written as

$$Ae^{-1} = y_0(1) + \epsilon [y_1(1) - y'_0(1)x_1(1)] + \cdots \quad (3.2.16)$$

or

$$y_0(1) = Ae^{-1} \quad (3.2.17)$$

$$y_1(1) = y'_0(1)x_1(1) \quad (3.2.18)$$

Substituting (3.2.10) through (3.2.12) into (3.2.9), expanding, and equating the coefficients of ϵ^0 and ϵ to zero yield

$$sy'_0 + (2+s)y_0 = 0 \quad (3.2.19)$$

$$sy'_1 + (2+s)y_1 = -(2+s)y_0x'_1 - (y_0 + y'_0)x_1 - y_0y'_0 \quad (3.2.20)$$

The solution for y_0 is

$$y_0 = Ae^{-s}s^{-2} \quad (3.2.21)$$

With this solution (3.2.20) becomes

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \frac{1}{s} \left[-(2+s)x'_1 + \frac{2}{s}x_1 + Ae^{-s}s^{-2} \left(\frac{2}{s} + 1 \right) \right] \quad (3.2.22)$$

If $x_1 = 0$, (3.2.22) reduces to the equation for the first-order term in the straightforward expansion, where y_1 is more singular at $x = 0$ than y_0 . In fact, $y_0 = O(x^{-2})$, while $y_1 = O(x^{-5})$ as $x \rightarrow 0$. To render the above expansion uniformly valid, x_1 can be chosen so that y_1 is no more singular than y_0 by eliminating the right-hand side of (3.2.22). However, Lighthill found that a uniformly valid expansion can be obtained by choosing x_1 to eliminate the worst singularity. Thus he put

$$x'_1 - \frac{x_1}{s} = \frac{A}{s^3} \quad (3.2.23)$$

or

$$x_1 = -\frac{A}{3s^2} \quad (3.2.24)$$

Then (3.2.22) becomes

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{y_1}{y_0} \right] = -\frac{2A}{3s^3} - \frac{2A}{s^4} + Ae^{-s} \left(\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} \right) \quad (3.2.25)$$

Hence

$$y_1 = A^2 e^{-s} s^{-2} \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right] \quad (3.2.26)$$

The straining function x_2 can be found from the elimination of the worst singularity in y_2 to be

$$x_2 = -\frac{3A^2}{10s^4} \quad (3.2.27)$$

Therefore

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \left\{ 1 + A\epsilon \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right] \right\} + O\left(\frac{\epsilon^2}{s^6}\right) \quad (3.2.28)$$

where

$$x = s - \frac{\epsilon A}{3s^2} - \frac{3\epsilon^2 A^2}{10s^4} + O\left(\frac{\epsilon^3}{s^6}\right) \quad (3.2.29)$$

The roughest approximation that is uniformly valid near the origin is

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \quad (3.2.30)$$

where s is the root of

$$x = s - \frac{\epsilon A}{3s^2} \quad (3.2.31)$$

which is approximately x when $x \geq 0$ and $\epsilon \ll 1$. This expansion is assumed to start from a positive value of x , and it is required to continue downward and through $x = 0$. For a physical problem this continuation stops if there exists a real branch point of s as a function of x before the origin. The branch point is given by $dx/ds = 0$, or equivalently by $x + \epsilon y = 0$, which is a singularity of the original equation (3.2.9). In this case the branch point is given by $s \approx (-2A\epsilon/3)^{1/3}$ which is positive if and only if $A < 0$. Therefore the above expansion would be valid up to the origin if $A > 0$, and stops at $x \approx (3/2)(-2A\epsilon/3)^{1/3}$ if $A < 0$.

If $A = 1$ then $x = 0$ corresponds to

$$s = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/3} + \frac{9}{10} \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{2/3} + O(\epsilon) \quad (3.2.32)$$

Hence at $x = 0$

$$y = \left(\frac{3}{6}\right)^{2/3} - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{\epsilon}\right)^{1/3} + O(1) \quad (3.2.33)$$

3.2.2. The One-dimensional Earth-moon-spaceship Problem

The one-dimensional earth-moon-spaceship problem was studied by Nayfeh (1965a) and can be reduced to (see Section 2.4.2)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0 \quad (3.2.34)$$

We assume that

$$t = t_0(s) + \mu t_1(s) + O(\mu^2) \quad (3.2.35)$$

$$x = s + \mu x_1(s) + O(\mu^2) \quad (3.2.36)$$

Substituting (3.2.35) and (3.2.36) into (3.2.34) and equating coefficients of equal powers of μ , we have

$$2t_0'^2 = s, \quad t_0(0) = 0 \quad (3.2.37)$$

$$\frac{t_1'}{t_0'^3} = \frac{x_1'}{t_0'^2} + \frac{x_1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}, \quad t_1(0) = t_0'(0)x_1(0) \quad (3.2.38)$$

The solution of (3.2.37) is

$$\sqrt{2}t_0 = \frac{2}{3}s^{3/2} \quad (3.2.39)$$

If $x_1 = 0, t_1 = 0[\ln(1-x)]$ as $x \rightarrow 1$. The singularity in t_1 can be removed if the right-hand side of (3.2.38) is eliminated; that is

$$\frac{x_1'}{t_0'^2} + \frac{x_1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} = 0 \quad (3.2.40)$$

whose solution is

$$x_1 = -1 + \frac{1}{2}s^{-1/2} \ln \frac{1+s^{1/2}}{1-s^{1/2}} - \frac{2}{3}s \quad (3.2.41)$$

Therefore, to first approximation

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}s^{3/2} + O(\mu) \quad (3.2.42)$$

where s is the root of

$$x = s - \mu \left[1 - \frac{1}{2}s^{-1/2} \ln \frac{1+s^{1/2}}{1-s^{1/2}} + \frac{2}{3}s \right] + O(\mu^2) \quad (3.2.43)$$

3.2.3. A Solid Cylinder Expanding Uniformly in Still Air

Let us next solve the problem of a cylindrical shock wave produced by a cylindrical solid body expanding uniformly from zero in inviscid nonconducting still air. This problem was also studied by Lighthill. The radial expansion velocity is assumed to be ϵa_0 where a_0 is the speed of sound in still air and ϵ is a small quantity. The shock propagates with a uniform radial velocity Ma_0 where M is the shock Mach number. The flow between the cylinder and the shock is adiabatic and isentropic, hence it can be represented by a potential function $\varphi(r, t)$ (the radial velocity $q = \varphi_r$) given by

$$a^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (3.2.44)$$

where a is the local speed of sound and is related to a_0 by Bernoulli's equation; namely

$$a^2 + (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] = a_0^2 \quad (3.2.45)$$

where γ is the ratio of the gas specific heats. The gas is assumed perfect with constant specific heats. Three boundary conditions must be satisfied by φ . The velocity of the air at the cylinder's surface is equal to the velocity of its expansion, that is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} (\epsilon a_0 t) = \epsilon a_0 \quad (3.2.46)$$

The second condition is the continuity of φ across the shock. Since $\varphi = 0$ in still air

$$\varphi (M a_0 t) = 0 \quad (3.2.47)$$

The third condition is the Rankine-Hugoniot relation between the shock velocity and the velocity of the air behind it; that is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} (M a_0 t) = \frac{2 a_0 (M^2 - 1)}{M(\gamma + 1)} \quad (3.2.48)$$

Since there is no fundamental length in this problem, all flow quantities are functions only of $r/a_0 t$. Thus we let

$$\varphi = a_0^2 t f(x), \quad x = \frac{r}{a_0 t} \quad (3.2.49)$$

Then the problem becomes

$$\begin{aligned} \left[1 - x^2 + (\gamma + 1)x \frac{df}{dx} - (\gamma - 1)f - \frac{1}{2}(\gamma + 1) \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} \\ + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} \left\{ 1 + (\gamma - 1) \left[x \frac{df}{dx} - f - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

subject to the boundary conditions

$$\frac{df}{dx}(\epsilon) = \epsilon \quad (3.2.51)$$

$$f(M) = 0 \quad (3.2.52)$$

$$\frac{df}{dx}(M) = 2 \frac{(M^2 - 1)}{M(\gamma + 1)} \quad (3.2.53)$$

Since there are three boundary conditions imposed on a second-order differential equation, a relationship must exist between M and ϵ .

Since ϵ is small, f is small, hence the zeroth-order term in the straightforward expansion is the solution of the linearized form of (3.2.50); that is

$$(1 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} = 0 \quad ((3.2))$$

Using the above boundary conditions, we find that

$$f = \epsilon^2 \int_1^x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} dx, \quad M = 1 \quad (3.2.55)$$

This approximate solution has no physical meaning for $x > 1$, and the shock Mach number must be greater than 1 for there to be any propagation.

In order to determine a valid solution beyond $x = 1$, and in order to determine by how much M exceeds 1, we find it convenient to transform the second-order equation (3.2.50) into a system of two first-order equations by letting

$$\frac{df}{dx} = g \quad (3.2.56)$$

Then we assume the following expansions

$$f = \epsilon^2 f_0 + \epsilon^4 f_1 + \dots \quad (3.2.57)$$

$$g = \epsilon^2 g_0 + \epsilon^4 g_1 + \dots \quad (3.2.58)$$

$$x = s + \epsilon^2 x_1(s) + \epsilon^4 x_2(s) + \dots \quad (3.2.59)$$

$$M = 1 + \epsilon^2 M_1 + \epsilon^4 M_2 + \dots \quad (3.2.60)$$

The zeroth-order term is given by (3.2.54) if x is replaced by s ; that is

$$\begin{aligned} g_0 &= \sqrt{\frac{1}{s^2} - 1} \\ f_0 &= \int_1^s g_0(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

The first-order problem is

$$\begin{aligned} (1 - s^2) g_1' + \frac{g_1}{s} - (1 - s^2) g_0' x_1' + [-2s x_1 + (\gamma + 1) s g_0 - (\gamma - 1) f_0] g_0' \\ + \frac{g_0}{s} (\gamma - 1) (s g_0 - f_0) - \frac{g_0 x_1}{s^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

$$f_1' = g_1 + g_0 x_1' \quad (3.2.63)$$

As $s \rightarrow 1$, $g_0 \rightarrow \sqrt{2(1 - s)}$; $f_0 \rightarrow -\frac{2}{3}\sqrt{2}(1 - s)^{3/2}$, hence (3.2.62) becomes

$$g_1 = \frac{-x_1}{\sqrt{2(1 - s)}} + \gamma + 1 + O(\sqrt{1 - s}) \quad \text{as } s \rightarrow 1 \quad (3.2.64)$$

Thus g_1 will have a singularity at $s = 1$ unless $x_1 = 0$, and $g_1(1) = \gamma + 1$ as a consequence.

In order to determine M_1 , we use the boundary conditions at the shock. If $\tilde{s}$ corresponds to the position of the shock $x = M$, then to order ϵ^2

$$\tilde{s} = 1 + \epsilon^2 M_1 + \dots \quad (3.2.65)$$

and the boundary condition (3.2.53) gives

$$\epsilon^2 g_0 (1 + \epsilon^2 M_1 + \dots) + \dots = \frac{4}{\gamma + 1} \epsilon^2 M_1 + \dots \quad (3.2.66)$$

Substituting for g_0 from (3.2.61) and equating the coefficients of ϵ^2 on both sides, we obtain $M_1 = 0$. Hence

$$\tilde{s} = 1 + \epsilon^4 [M_2 - x_2(1)] + \dots \quad (3.2.67)$$

Then (3.2.52) and (3.2.57) give

$$f_1(1) = 0 \quad (3.2.68)$$

The second-order equation gives for g_2

$$g_2 = -\frac{2x_2 - (\gamma + 1)^2}{2\sqrt{2(1-s)}} + O(1) \quad \text{as } s \rightarrow 1 \quad (3.2.69)$$

In order to remove the singularity from g_2 , we set

$$x_2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)^2 \quad (3.2.70)$$

Hence $\tilde{s} = 1 + \epsilon^4 [M_2 - (\gamma + 1)^2/2]$ and, to fourth order, the boundary condition (3.2.53) gives

$$\sqrt{(\gamma + 1)^2 - 2M_2} + (\gamma + 1) = \frac{4M_2}{\gamma + 1} \quad (3.2.71)$$

whose solution is $M_2 = 3(\gamma + 1)^2/8$. Consequently

$$M = 1 + \frac{3}{8}(\gamma + 1)^2 \epsilon^4 + O(\epsilon^6) \quad (3.2.72)$$

Pandey (1968) treated the case of a solid cylinder expanding uniformly in still water rather than air.

3.2.4. Supersonic Flow Past a Thin Airfoil

The fourth example in the application of Lighthill's method is the determination of a uniformly valid expansion for supersonic flow past a thin airfoil (Legras, 1951, 1953) discussed in Section 2.1.3. To carry out the expansion, it is more convenient to transform the original second-order differential equation into a system of two first-order equations by letting

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y$$

in (2.1.19) through (2.1.21) and obtaining

$$v_y - B^2 u_x = M^2 [(\gamma + 1)uu_x + (\gamma - 1)uv_y + 2vv_x + \text{cubic terms}] \quad (3.2.73)$$

$$u_y = v_x \quad (3.2.74)$$

$$\frac{v + \epsilon T v_y + \dots}{1 + u + \epsilon T u_y + \dots} = \epsilon T'(x) \quad \text{at } y = 0 \quad (3.2.75)$$

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad (\text{upstream}) \quad (3.2.76)$$

The straightforward expansion of this problem was found in Section 2.1.3 to break down as $y \rightarrow \infty$. Since u and v vanish upstream, a uniformly valid expansion can be obtained by straining the linearized outgoing characteristic (i.e., $x - By = \text{a constant}$). Thus we let

$$u = \epsilon u_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.77)$$

$$v = \epsilon v_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 v_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.78)$$

where

$$x - By = \xi + \epsilon G_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 G_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.79)$$

$$y = \eta \quad (3.2.80)$$

The straining functions G_i can be determined by imposing the condition that (3.2.77) and (3.2.78) be uniformly valid for large distances; that is, u_2/u_1 and v_2/v_1 are bounded. This condition has been shown to be equivalent to requiring ξ to be the outgoing characteristic of the nonlinear equations (Lighthill, 1949a; Whitham, 1952, 1953; Lin, 1954; Fox, 1955).

Since the characteristics of (2.1.19) are given by

$$\begin{aligned} [1 - M^2(\gamma - 1)\phi_x + \dots](dx)^2 + [2M^2\phi_y + \dots] dx dy \\ - [B^2 + M^2(\gamma + 1)\phi_x + \dots](dy)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.81)$$

the equation for the outgoing characteristic is

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\zeta = \text{constant}} = c \quad (3.2.82)$$

where

$$c = B + \frac{M^2}{2B} \{ [B^2(\gamma - 1) + (\gamma + 1)] u - 2Bv \} + \dots \quad (3.2.83)$$

Equation (3.2.82) can be rewritten as

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = c \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.2.84)$$

The problem is thus reduced to expanding the dependent variables u and v as well as the independent variable x in terms of ϵ , the variable $\eta = y$, and the outgoing characteristic ξ . Thus (3.2.79) is equivalent to

$$x = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.85)$$

where

$$x_0 = \xi + B\eta \quad \text{and} \quad x_i = G_i \quad \text{for} \quad i \geq 1 \quad (3.2.86)$$

To fix the parametrization we need to place an initial condition on x . This condition is taken to be

$$x(\xi, 0) = \xi \quad (3.2.87)$$

which is equivalent to choosing G_i to vanish at $y = 0$.

To transform from the independent variables x and y to ξ and η , we note that

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} &= x_\xi \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= x_\eta \frac{\partial}{\partial x} + y_\eta \frac{\partial}{\partial y} = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

on account of (3.2.80) and (3.2.84). Hence

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{x_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{c}{x_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.2.88)$$

Substituting (3.2.77), (3.2.78), and (3.2.85) into (3.2.73) through (3.2.76), (3.2.83), (3.2.84), and (3.2.87), using (3.2.88), and equating coefficients of equal powers of ϵ , we obtain

Order ϵ

$$x_{0\xi} v_{1\eta} - (B v_{1\xi} + B^2 u_{1\xi}) = 0 \quad (3.2.89)$$

$$x_{0\xi} u_{1\eta} - (B u_{1\xi} + v_{1\xi}) = 0 \quad (3.2.90)$$

$$v_1(\xi, 0) = T'(\xi) \quad (3.2.91)$$

$$x_{1\eta} = \frac{M^2}{2B} \{ [B^2(\gamma - 1) + (\gamma + 1)] u_1 - 2B v_1 \} \quad (3.2.92)$$

$$x_1(\xi, 0) = 0 \quad (3.2.93)$$

The solution of (3.2.89) through (3.2.91) that vanishes upstream is

$$v_1 = T'(\xi), \quad u_1 = -B^{-1} T'(\xi) \quad (3.2.94)$$

which coincides with the linearized solution. Then (3.2.92) becomes

$$x_{1\eta} = -\frac{1}{2} M^4 (\gamma + 1) B^{-2} T'(\xi) \quad (3.2.95)$$

whose solution subject to (3.2.93) is

$$x_1 = -\frac{1}{2} M^4 (\gamma + 1) B^{-2} \eta T'(\xi) \quad (3.2.96)$$

Therefore a first-order uniformly valid expansion is given by the first terms in (3.2.77) and (3.2.78) where

$$x - By = \xi - \frac{1}{2} \epsilon M^4 (\gamma + 1) B^{-2} \eta T'(\xi) + O(\epsilon^2) \quad (3.2.97)$$

on account of (3.2.85), (3.2.86), and (3.2.96). This solution shows that the uniformly valid first-order expansion for a hyperbolic system of equations is simply the linearized solution with the linearized characteristic replaced by the characteristic calculated by including the first-order nonlinear terms.

Higher-order approximations can be obtained in a straightforward manner. A second-order expansion was obtained by Lee and Sheppard (1966).

For general problems the velocity potential ϕ does not vanish upstream. In this case a uniformly valid expansion can be obtained by expanding the dependent as well as both of the independent variables x and y in terms of ϵ , and both characteristics ξ and η of the nonlinear equations. Thus we augment (3.2.83) and (3.2.84) by equations describing the ingoing characteristic η and introduce another expansion for y similar to (3.2.85). We next illustrate such a procedure for a more general system of hyperbolic equations.

3.2.5. Expansions by Using Exact Characteristics nonlinear Elastic Waves

In the hyperbolic differential equation discussed above, a uniformly valid expansion was obtained by straining one of the characteristics of the linearized equation. The resulting strained variable was a better approximation to the exact characteristic. Lin (1954) and Fox (1955) generalized Lighthill's technique for problems of hyperbolic differential equations in two independent variables by adopting characteristic parameters as the independent variables, a procedure that amounts to straining two families of characteristics. Thus they were able to treat general waves in fluid flow in which the ingoing and outgoing waves interact.

This method was applied by Verhagen and Van Wijngaarden (1965) to the hydraulic jump problem. Guiraud (1965), Oswatitsch (1965), and Zierep and Heynatz (1965) applied it to gas dynamics waves of finite amplitude. Gretler (1968) devised an indirect method to calculate the plane flow past an airfoil, while Van Wijngaarden (1968) analyzed the oscillation near resonance in open pipes. Thermally driven nonlinear one-dimensional oscillations were treated by Chu and Ying (1963) and Rehm (1968) and by Gundersen (1967) for a conducting fluid. Chu (1963) and Mortell (1971) studied self-sustained oscillations in a pipe. Lick (1969) analyzed propagation of waves in isentropic and chemically reacting compressible fluids, while

Lesser (1970) investigated wave propagation in inhomogeneous media. Parker and Varley (1968) treated the nonlinear interaction of stretching and deflection waves in elastic membranes and strings, while Mortell and Varley (1971) discussed the nonlinear free vibration of an elastic panel. Richmond and Morrison (1968) applied this technique to an axisymmetric plasticity problem, while Davison (1968) obtained a second-order expansion for nonlinear elastic waves in an isotropic medium by using two characteristics as independent variables. Now, we explain the technique by determining a first order expansion for nonlinear elastic waves in anisotropic materials.

If u and v represent the displacements in the x and y directions, then

$$\rho u_{tt} = \sigma_x \quad (3.2.98)$$

$$\rho v_{tt} = \tau_x \quad (3.2.99)$$

where ρ is the material density. We let $P = u_x$ and $Q = v_x$ and assume the stresses σ and τ to be polynomials in P and Q such that

$$\begin{aligned} \sigma_P &\rightarrow \lambda + 2\mu, & \sigma_Q &\rightarrow 0 \\ \tau_P &\rightarrow 0, & \tau_Q &\rightarrow \mu \end{aligned} \quad (3.2.100)$$

as P and $Q \rightarrow 0$. Here, λ and μ are the Lam moduli of the linear theory of elasticity. Thus

$$\frac{\sigma}{\rho} = c_p^2 P + \frac{1}{2} a_1 P^2 + a_2 PQ + \frac{1}{2} a_3 Q^2 + \dots \quad (3.2.101)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = c_v^2 Q + \frac{1}{2} b_1 P^2 + b_2 PQ + \frac{1}{2} b_3 Q^2 + \dots \quad (3.2.102)$$

where

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.2.103)$$

with c_p and c_s the principal and shear speeds of propagation. By letting

$$R = u_t \quad \text{and} \quad S = v_t \quad (3.2.104)$$

and substituting (3.2.101) and (3.2.102) into (3.2.98) and (3.2.99), we have

$$R_t - c_p^2 P_x = \alpha P_x + \beta Q_x + \dots \quad (3.2.105)$$

$$S_t - c_s^2 Q_x = \gamma P_x + \delta Q_x + \dots \quad (3.2.106)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 P + a_2 Q, & \beta &= a_2 P + a_3 Q \\ \gamma &= b_1 P + b_2 Q, & \delta &= b_2 P + b_3 Q \end{aligned} \quad (3.2.108)$$

Since $P = u_x$ and $Q = v_x$, (3.2.104) gives

$$P_t = R_x, \quad Q_t = S_x \quad (3.2.109)$$

Note that we have replaced the system of the two second-order differential equations (3.2.98) and (3.2.99) by a system of four first-order equations, which is more convenient for the application of the method of strained coordinates.

To complete the problem formulation, we need to specify the initial conditions. We consider the case investigated by Davison (1968) in which the material is initially unstressed, at rest, and occupying the half-space $x \geq 0$ when a disturbance is introduced at $x = 0$; that is

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \epsilon \phi(t), & Q(0, t) &= \epsilon \psi(t) & \text{for } t \geq 0 \\ P(x, 0) &= Q(x, 0) = R(x, 0) = S(x, 0) = 0 & \text{for } x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.110)$$

with

$$\phi(t) = \psi(t) \equiv 0 \quad \text{for } t \leq 0 \quad (3.2.111)$$

where ϕ and ψ are known functions and $\bullet$ is a small but finite dimensionless quantity. The condition (3.2.111) is equivalent to the vanishing of P and Q along the ingoing characteristics.

To obtain a uniformly valid expansion for the above problem, we expand the dependent as well as the independent variables in terms of ϵ and the outgoing characteristic parameters ξ and η . Thus we let

$$P = \epsilon P_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 P_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.112)$$

$$Q = \epsilon Q_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 Q_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.113)$$

$$R = \epsilon R_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 R_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.114)$$

$$S = \epsilon S_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 S_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.115)$$

$$x = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.116)$$

$$t = t_0(\xi, \eta) + \epsilon t_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 t_2(\xi, \eta) + \dots \quad (3.2.117)$$

To first-order quantities in P and Q , the characteristic wave speeds of (3.2.105), (3.2.106), and (3.2.109) are given by

$$c = \pm \left(c_p + \frac{\alpha}{2c_p} \right), \pm \left(c_s + \frac{\delta}{2c_s} \right) \quad (3.2.118)$$

Thus to $O(P, Q)$ the outgoing characteristics ξ and η are given by

$$x_\eta = c_1 t_\eta \quad (3.2.119)$$

$$x_\xi = c_2 t_\xi \quad (3.2.120)$$

where c_1 and c_2 are the positive speeds in (3.2.118). To fix the parametrization we need to place initial conditions on x and t . These conditions are taken to be

$$x(\xi, \xi) = 0 \quad \text{and} \quad t(\xi, \xi) = \xi \quad (3.2.121)$$

In terms of these new independent variables, the initial conditions (3.2.110) become

$$P(\xi, \xi) = \epsilon \phi(\xi), \quad Q(\xi, \xi) = \epsilon \psi(\xi) \quad (3.2.122)$$

$$P(0, \eta) = Q(\xi, 0) = R(0, \eta) = S(\xi, 0) = 0$$

To transform from the independent variables x and t to ξ and η , we note that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial t}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.2.123)$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(\frac{1}{t_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{t_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{-1}{c_2 - c_1} \left(\frac{c_1}{t_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{c_2}{t_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (3.2.124)$$

Substituting (3.2.112) through (3.2.117) into (3.2.105), (3.2.106), (3.2.109), and (3.2.118) through (3.2.122), using (3.2.124), and equating coefficients of equal powers of ϵ , we obtain

Order ϵ^0

Order ϵ

$$x_{0\eta} - c_p t_{0\eta} = 0 \quad (3.2.125)$$

$$x_{0\xi} - c_s t_{0\xi} = 0 \quad (3.2.128)$$

$$x_0(\xi, \xi) = 0, \quad t_0(\xi, \xi) = \xi \quad (3.2.129)$$

$$-t_{0\eta} (c_p P_1 + R_1)_\xi + t_{0\xi} (c_s P_1 + R_1)_\eta = 0 \quad (3.2.130)$$

$$-t_{0\eta} (c_p Q_1 + S_1)_\xi + t_{0\xi} (c_s Q_1 + S_1)_\eta = 0 \quad (3.2.131)$$

$$-t_{0\eta} (c_p R_1 + c_p^2 P_1)_\xi + t_{0\xi} (c_s R_1 + c_p^2 P_1)_\eta = 0 \quad (3.2.132)$$

$$-t_{0\eta} (c_p S_1 + c_s^2 Q_1)_\xi + t_{0\xi} (c_s S_1 + c_s^2 Q_1)_\eta = 0 \quad (3.2.133)$$

$$(x_1 - c_p t_1)_\eta = \frac{1}{2} c_p^{-1} (a_1 P_1 + a_2 Q_1) t_{0\eta} \quad (3.2.134)$$

$$(x_1 - c_s t_1)_\xi = \frac{1}{2} c_s^{-1} (b_2 P_1 + b_3 Q_1) t_{0\xi}$$

$$x_1(\xi, \xi) = t_1(\xi, \xi) = 0$$

$$P_1(\xi, \xi) = \phi(\xi), \quad Q_1(\xi, \xi) = \psi(\xi)$$

$$P_1(0, \eta) = Q_1(\xi, 0) = R_1(0, \eta) = S_1(\xi, 0) = 0$$

The solution of (3.2.125) through (3.2.127) is

$$x_0 = \frac{c_p c_s (\xi - \eta)}{c_p - c_s}, \quad t_0 = \frac{c_p \xi - c_s \eta}{c_p - c_s} \quad (3.2.136)$$

which is simply the linearized characteristics

$$t_0 - \frac{x_0}{c_p} = \xi, \quad t_0 - \frac{x_0}{c_s} = \eta$$

Substituting for t_0 from (3.2.136) into (3.2.128) through (3.2.131) and solving the resulting equations subject to (3.2.135), we obtain

$$\begin{aligned} P_1(\xi, \eta) &= \phi(\xi), & Q_1(\xi, \eta) &= \psi(\eta) \\ R_1(\xi, \eta) &= -c_p \phi(\xi), & S_1(\xi, \eta) &= -c_s \psi(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.137)$$

which are, except for an ϵ factor, simply the solution of the linearized problem. With this solution (3.2.132) and (3.2.133) become

$$\begin{aligned} (x_1 - c_p t_1)_\eta &= \Gamma_1 a_1 \phi(\xi) + \Gamma_1 a_2 \psi(\eta) \\ (x_1 - c_s t_1)_\xi &= \Gamma_2 b_2 \phi(\xi) + \Gamma_2 b_3 \psi(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.138)$$

where $(\Gamma_1, \Gamma_2) = -(1/2)(c_p - c_s)^{-1}(c_s/c_p, -c_p/c_s)$. The solution of (3.2.138) subject to (3.2.134) is

$$\begin{aligned} x_1 - c_p t_1 &= \Gamma_1 a_1 (\eta - \xi) \phi(\xi) + \Gamma_1 a_2 \int_\xi^\eta \psi(\zeta) d\zeta \\ x_1 - c_s t_1 &= \Gamma_2 b_2 \int_\eta^\xi \phi(\zeta) d\zeta + \Gamma_2 b_3 (\xi - \eta) \psi(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.139)$$

Therefore a first-order uniformly valid expansion is

$$\begin{aligned} P &= \epsilon \phi(\xi) + O(\epsilon^2), & R &= -\epsilon c_p \phi(\xi) + O(\epsilon^2) \\ Q &= \epsilon \psi(\eta) + O(\epsilon^2), & S &= -\epsilon c_s \psi(\eta) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.2.140)$$

where ξ and η are given by

$$\begin{aligned} x - c_p t &= -c_p \xi + \epsilon \Gamma_1 \left[a_1 (\eta - \xi) \phi(\xi) + a_2 \int_\xi^\eta \psi(\zeta) d\zeta \right] + O(\epsilon^2) \\ x - c_s t &= -c_s \eta + \epsilon \Gamma_2 \left[b_2 \int_\eta^\xi \phi(\zeta) d\zeta + b_3 (\xi - \eta) \psi(\eta) \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.2.141)$$

As in the problem of supersonic flow past a thin airfoil treated in the previous section, the first-order uniformly valid expansion is simply the linearized solution with the linearized characteristics replaced by the characteristics calculated by including the first-order nonlinear terms.

The solution can be continued in a straightforward manner to higher orders. For the isotropic case the solution was carried to second order by Davison (1968) and Nair and Nemat-Nasser (1971) for homogeneous and inhomogeneous materials, respectively.

9.3.3 3.3. Temple's Technique

In order to determine a uniformly valid expansion for the problem

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \epsilon) \quad \text{with} \quad u(x_0) = u_0 \quad (3.3.1)$$

Temple (1958) introduced a new independent variable s , as Lighthill did, and assumed that

$$u = u(s, \epsilon) \quad \text{and} \quad x = x(s, \epsilon) \quad (3.3.2)$$

Whereas Lighthill assumed that

$$u = u_0(s) + \epsilon u_1(s) + \epsilon^2 u_2(s) + \cdots \quad (3.3.3)$$

$$x = s + \epsilon x_1(s) + \epsilon^2 x_2(s) + \cdots \quad (3.3.4)$$

and chose x_i so that the above two expansions are uniformly valid, Temple replaced the original equation (3.3.1) by two new equivalent equations

$$\frac{du}{ds} = U(x, u, s, \epsilon), \quad \frac{dx}{ds} = X(x, u, s, \epsilon) \quad (3.3.5)$$

such that U and X are regular in ϵ . Then he determined a straightforward perturbation expansion for u and x . Thus Temple's technique determines x_i in a systematic manner. A similar approach has been used by Whitham, Lighthill, Fox, Lin, and Davison and discussed earlier in the case of hyperbolic equations where the uniformization was achieved by expanding in one or more characteristic parameters.

As an example, let us consider

$$(x + \epsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = e^{-1} \quad (3.3.6)$$

This example has been discussed by Temple, and it is a special case of the problem given by (3.2.9). Temple replaces the above equation by

$$s \frac{dx}{ds} = x + \epsilon y, \quad s \frac{dy}{ds} = -(2 + x)y \quad (3.3.7)$$

These equations are analytic in ϵ and possess the following expansions

$$y = s^{-2} e^{-s} \left[1 - \epsilon \int_1^s \phi(t) dt \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.3.8)$$

$$x = s[1 + \epsilon \phi(s)] + O(\epsilon^2) \quad (3.3.9)$$

where

$$\phi(s) = \int_1^s s^{-4} e^{-s} ds \quad (3.3.10)$$

As $s \rightarrow 0$

$$x = s - \frac{1}{3} \epsilon s^{-2} + O(\epsilon^2 s^{-4}) \quad (3.3.11)$$

$$y = s^{-2} - \frac{1}{6} \epsilon s^{-4} + O(\epsilon^2 s^{-6}) \quad (3.3.12)$$

Hence at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$y = \left(\frac{3}{\epsilon}\right)^{2/3} + O(\epsilon^{-1/3}) \quad (3.3.13)$$

in agreement with (3.2.33) obtained by Lighthill's technique.

9.3.4 3.4. Renormalization Technique

Pritulo (1962) showed that in order to determine a uniformly valid perturbation expansion for a given problem we need not introduce the transformation (3.2.2) into the differential equations and determine ξ_n . Instead, we carry out the straightforward expansion in terms of the original variables and then introduce the transformation (3.2.2) into this straightforward expansion. In order to render this expansion uniformly valid, we impose the condition of Lighthill that the singularities do not grow stronger as the order of approximation increases. Thus we obtain algebraic equations for the determination of ξ_n rather than differential equations, thereby simplifying the whole procedure. However, Pritulo assumed that the coefficients of the series (3.2.1), with the exception of perhaps u_0 , satisfy linear equations, and thus he asserted that under this condition his method becomes effective. This technique was rediscovered by Usher (1968).

This technique is closely related to the method described in Section 7.4.2, which was originated in the work of Rayleigh on scattering. After determining the scattering from a thin slab, Rayleigh recast it into an exponential to render it valid for scattering from many slabs.

We apply this technique to several examples treated earlier in this book and render them uniformly valid.

3.4.1. The Duffing Equation

This problem was introduced in Section 2.1.1 where we determined the straightforward perturbation expansion

$$u = a \cos t + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8}t \sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.4.1)$$

A uniformly valid expansion was obtained in Section 3.1.1 by using the Lindstedt-Poincaré procedure.

To determine a uniformly valid expansion from (3.4.1), we introduce the transformation (3.1.2) into the above series. Expanding and collecting coefficients of equal powers of ϵ , we have

$$u = a \cos s - \epsilon \left[a \left(\omega_1 + \frac{3}{8}a^2 \right) s \sin s - \frac{1}{32}a^3(\cos 3s - \cos s) \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.4.2)$$

The secular terms in (3.4.2) are eliminated if

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2 \quad (3.4.3)$$

Therefore a uniformly valid expansion is

$$u = a \cos s + \frac{1}{32}\epsilon a^3(\cos 3s - \cos s) + O(\epsilon^2) \quad (3.4.4)$$

where

$$t = s \left(1 - \frac{3}{8} \epsilon a^2 \right) + O(\epsilon^2) \quad (3.4.5)$$

which is in agreement with (3.1.15) and (3.1.16) obtained by using the Lindstedt-Poincaré procedure.

3.4.2. A Model for Weak Nonlinear Instability

As a second example, we render uniformly valid the straightforward expansion $u = \epsilon \cos \sigma_1 t \cos kx + \epsilon^3 \left(\frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{terms bounded as } t \rightarrow \infty \right)$ obtained in Section 2.1.2 for the model problem (2.1.10) and (2.1.11). We let

$$t = s (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \quad (3.4.7)$$

in (3.4.6) and expand for small ϵ to obtain

$$u = \epsilon \cos \sigma_1 s \cos kx + \epsilon^3 \left[\left(\frac{9}{32\sigma_1} - \sigma_1 \omega_2 \right) s \sin \sigma_1 s \cos kx + \text{terms bounded as } s \rightarrow \infty \right]$$

Secular terms will be eliminated if $\omega_2 = 9/32\sigma_1^2$. Therefore a uniformly valid expansion is

$$u = \epsilon \cos \sigma t \cos kx + O(\epsilon^3) \quad (3.4.8)$$

where

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1} \left[1 - \frac{9\epsilon^2}{32(k^2 - 1)} \right] + O(\epsilon^3) \quad (3.4.9)$$

If $k > 1$, σ is real and (3.4.8) is valid for times as large as $O(\epsilon^{-2})$ and it represents oscillatory standing waves with amplitude-dependent frequencies.

However, if $k < 1$, σ is imaginary and (3.4.8) represents growing waves. Since after a short time $\cosh 3\tilde{\sigma}t$, where $\tilde{\sigma}$ is real, dominates $\cosh \tilde{\sigma}t$, (3.4.8) is valid only for short times. Equation (3.4.9) shows that $\sigma \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow 1$, and the second term on the right-hand side is of the same order as the first term when $k - 1 = O(\epsilon^2)$. Therefore although the above expansion is valid for a wide range of k , it breaks down when $k - 1 = O(\epsilon^2)$. We show in Section 3.5.1 that the application of the method of strained parameters to determine an expansion valid near $k = 1$ leads to erroneous results. An expansion valid near $k = 1$ is obtained by using the method of multiple scales in Section 6.2.8.

3.4.3. Supersonic Flow Past a Thin Airfoil

As a third example for the application of the renormalization technique, we render uniformly valid the straightforward expansion for the velocity component in the axial direction obtained in Section 2.1.3 for flow past a thin airfoil. From (2.1.36) the straightforward expansion is

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'(\xi)}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma + 1)}{4B^2} \right) T'^2(\xi) \right. \\ \left. - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M^4}{B^3} y T'(\xi) T''(\xi) - T(\xi) T''(\xi) \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

In order to render this expansion uniformly valid, we let

$$\xi = s + \epsilon \xi_1(s, y) + O(\epsilon^2) \quad (3.4.11)$$

in (3.4.10), expand, and collect coefficients of equal powers of ϵ to obtain

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = 1 - \frac{\epsilon T'(s)}{B} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{M^4(\gamma + 1)}{4B^2} \right) T^2(s) - T(s)T''(s) \right. \\ \left. - \left(\xi_1(s, y) + \frac{\gamma + 1}{2B^2} M^4 y T'(s) \right) \frac{T''(s)}{B} \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

This expansion can be rendered uniformly valid for all y by choosing

$$\xi_1(s, y) = -\frac{\gamma + 1}{2B^2} M^4 y T'(s) \quad (3.4.13)$$

Therefore a uniformly valid expansion is given by

$$\frac{u}{U} = 1 - \epsilon \frac{T'(s)}{B} + O(\epsilon^2) \quad (3.4.14)$$

where

$$\xi = s - \epsilon \frac{\gamma + 1}{2B^2} M^4 y T'(s) + O(\epsilon^2) \quad (3.4.15)$$

which is in full agreement with (3.2.94) and (3.2.97) obtained by using Lighthill's technique.

3.4.4. Shift in Singularity

As a fourth example, we consider the problem given in (2.4.1). The straightforward expansion was obtained in Section 2.4.1 to be

$$y = x^{-2} e^{-x} \left[1 + \epsilon \int_1^x e^{-t} t^{-3} (1 + 2t^{-1}) dt \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.4.16)$$

To render this expansion uniformly valid, we let

$$x = s + \epsilon x_1(s) + \dots \quad (3.4.17)$$

in (3.4.16) and collect coefficients of equal powers of ϵ to obtain

$$y = s^{-2} \left[1 - \frac{2\epsilon}{s} \left(x_1 + \frac{1}{3} s^{-2} \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad \text{as } s \rightarrow 0 \quad (3.4.18)$$

The above expansion can be rendered uniformly valid by choosing

$$x_1 = -\frac{1}{3} s^{-2} \quad (3.4.19)$$

to remove the worst singularity. Therefore a uniformly valid expansion is given by

$$y = s^{-2} e^{-s} + O(\epsilon) \quad (3.4.20)$$

where

$$x = s - \frac{1}{3} \epsilon s^{-2} + O(\epsilon^2) \quad (3.4.21)$$

which is in full agreement with (3.2.30) and (3.2.31) obtained by Lighthill's technique.

9.3.5 3.5. Limitations of the Method of Strained Coordinates

In the preceding sections it was evident that the method of strained coordinates is a powerful technique for determining uniformly valid expansions for widely varying physical problems. However, in spite of the successful treatment of hyperbolic differential equations for waves traveling in one or two directions, the method may not yield uniformly valid expansions for elliptic differential equations. Although Lighthill (1951) obtained a uniformly valid second-order expansion for incompressible flow past a rounded thin airfoil, Fox (1953) found higher-order expansions are not uniformly valid.

She also found that even a second-order uniformly valid expansion could not be obtained for the case of compressible flow past a thin airfoil. Thus Lighthill (1961) advised in a later article that his method be used only for hyperbolic differential equations. In spite of this, Vaglio-Laurin (1962) successfully applied this technique in conjunction with the method of integral relations to the blunt body problem (a mixed boundary value problem). Moreover, Emanuel (1966) and Kuiken (1970) successively applied this technique to parabolic problems involving, respectively, unsteady, diffusing, reacting tubular flow, and flow down an inclined surface originated by strong fluid injection.

It should be mentioned that Hoogstraten (1967) modified this technique to treat subsonic thin airfoil problems by introducing a function approximating uniformly a mapping of the physical plane onto a plane in which the airfoil is represented by its chord.

It was suggested by Tsien (1956) that the failure of the method of strained coordinates in treating the thin airfoil problem is the expansion of a function near an irregular point. Fortunately, one can see that the singularities are transferred from the dependent variables to the straining functions and thus realizes the nonuniformity of the resulting expansion. Yuen (1968) expanded a function near an irregular singular point to obtain an expansion valid near the cutoff wave number in the nonlinear stability of a cylindrical liquid jet. However, the resulting expansion did not have any singularity although it fails at the cutoff wave number as shown by Nayfeh (1970c). We show the difficulties encountered by Yuen by using a model problem for weak nonlinear instability of a standing wave (Section 3.5.1).

The method of strained coordinates has been shown by Levey (1959) to fail for the class of singular perturbations in which the small parameter multiplies the highest derivative (Section 3.5.2). He showed that this method yields erroneous results for the problem of cylindrical shock waves. However, it can be shown that straining the dependent rather than the independent variable leads to a uniformly valid expansion (Exercise 3.33).

Although this technique yields uniformly valid expansions for the periodic orbits of weakly nonlinear oscillations, it was shown by Nayfeh (1966) that it does not yield any information about any solution besides the limit cycle and limit points. In general, if the amplitude is varying, then the method of strained coordinates does not apply.

We show the difficulties of the method of strained coordinates with the following examples.

3.5.1. A Model for Weak Nonlinear Instability

As discussed in Section 3.4.2, the expansion (3.4.9) for σ breaks down when $k - 1 = O(\epsilon^2)$. To apply the method of strained parameters to this expansion, we let

$$k = \alpha + \epsilon^2 k_2 \quad (3.5.1)$$

in (3.4.9), expand for small ϵ , collect coefficients of powers of ϵ , and obtain

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - 1} \left[1 - \epsilon^2 \frac{\frac{9}{32} - \alpha k_2}{\alpha^2 - 1} \right] + O(\epsilon^3) \quad (3.5.2)$$

In order that the coefficient of ϵ^2 be no more singular than the first term as $\alpha \rightarrow 1$, we choose k_2 to be $9/32$. Then (3.5.2) becomes

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - 1} \left[1 + \frac{9\epsilon^2}{32(\alpha + 1)} \right] + \dots \quad (3.5.3)$$

which is bounded as $\alpha \rightarrow 1$. Neutral stability corresponds to $\sigma = 0$; that is, $\alpha = 1$, or from (3.5.1)

$$k = 1 + \frac{9}{32}\epsilon^2 + \dots \quad (3.5.4)$$

To show the invalidity of the expansion (3.5.3), it is enough to show the invalidity of the neutral stability condition (3.5.4). The neutral stability configuration is by definition independent of t , hence it is governed by the equation

$$u_{xx} + u = -u^3 \quad (3.5.5)$$

Letting

$$u = \epsilon \cos kx + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos nkx, \quad A_n = O(\epsilon^2)$$

in (3.5.5) and equating the coefficient of $\cos kx$ to zero, we obtain

$$k^2 = 1 + \frac{3}{4}\epsilon^2 + \dots$$

Hence

$$k = 1 + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \dots \quad (3.5.6)$$

which is different from (3.5.4). Therefore the expansions (3.5.3) and (3.5.4) are incorrect. A correct expansion valid near $k = 1$ is obtained in Section 6.2.8 by using the method of multiple scales.

3.5.2. A Small Parameter Multiplying the Highest Derivative

Levey (1959) showed that the application of the method of strained coordinates to the problem of cylindrical shock waves (introduced in Exercise 2.3) leads to incorrect results. The thickness of the shock was found by Wu (1956) to be independent of its strength, contrary to the result obtained by Levey using topology analysis. Rather than showing the invalidity of the expansion by discussing the problem of cylindrical shock waves, we follow

Levey and discuss a simpler problem that has the same features and has an exact solution for comparison. The problem is

$$\epsilon \frac{dy}{dx} = -xy - 1 \quad (3.5.7)$$

where ϵ is a small positive number. Its exact solution which passes through the point (x_0, y_0) is

$$y = y_0 e^{(x_0^2 - x^2)/2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon} \int_{x_0}^x e^{t^2/2\epsilon} dt \quad (3.5.8)$$

The straightforward perturbation expansion of (3.5.7) can be obtained by letting

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(x) \quad (3.5.9)$$

Substituting (3.5.9) into (3.5.7), equating coefficients of equal powers of ϵ , and solving the resulting equations, we obtain

$$y = -x^{-1} - \epsilon x^{-3} - \dots - 1.3.5 \dots (2n-1) \epsilon^n x^{-2n-1} \dots \quad (3.5.10)$$

It can be verified that (3.5.10) is the asymptotic expansion for large x of the exact solution (3.5.8). It can be seen that the above expansion breaks down near $x = 0$ because the first term is singular and higher-order terms are more and more singular. When $x = O(\epsilon^{1/2})$, all terms in the above expansion are of $O(\epsilon^{-1/2})$. Thus the above expansion is never an adequate expansion in the region $x = O(\epsilon^{1/2})$.

To apply the method of strained coordinates to this problem, we let

$$x = s + \epsilon x_1(s) + \epsilon^2 x_2(s) + \dots \quad (3.5.11)$$

in (3.5.10), expand for small ϵ , and collect coefficients of equal powers of ϵ . The straining functions x_n are then chosen so that the higher-order terms are no more singular than the first. In this problem this amounts to eliminating all the terms except the first. The result is

$$y = -\frac{1}{s} \quad (3.5.12)$$

where

$$x = s + \frac{\epsilon}{s} + \frac{\epsilon^2}{s^3} + \dots + \frac{a_n \epsilon^n}{s^{2n-1}} + \dots \quad (3.5.13)$$

$$a_{2m} = (4m-2) \left[\sum_{r=0}^{m-2} a_{2m-1-r} a_{r+1} + \frac{1}{2} a_m^2 \right], \quad m \geq 2 \quad (3.5.14)$$

$$a_{2m+1} = 4m \sum_{r=0}^{m-1} a_{2m-r} a_{r+1}, \quad m \geq 1$$

It follows from the last relations that

$$a_n > 2^{n-2} (n-1)!, \quad n > 2 \quad (3.5.15)$$

Therefore the expansion (3.5.13) is divergent; in fact, it is "more" divergent than (3.5.10), and the expansion breaks down as x approaches $O(\epsilon^{1/2})$. All that has been achieved is the exchange of an invalid expansion of one variable for an invalid expansion of the other. The reason for the breakdown of the expansion is the dropping of the highest derivative whose effect is small for large x but becomes significant as x approaches the region $O(\epsilon^{1/2})$.

3.5.3. The Earth-moon-spaceship Problem

Next we show that the application of the method of strained coordinates to the two-dimensional earth-moon-space problem (introduced in Section 2.4.2) leads to an invalid expansion. To render the expansion (2.4.17) and (2.4.18) uniformly valid using the method of strained coordinates, we substitute

$$x = s + \mu x_1(s) + \dots \quad (3.5.16)$$

into this expansion and obtain

$$\begin{aligned}\sqrt{2}t = & \frac{1}{\rho^3} \sin^{-1} \rho\sqrt{s} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{s(1-\rho^2s)} \\ & + \mu \left[\sqrt{\frac{s}{1-\rho^2s}} x_1 - \frac{2}{\rho^3} \sin^{-1} \rho\sqrt{s} + \frac{2-\rho^2}{\rho^2(1-\rho^2)} \sqrt{\frac{s}{1-\rho^2s}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(1-\rho^2)^{3/2}} \ln \frac{1+(1-2\rho^2)s+2\sqrt{(1-\rho^2)(1-\rho^2s)s}}{1-s} \right] + O(\mu^2)\end{aligned}\quad (3.5.17)$$

The straining function x_1 is chosen so that the term between the brackets is no more singular than the first term as $s \rightarrow 1$; that is

$$x_1 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \ln(1-s) \quad (3.5.18)$$

The straining function could have been chosen to eliminate the term in the brackets. The resulting first-order expansion is then

$$\sqrt{2}t = \frac{1}{\rho^3} \sin^{-1} \rho\sqrt{s} - \frac{1}{\rho^2} \sqrt{s(1-\rho^2s)} + O(\mu^2) \quad (3.5.19)$$

$$y = -\mu cs + O(\mu^2) \quad (3.5.20)$$

where

$$x = s - \frac{1}{2} \frac{\mu}{1-\rho^2} \ln(1-s) + O(\mu^2) \quad (3.5.21)$$

Comparing this expansion with the exact solution, Nayfeh (1965a) showed that this expansion gives a divergent trajectory near the moon although the expansion obtained in the one-dimensional case agrees fairly well with the exact solution. In the one-dimensional case there is a singularity at $x = 1 + \mu/(1-\rho^2) + O(\mu^2)$ which is outside the range of interest $0 \leq x \leq 1$. In the straightforward expansion the singularity is shifted to $x = 1$, and the straining of x moves the singularity from $x = 1$ toward its right position. However, in the two-dimensional case there is a sharp change in the direction of the spacecraft in the neighborhood of the moon, and the straining which is $O(\mu)$ cannot cope with such a sharp change.

9.3.6 Exercises

3.1. Consider the problem

$$\ddot{u} + u = \epsilon u^2, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0$$

(a) Determine a second-order (three-term) straightforward expansion and discuss its uniformity.

(b) Render this expansion uniformly valid using the method of renormalization.

(c) Determine a first-order (two-term) uniformly valid expansion using the method of strained parameters and compare the result with (b).

3.2. (a) Show that the motion of a point mass that moves freely along a parabola $x^2 = 2pz$ rotating about its axis with an angular velocity ω is given by

$$\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{p^2} + \left(\frac{g}{p} - \omega^2\right) x = 0$$

(b) Determine a two-term straightforward expansion for small amplitude and discuss its uniformity.

(c) Render this expansion uniformly valid using the method of renormalization.

(d) Determine a one-term uniformly valid expansion using the method of strained parameters and compare the result with (c).

3.3. Determine a two-term uniformly valid expansion for small amplitudes for the solution of

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

which describes the oscillations of a pendulum.

3.4. Determine a second-order uniformly valid expansion for the periodic solution of

$$\ddot{u} + u = \epsilon (1 - u^2) \dot{u}$$

Note that the amplitude is not arbitrary.

3.5. Determine a first-order uniformly valid expansion for the periodic solution of

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= \epsilon(1 - z)\dot{u} \\ \tau \dot{z} + z &= u^2 \end{aligned}$$

where τ is a constant.

3.6. Consider the equation

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon u^2 + k \cos \omega t$$

Determine first-order uniformly valid expansions for the periodic solutions when

(a) $\omega_0 \approx 2\omega$ [Hint: let $\omega_0 = 2\omega + \epsilon\sigma$ and $u = u_0 + \epsilon u_1 + \cdots$ where $u_0 = a \cos(2\omega t + \beta) + (1/3)k\omega^{-2} \cos \omega t$, then determine a and β from the equation for u_1], and

(b) $\omega_0 \approx \omega/2$ (a is arbitrary in this case).

3.7. Consider the equation

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon u^3 + k \cos \omega t$$

Determine first-order uniformly valid expansions for the periodic solutions when (a) $\omega_0 \approx 3\omega$ and (b) $\omega_0 \approx \omega/3$.

3.8. Determine second-order expansions for the odd solutions corresponding to the transition curves of

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0$$

when δ is near 1 and 4.

3.9. Consider the equation

$$\ddot{u} + \frac{\delta u}{1 + \epsilon \cos 2t} = 0$$

(a) Determine second-order expansions for the transition curves near $\delta = 0, 1$, and 4 (Shen, 1959).

(b) Use Whittaker's technique to determine second-order expansions for u near these curves.

3.10. Consider the equation

$$\ddot{u} + \frac{\delta - \epsilon \cos^2 t}{1 - \epsilon \cos^2 t} u = 0$$

(a) Determine second-order expansions for the first three transition curves (Rand and Tseng, 1969) (i.e., near $\delta = 0, 1$, and 4).

(b) Use Whittaker's technique to determine u near these curves.

3.11. Consider the equation

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos^3 t) u = 0$$

Determine second-order expansions for the first three transition curves using both the method of strained parameters and Whittaker's technique.

3.12. Determine a periodic solution to $O(\epsilon)$ of the problem (Mulholland, 1971)

$$\ddot{u} + \ddot{u} + \dot{u} + u = (1 - u^2 - \dot{u}^2 - \ddot{u}^2) (\ddot{u} + \dot{u})$$

3.13. Determine first-order expansions for

$$\ddot{u} + \lambda u = \epsilon u^3$$

subject to (a) $u(0) = u(\pi) = 0$, and (b) $u(t) = u(t + 2\pi)$.

3.14. Determine a first-order expansion for

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \lambda u &= \epsilon (\sin 2t + u^2) u \\ u(t) &= u(t + 2\pi) \end{aligned}$$

3.15. Determine first-order expansions for

(a) $\ddot{u} + \lambda u = \epsilon t u$

$$u(t) = u(t + 2\pi)$$

(b) $\ddot{u} + \lambda u = \epsilon(\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t)u$

$$u(t) = u(t + 2\pi)$$

3.16. Determine a first-order expansion for small amplitudes of the periodic solution of

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x + g(1 - \cos \theta) - (l + x)\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l + x} \sin \theta + \frac{2}{l + x} \dot{x}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

which describe the oscillation of a swinging spring of length l and constant k when $\omega_1^2 = k/m \approx 4\omega_2^2 = 4g/l$.

3.17. The free vibrations of a simply supported beam on an elastic foundation are given by

$$\begin{aligned} u_{xxxx} + \gamma u + \epsilon \gamma u^3 + u_{tt} &= 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) &= 0 \\ u(x, 0) = a \sin x, \quad u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

where γ, a , and ϵ are constants. Determine an expansion to $O(\epsilon)$ of the frequency of oscillation (Han, 1965).

3.18. Carry out the expansions of Sections 3.1 .4 and 3.1 .5 to second order.

3.19. Consider uniform traveling wave solutions of

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \epsilon u^3$$

of the form $u = a \exp i(kx - \omega t) +$ higher harmonics and determine the frequency and wave number shifts.

3.20. Consider the problem

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{xxxx} = \epsilon u^3$$

$$u(x, 0) = a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0$$

- (a) Determine a first-order straightforward expansion.
 (b) Render this expansion valid using the method of renormalization.
 (c) Determine an expansion valid for $t = O(\epsilon^{-1})$ using the method of strained parameters.
 (d) Show that the frequency is invalid near $k = 1$.
 (e) Apply the method of renormalization to this frequency to remove the singularity.
 (f) Show that the resulting expansion is erroneous.
- 3.21. Consider the eigenvalue problem

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \lambda \phi = \epsilon x^2 \phi$$

$$\phi(x, 0) = \phi(x, \pi) = \phi(0, y) = \phi(\pi, y) = 0$$

Determine first-order expansions when λ is near 2 and 5 .

- 3.22. Consider the problem

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = \epsilon f(x, y, z) \phi$$

with ϕ vanishing on the surfaces of a cube of length π . Determine first-order expansions when $\lambda \approx 3$ and 6 if (a) $f = x^2$ and (b) $f = x^2 y$.

- 3.23. The free transverse vibrations of a simply supported beam are given by

$$EI w_{xxxx} - T w_{xx} + \rho w_{tt} = 0$$

$$T = \frac{ES}{2l} \int_0^l (w_x)^2 dx$$

$$w(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0$$

$$w(x, 0) = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_t(x, 0) = 0$$

where E, I, ρ, S, a , and l are constant. Determine a first-order expansion for small amplitude (Evensen, 1968).

- 3.24. Consider the problem

$$(x + \epsilon y)y' + y = 0, \quad y(1) = 1$$

- (a) Determine a second-order straightforward expansion. What is its region of nonuniformity?
 (b) Render this expansion uniformly valid using the method of renormalization.
 (c) Determine a first-order expansion (two terms in y and three terms in x) using Lighthill's technique and compare it with (b).
 (d) Determine the exact solution by interchanging the roles of dependent and independent variables and compare it with (b) and (c).
- 3.25. Show that a uniformly valid expansion of

$$(x + \epsilon y)y' + xy = be^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}$$

is

$$y = e^{-\xi}(b \ln \xi + 1) + O(\epsilon)$$

where $x = \xi - \epsilon(b \ln \xi + b + 1) + O(\epsilon^2)$.

- 3.26. Consider the problem

$$(x + \epsilon y)y' - \frac{1}{2}y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1$$

- (a) Determine a second-order straightforward expansion and discuss its uniformity.
 (b) Render this expansion uniformly valid using the method of renormalization.
 (c) Obtain a first-order expansion using Lighthill's technique and compare the result with (b).
 3.27. Use the method of renormalization to render the expansion of Exercise 2.12 uniformly valid.
 3.28. Consider the problem

$$(x^n + \epsilon y)y' + nx^{n-1}y - mx^{m-1} = 0 \\ y(1) = a > 1$$

- (a) Show that its exact solution is given by

$$x^n y + \frac{1}{2}\epsilon y^2 = x^m + \left(a + \frac{1}{2}\epsilon a^2 - 1\right)$$

- (b) Show that application of Lighthill's technique gives

$$y \sim y_0 = (\xi^m + a - 1)\xi^n \\ x = \xi - \frac{1}{2} \frac{\epsilon \xi (y_0^2 - a^2)}{(n-m)\xi^m + n(a-1)} + O(\epsilon^2)$$

- (c) Show that (Comstock, 1968) the approximate solution is erroneous near ($x = 0$) except for special values of m and n .
 (d) Introduce a new variable $z = x^n$ in the original problem and then strain the variable z to determine an approximate solution to y . Determine the conditions under which this new expansion is valid near the origin (Burnside, 1970), hence determine the role of changing the independent variable on rendering the approximate solution uniformly valid.
 3.29. Consider the problem

$$(1 + \epsilon u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = \epsilon \phi(x)$$

- (a) Determine a first-order straightforward expansion for $\epsilon \ll 1$ and discuss its uniformity.
 (b) Render this expansion uniformly valid using the method of renormalization.
 (c) Determine a first-order expansion using Lighthill's technique and compare the result with (b).
 3.30. Consider the problem

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_x u_{xx} \\ u(0, t) = \epsilon \phi(t), \quad \phi(t) = 0 \text{ for } t \leq 0 \\ u(x, 0) = 0 \text{ for } x \geq 0$$

- (a) Determine a first-order straightforward expansion and render it "uniformly valid" using the method of renormalization.
 (b) Determine a first-order expansion using Lighthill's technique and compare it with (a). Show that renormalizing u rather than u_x leads to an erroneous result.
 3.31. Consider the problem (Lighthill, 1949a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n}{x+y}u = u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad u = v_y \\ u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = \epsilon \phi(y)y^{-n}, \quad 0 < n < 1$$

where $\phi(0) = 0$. Show that a first-order uniformly valid expansion is

$$\begin{aligned} u &= \epsilon \phi(\eta)(x + \eta)^{-n} + O(\epsilon^2) \\ y &= \eta - \frac{\epsilon \phi(\eta)(x + \eta)^{1-n}}{1-n} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

3.32. Consider the problem

$$\begin{aligned} u_{tl} - c^2 u_{xx} &= \epsilon u_x u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x) + g(x), \quad u_t(x, 0) = c(g'(x) - f'(x)) \end{aligned}$$

where $f(x)$ and $g(x)$ are bounded functions of x .

(a) Determine a first-order straightforward expansion. Can you render it uniformly valid using the method of renormalization?

(b) Obtain a first-order expansion using the method of strained coordinates.

3.33. Consider the problem

$$\epsilon y' + y = 1, \quad y(1) = 1$$

(a) Show that Lighthill's technique fails to give a uniformly valid expansion.

(b) Show that straining y rather than x gives a uniformly valid expansion.

(c) Investigate whether straining y' would yield a uniformly valid expansion for

$$\begin{aligned} \epsilon y'' + y' + y &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta \end{aligned}$$

3.34. Consider the problem

$$\ddot{u} + u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

(a) Show that the method of strained coordinates (MSC) leads to

$$u = a \sin \phi + O(\epsilon), \quad \phi = s + c$$

where

$$\begin{aligned} t &= s + \epsilon t_1(s) + \cdots \\ at_1'' &= \alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \phi, a \cos \phi] \cos \phi d\phi \\ 2at_1' &= \beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \sin \phi, a \cos \phi] \sin \phi d\phi \end{aligned}$$

(b) Show that $\alpha = 0$ and β is a constant so that $t_1 = (1/2)\beta a^{-1}s + \text{a constant}$.

(c) Hence show that the MSC yields only the limit cycles or limit points for this problem (Nayfeh, 1966).

9.4 4 The Methods of Matched and Composite Asymptotic Expansions

The results of Section 3.5 show that the method of strained coordinates is not capable of yielding uniformly valid expansions in cases in which sharp changes in dependent variables take place in some regions of the domain of the independent variables. In these cases straightforward expansions generally break down in these regions, and near-identity transformations of the

independent variables (strained coordinates) cannot cope with such sharp changes. To obtain uniformly valid expansions, we must recognize and utilize the fact that the sharp changes are characterized by magnified scales which are different from the scale characterizing the behavior of the dependent variables outside the sharp-change regions.

One technique of dealing with this problem is to determine straightforward expansions (called outer expansions) using the original variables and to determine expansions (called inner expansions) describing the sharp changes using magnified scales. The outer expansions break down in the inner regions (sharp-change regions), while the inner expansions break down away from these regions. To relate these expansions a so-called matching procedure is used. This technique is called the method of inner and outer expansions or, after Bretherton (1962), the method of matched asymptotic expansions.

A second technique for determining a uniformly valid expansion is to assume that each dependent variable is the sum of (1) a part characterized by the original independent variable and (2) parts characterized by magnified independent variables, one for each sharp-change region. This is the method of composite expansions in its simplest form.

In the next section we describe the method of matched asymptotic expansions. For more references and applications, we refer the reader to Van Dyke (1964), Wasow (1965), Cole (1968), and O'Malley (1968b). Carrier (1970) reviewed the application of this technique in geophysics, and Germain (1967) reviewed its application in aerodynamics.

9.4.1 4.1. The Method of Matched Asymptotic Expansions

4.1.1. Introduction—prandtl's Technique

To describe the method of matched asymptotic expansions, we discuss the simple boundary value problem

$$\epsilon y'' + y' + y = 0 \quad (4.1.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (4.1.2)$$

introduced in Section 2.2.1. As $\epsilon \rightarrow 0$, (4.1.1) reduces to

$$y' + y = 0 \quad (4.1.3)$$

which is a first-order equation that cannot satisfy in general both of the boundary conditions (4.1.2). Hence one of these boundary conditions must be dropped. As shown in Section 4.1.2, the boundary condition $y(0) = \alpha$ must be dropped. This can also be seen from the exact solution (2.2.7).

As $\epsilon \rightarrow 0$ and for fixed $x \neq 0$

$$y \rightarrow \beta e^{1-x} \quad (4.1.4)$$

which is the solution of the reduced equation (4.1.3) subject to $y(1) = \beta$. The solution of the reduced equation is denoted by y° and it is called the outer solution. For small ϵ the solution of the reduced equation is close to the exact solution (2.2.7) except in a small interval at the end point $x = 0$ where the exact solution changes quickly in order to retrieve the boundary condition $y(0) = \alpha$ which is about to be lost. This small interval across which y changes very rapidly is called the boundary layer in fluid mechanics, the edge layer in solid mechanics, and the skin layer in electrodynamics.

To determine an expansion valid in the boundary layer, we magnify this layer using the stretching transformation

$$\zeta = \frac{x}{\epsilon} \quad (4.1.5)$$

Determination of appropriate stretching transformations is discussed later in this chapter. With this transformation (4.1.1) becomes

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} + \epsilon y = 0 \quad (4.1.6)$$

which for a fixed ζ , reduces to

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad (4.1.7)$$

as $\epsilon \rightarrow 0$. Its general solution is

$$y = A + Be^{-\zeta} \quad (4.1.8)$$

where A and B are constants. Since this solution is valid in the boundary layer, it is valid at the origin; hence it must satisfy the boundary condition $y(x=0) = \alpha$. Since $\zeta = 0$ corresponds to $x = 0$, $y(\zeta = 0) = \alpha$; hence $B = \alpha - A$ and (4.1.8) becomes

$$y = A + (\alpha - A)e^{-\zeta} \quad (4.1.9)$$

which has an arbitrary constant A . We denote this solution by y^i and call it the inner solution or inner expansion.

To determine A we note that

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \beta e \quad (4.1.10)$$

Moreover, from (4.1.5) any small fixed value x_0 corresponds to $\zeta \rightarrow \infty$ as $\epsilon \rightarrow 0$, and

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i = A \quad (4.1.11)$$

Thus these limits must represent the same value of y at a very small value of $x = x_0 \neq 0$, hence

$$A = \beta e \quad (4.1.12)$$

Therefore

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} \quad (4.1.13)$$

In determining the outer and inner expansions, we used two different limit processes—an outer limit defined by

$$y^o = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ fixed}}} y(x; \epsilon) \quad (4.1.14)$$

and an inner limit defined by

$$y^i = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ fixed}}} y(\epsilon \zeta; \epsilon) \quad (4.1.15)$$

The process of determining A is called matching, and we have used the matching principle

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o(x; \epsilon) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i(x; \epsilon) \quad (4.1.16)$$

which is equivalent to equating

$$\begin{aligned} &\text{The inner limit of (the outer solution) denoted by } (y^o)^i \text{ to} \\ &\text{the outer limit of (the inner solution) denoted by } (y^i)^o \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

An approximate solution to our original problem is given by (4.1.4) for x not near zero and by (4.1.13) near $x = 0$. To compute y as a function of all x , one must switch from one solution to the other as x increases at some small value of x such as the value where the solutions may intersect. This switching is not convenient, and we form from these solutions a single uniformly valid solution called the composite solution and denote it by y^c according to (Erdlyi, 1961)

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \quad (4.1.18)$$

Since

$$\left((y^o)^i\right)^o = (y^o)^i = (y^i)^o = \left((y^i)^o\right)^i$$

therefore

$$\begin{aligned} (y^c)^o &= y^o + (y^i)^o - (y^o)^i = y^o \\ (y^c)^i &= (y^o)^i + y^i - (y^i)^o = y^i \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Thus the composite solution is as good an approximation in the outer region as the outer solution, and it is as good an approximation in the inner region as the inner solution. This suggests that the composite solution is a uniform approximation over the whole interval of x including the gap between the outer and inner regions. The success of the matching may be due to the presence of an overlapping region in which both the outer and inner solutions are valid, hence there is no gap between the two regions.

Adding (4.1.4) and (4.1.13) and subtracting βe , which is equal to $(y^o)^i = (y^i)^o$ from (4.1.17), we have

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-x/\epsilon} + O(\epsilon) \quad (4.1.20)$$

The technique presented in this section was developed by Prandtl (1905) to solve the problem of high speed viscous flow past a body. The stream function representing the two-dimensional flow past a body is governed by a fourth-order partial differential equation. For a viscous fluid the components of fluid velocity normal and tangential to the body must vanish on the body. The latter condition is called the no-slip condition because any slight viscosity makes the fluid stick to the body. If the viscosity vanishes, the equation for the stream function reduces to an equation of third order (Section 2.2.2), hence it cannot satisfy all the boundary conditions. Since an inviscid fluid can slide, the no-slip condition is dropped, and the resulting solution represents the flow field everywhere except in a small region near the body called Prandtl's boundary layer across which the tangential velocity changes very rapidly from the value given by the reduced equation (vanishing viscosity) to zero in order to retrieve the no-slip condition which is about to be lost. To describe the flow in this region, Prandtl magnified it by introducing a stretching transformation and appraised the order of magnitude of the various terms in the original differential equation, rejecting those he judged to be small. The resulting simplified equation was then solved and its solution was matched with the solution of the inviscid problem by using the matching principle (4.1.16).

A similar matching procedure was used by Rayleigh (1912), Gans (1915), Jeffreys (1924), Wentzel (1926), Kramers (1926), and Brillouin (1926) to connect the approximate expansions on the different sides of a turning point (cf. Section 7.3.1).

Similar techniques were employed in the nineteenth century by (1) Laplace (1805) to solve the problems of a large nonwetting drop on a plane and a wide meniscus, (2) Maxwell (1866) to solve the torsional vibration of circular disks rotating between nearby fixed disks, and (3) Kirchhoff (1877) to solve the problem of a condenser consisting of two differentially charged finite circular disks.

4.1.2. Higher Approximations and Refined Matching Procedures

Prandtl's method has been extended and generalized over the years by many researchers including Weyl (1942), Friedrichs (1942), Dorodnicyn (1947), Latta (1951), Kaplun (1954, 1957, 1967), Kaplun and Lagerstrom (1957), Proudman and Pearson (1957), Viik and Lyusternik (1957), Vasil'eva (1959, 1963), and Van Dyke (1964). The matching procedures have been formalized by Vasil'eva (1959, 1963), Van Dyke (1964), and Kaplun and Lagerstrom (1967). Carrier (1953, 1954), using specific examples, compared the method of strained coordinates with the method of matched asymptotic expansions.

In this section we determine higher approximations to the problem given by (4.1.1) and (4.1.2). We start by determining the boundary condition that must be dropped and determine the stretching transformation as a byproduct. Then, we determine second-order inner and outer expansions and match them by using Van Dyke's principle. Finally, we form a uniformly valid composite expansion.

Which Boundary Condition Must be Dropped? As mentioned in the previous section, if ϵ vanishes, (4.1.1) reduces to the first-order equation (4.1.3) whose solution cannot satisfy both boundary conditions $y(0) = \alpha$ and $y(1) = \beta$ and, consequently, one of them must be dropped. At the end where the boundary condition is dropped, y changes very rapidly from the solution of the reduced equation to the boundary value dropped at that end in a very small region called the boundary layer or region of nonuniformity.

To determine if the boundary condition $y(1) = \beta$ must be dropped, we introduce the stretching transformation

$$\zeta = (1 - x)\epsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (4.1.21)$$

thereby transforming (4.1.1) into

$$\epsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} - \epsilon^{-\lambda} \frac{dy}{d\zeta} + y = 0 \quad (4.1.22)$$

As $\epsilon \rightarrow 0$, three limiting forms of (4.1.22) arise depending on the value of λ . The Case of $\lambda > 1$

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{or} \quad y^i = A + B\zeta \quad (4.1.23)$$

Since the reduced equation (4.1.3) is assumed to be valid at $x = 0$,

$$y^o = \alpha e^{-x} \quad (\text{outer solution}) \quad (4.1.24)$$

The matching principle (4.1.16) demands that

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} (A + B\zeta) = \lim_{x \rightarrow 1} \alpha e^{-x}$$

or

$$B = 0 \quad \text{and} \quad A = \alpha e^{-1} \quad (4.1.25)$$

Hence

$$y^i = \alpha e^{-1} \quad (4.1.26)$$

Since this solution is valid at $x = 1$, it should satisfy the boundary condition $y(x = 1) = \beta$, hence

$$\beta = \alpha e^{-1} \quad (4.1.27)$$

which is not true in general. Therefore we discard this case because it does not permit the satisfaction of both boundary conditions.

The Case of $\lambda < 1$

$$\frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad \text{or} \quad y^i = A = \beta \quad (4.1.28)$$

which must be discarded because the matching principle demands (4.1.27).

The Case of $\lambda = 1$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} - \frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad \text{or} \quad y^i = A + Be^\zeta \quad (4.1.29)$$

Since the matching principle demands that

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (A + Be^\zeta) &= \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha e^{-x}) \\ B &= 0 \quad \text{and} \quad A = \alpha e^{-1} \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

So that this case must be discarded also because the application of the boundary condition $y(x = 1) = \beta$ demands (4.1.27).

Therefore the boundary layer cannot exist at $x = 1$, hence the boundary condition $y(1) = \beta$ must not be dropped.

To investigate whether the boundary condition $y(0) = \alpha$ must be dropped, we introduce the stretching transformation

$$\zeta = x\epsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (4.1.31)$$

thereby transforming (4.1.1) into

$$\epsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2y}{d\zeta^2} + \epsilon^{-\lambda} \frac{dy}{d\zeta} + y = 0 \quad (4.1.32)$$

In this case also three different limiting forms of (4.1.32) arise as $\epsilon \rightarrow 0$ depending on the value of λ

The Case of $\lambda > 1$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{or} \quad y^i = A + B\zeta \quad (4.1.33)$$

The Case of $\lambda < 1$

$$\frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad \text{or} \quad y^i = A \quad (4.1.34)$$

The Case of $\lambda = 1$

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} = 0, \quad y^i = A + Be^{-\zeta} \quad (4.1.35)$$

The first two cases must be discarded using arguments similar to those employed above. This leaves the third case which, by utilizing $y(0) = \alpha$, leads to the inner solution

$$y^i = A + (\alpha - A)e^{-\zeta} \quad (4.1.36)$$

Since the matching principle demands then

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [A + (\alpha - A)e^{-\zeta}] = \lim_{x \rightarrow 0} (\beta e^{1-x}) \quad \text{or} \quad A = \beta e \quad (4.1.37)$$

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} \quad (4.1.38)$$

Therefore the boundary layer exists at the end $x = 0$, and the boundary condition $y(0) = \alpha$ cannot be imposed on the reduced equation (4.1.3). We have found as a by-product that the stretching transformation is

$$\zeta = x\epsilon^{-1} \quad (4.1.39)$$

as was chosen in (4.1.5), hence the region of nonuniformity is

$$x = O(\epsilon) \quad (4.1.40)$$

Outer Expansion. We seek an outer expansion for y in the form

$$y^o(x; \epsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^n y_n(x) + O(\epsilon^N) \quad (4.1.41)$$

using the outer limit process

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ keeping } x \text{ fixed} \quad (4.1.42)$$

Thus

$$y_0(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ fixed}}} y(x; \epsilon)$$

and

$$y_m(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ fixed}}} \frac{y - \sum_{n=0}^{m-1} \epsilon^n y_n(x)}{\epsilon^m} \quad (4.1.43)$$

To determine this expansion we substitute (4.1.41) into (4.1.1) and equate coefficients of like powers of ϵ to obtain

$$y_0' + y_0 = 0 \quad (4.1.44)$$

$$y_n' + y_n = -y_{n-1}'', \quad n \geq 1 \quad (4.1.45)$$

As mentioned in the previous section, this outer solution is valid everywhere except in the region $x = O(\epsilon)$, hence it must satisfy the boundary condition $y^o(1) = \beta$ which together with (4.1.41) yields

$$y_0(1) = \beta, \quad y_n(1) = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1 \quad (4.1.46)$$

The solution of (4.1.44) subject to $y_0(1) = \beta$ is

$$y_0 = \beta e^{1-x} \quad (4.1.47)$$

while the solution of (4.1.45) for $n = 1$ subject to $y_n(1) = 0$ is

$$y_1 = \beta(1-x)e^{1-x} \quad (4.1.48)$$

Therefore

$$y^o = \beta[1 + \epsilon(1-x)]e^{1-x} + O(\epsilon^2) \quad (4.1.49)$$

Inner Expansion. To determine an expansion valid near the origin, we use the stretching transformation (4.1.39) to transform (4.1.1) into

$$\frac{d^2 y^i}{d\zeta^2} + \frac{dy^i}{d\zeta} + \epsilon y^i = 0 \quad (4.1.50)$$

and then seek an inner expansion of y in the form

$$y^i(x; \epsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^n Y_n(\zeta) + O(\epsilon^N) \quad (4.1.51)$$

using the inner limit process

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ keeping } \zeta = x\epsilon^{-1} \text{ fixed} \quad (4.1.52)$$

Thus

$$\begin{aligned} Y_0(\zeta) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ fixed}}} y(\epsilon\zeta; \epsilon) \\ Y_m(\zeta) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ fixed}}} \frac{y(\epsilon\zeta; \epsilon) - \sum_{n=0}^{m-1} \epsilon^n Y_n(\zeta)}{\epsilon^m} \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

To determine this expansion we substitute (4.1.51) into (4.1.50), equate coefficients of like powers of ϵ , keeping in mind that ζ is the independent variable, and obtain

$$Y_0'' + Y_0' = 0 \quad (4.1.54)$$

$$Y_n'' + Y_n' = -Y_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4.1.55)$$

While this inner expansion satisfies the boundary condition at $x = 0$, it is not expected to satisfy in general the boundary condition at $x = 1$. Since $x = 0$ corresponds to $\zeta = 0$, the boundary condition $y(x = 0) = \alpha$ together with (4.1.51) gives

$$Y_0(0) = \alpha, \quad Y_n(0) = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1 \quad (4.1.56)$$

The solution of (4.1.54) subject to $Y_0(0) = \alpha$ is

$$Y_0 = \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) \quad (4.1.57)$$

While the solution of (4.1.55) and (4.1.56) for $n = 1$ is

$$Y_1 = A_1 (1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0 (1 + e^{-\zeta})] \zeta \quad (4.1.58)$$

Therefore

$$y^i = \alpha - A_0 (1 - e^{-\zeta}) + \epsilon \{ A_1 (1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0 (1 + e^{-\zeta})] \zeta \} + O(\epsilon^2) \quad (4.1.59)$$

This inner expansion contains the arbitrary constants A_0 and A_1 which must be determined from its matching with the outer expansion (4.1.49).

Refined Matching Procedures. The simplest possible form of matching the inner and outer expansions is that of Prandtl where

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i \quad (4.1.60)$$

This condition leads to the matching of the first terms in both the inner and the outer expansions, thereby giving

$$A_0 = \alpha - \beta e \quad (4.1.61)$$

It can be easily seen that this matching principle cannot be used to match other than these first terms. In fact

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \beta e(1 + \epsilon) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.62a)$$

while

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i = \alpha - A_0 + \epsilon [A_1 - (\alpha - A_0) \zeta] + O(\epsilon^2) \quad (4.1.62b)$$

Since these last two expansions have to be equal according to the matching principle (4.1.60) for all values of ζ

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = \beta e \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \quad (4.1.63)$$

which violates the assumption that $A_1 = O(1)$ which we used in deriving (4.1.59).

A more general form of the matching condition is

The inner limit of (the outer limit) equals the outer limit of (the inner limit)

A still more general form of the matching condition is

The inner expansion of (the outer expansion) equals the outer expansion of (the inner expansion)

where these expansions are formed using the outer and the inner limit processes defined by (4.1.41) through (4.1.43) and (4.1.51) through (4.1.53), respectively. Van Dyke (1964) proposed the following matching principle

The m -term inner expansion of (the n -term outer expansion) equals the n -term outer expansion of (the m -term inner expansion)

where m and n may be taken to be any two integers which may be equal or unequal. To determine the m -term inner expansion of (the n -term outer expansion), we rewrite the first n terms of the outer expansion in terms of the inner variable, expand it for small ϵ keeping the inner variable fixed, and truncate the resulting

expansion after m terms; and conversely for the right-hand side of (4.1.66). Because of its simplicity, Van Dyke's matching principle is widely used. A more general and rigorous matching condition is due to Kaplun (1967) who used intermediate limits. In three articles, Fraenkel (1969) compared these two matching conditions; he concluded that, although Van Dyke's matching condition may be incorrect, it is easier to use than the overlapping principle of Kaplun.

Van Dyke's Matching Principle. To show the application of Van Dyke's matching principles we use it to match the outer expansion (4.1.49) with the inner expansion (4.1.59), taking $m = n = 1$; $m = 1, n = 2$; and $m = n = 2$.

To match the one-term outer expansion with the one-term inner expansion, we proceed systematically as follows

One-term outer expansion: $y \sim \beta e^{1-x}$

Rewritten in inner variable: $= \beta e^{1-\epsilon\zeta}$

Expanded for small ϵ : $= \beta e(1 - \epsilon\zeta + \dots)$

One-term inner expansion: $= \beta e$

One-term inner expansion: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-5})$

Rewritten in outer variable: $= \alpha - A_0(1 - e^{-x/\epsilon})$

Expanded for small ϵ : $= \alpha - A_0$

One-term outer expansion: $= \alpha - A_0$

By equating (4.1.67d) and (4.1.68d) according to the matching principle (4.1.66), we obtain

$$\beta e = \alpha - A_0 \quad \text{or} \quad A_0 = \alpha - \beta e \quad (4.1.69)$$

Now we match the one-term outer expansion with the two-term inner expansion. Taking $m = 2$ and $n = 1$, we have

One-term outer expansion: $y \sim \beta e^{1-x}$

Rewritten in inner variable: $= \beta e^{1-\epsilon\zeta}$

Expanded for small ϵ : $= \beta e(1 - \epsilon\zeta + \frac{1}{2}\epsilon^2\zeta^2 + \dots)$

Two-term inner expansion: $= \beta e(1 - \epsilon\zeta)$

Two-term inner expansion: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \epsilon \{A_1(1 - e^{-\zeta})$

$$- [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})] \zeta \} \quad (4.1.71a)$$

Rewritten in outer variable: $= \alpha - A_0(1 - e^{-x/\epsilon}) + \epsilon \{A_1(1 - e^{-x/\epsilon})$

$$- [\alpha - A_0(1 + e^{-x/\epsilon})] \frac{x}{\epsilon} \} \quad (4.1.71b)$$

Expanded for small ϵ : $= (\alpha - A_0)(1 - x) + \epsilon A_1$

One-term outer expansion: $= (\alpha - A_0)(1 - x)$

Equating (4.1.70d) and (4.1.71d) according to the matching principle (4.1.66) gives

$$\beta e(1 - \epsilon\zeta) = (\alpha - A_0)(1 - x) \quad (4.1.72a)$$

Since $x = \epsilon\zeta$

$$\alpha - A_0 = \beta e \quad \text{or} \quad A_0 = \alpha - \beta e \quad (4.1.72b)$$

and no information was obtained about A_1 .

Taking $m = n = 2$ in (4.1.66), we obtain

Two-term outer expansion: $y \sim \beta[1 + \epsilon(1 - x)]e^{1-x}$

Rewritten in inner variable: $= \beta[1 + \epsilon(1 - \epsilon\zeta)]e^{1-\epsilon\zeta}$

Expanded for small ϵ : $= \beta e(1 + \epsilon - \epsilon\zeta + \dots)$

Two-term inner expansion: $= \beta e(1 + \epsilon - \epsilon \zeta)$

Two-term inner expansion: $y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \epsilon \{A_1(1 - e^{-\zeta})$

$$- [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})] \zeta \} \quad (4.1.74a)$$

Rewritten in outer variable: $= \alpha - A_0(1 - e^{-x/\epsilon}) + \epsilon \{A_1(1 - e^{-x/\epsilon})$

$$- [\alpha - A_0(1 + e^{-x/\epsilon})] \frac{x}{\epsilon} \} \quad (4.1.74b)$$

Expanded for small ϵ : $= (\alpha - A_0)(1 - x) + \epsilon A_1$

Two-term outer expansion: $= (\alpha - A_0)(1 - x) + \epsilon A_1$

Equating (4.1.73d) and (4.1.74d) according to the matching principle (4.1.66), we obtain

$$A_0 = \alpha - \beta e, \quad A_1 = \beta e \quad (4.1.75)$$

Therefore

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} + \epsilon \{ \beta e(1 - e^{-\zeta}) - [\beta e - (\alpha - \beta e)e^{-\zeta}] \zeta \} + O(\epsilon^2) \quad (4.1.76)$$

Composite Expansion. As discussed previously, the outer expansion is not valid near the origin, while the inner expansion is not valid in general away from the region $x = O(\epsilon)$. To determine an expansion valid over the whole interval, we form a composite expansion y^c according to (Vasil'eva, 1959; Erdlyi, 1961)

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \quad (4.1.77)$$

These two forms are equivalent since the matching principle (4.1.66) requires that

$$(y^o)^i = (y^i)^o \quad (4.1.78)$$

Since

$$(y^i)^i = y^i, \quad (y^o)^o = y^o \quad (4.1.79)$$

(4.1.77) implies that

$$(y^c)^o = y^o \quad \text{and} \quad (y^c)^i = y^i \quad (4.1.80)$$

Therefore y^c is as good an approximation to y in the outer region as y^o , and it is also as good an approximation to y in the inner region as y^i .

Since $(y^o)^i$ is given by either (4.1.73d) or (4.1.74d), a composite expansion can be formed by adding the outer expansion (4.1.49) and the inner expansion (4.1.76) and subtracting the inner expansion of the outer expansion (4.1.73d). This results in

$$y^c = \beta[1 + \epsilon(1 - x)]e^{1-x} + [(\alpha - \beta e)(1 + x) - \epsilon\beta e]e^{-x/\epsilon} + O(\epsilon^2) \quad (4.1.81)$$

4.1.3. A Second-order Equation with Variable Coefficients

We determine in this section a first-order uniformly valid expansion for the solution of

$$\epsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (4.1.82)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (4.1.83)$$

where $\epsilon \ll 1$, and $a(x)$ and $b(x)$ are analytic functions of x in the interval $[0,1]$. Equation (4.1.1), discussed in the previous two sections, can be obtained from (4.1.82) by setting $a(x) = b(x) \equiv 1$. If ϵ vanishes, (4.1.82) reduces to the first-order equation

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (4.1.84)$$

whose solution cannot satisfy both boundary conditions, and one of them must be dropped as a consequence. As shown below, the boundary condition that must be dropped depends on the sign of $a(x)$ in the interval $[0, 1]$. If $a(x) > 0$, $y(0) = \alpha$ must be dropped, and an inner expansion near $x = 0$ must be developed and matched with the outer solution. If $a(x) < 0$, $y(1) = \beta$ must be dropped, and an inner expansion near $x = 1$ must be obtained and matched with the outer expansion. However, if $a(x)$ changes sign in $[0, 1]$, y may change from oscillatory to exponentially growing or decaying across the zeros of $a(x)$. Such zeros are called turning or transition points, and turning point problems are treated in Section 7.3.

Which Boundary Condition Must be Dropped?. To investigate whether $y(0) = \alpha$ must be dropped (i.e., the boundary layer is at the origin), we introduce the stretching transformation

$$\zeta = x\epsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (4.1.85)$$

to transform (4.1.82) into

$$\epsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \epsilon^{-\lambda} a(\epsilon^\lambda \zeta) \frac{dy}{d\zeta} + b(\epsilon^\lambda \zeta) y = 0 \quad (4.1.86)$$

As $\epsilon \rightarrow 0$, (4.1.86) tends to

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} &= 0 \text{ if } \lambda > 1 \\ \frac{dy}{d\zeta} &= 0 \text{ if } \lambda < 1 \\ \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + a(0) \frac{dy}{d\zeta} &= 0 \text{ if } \lambda = 1 \end{aligned} \quad (4.1.87)$$

In order to be able to match the solutions of (4.1.87) with the outer solution as given by the reduced equation (4.1.84), we need the bounded solutions of (4.1.87) as $\zeta \rightarrow \infty$. The bounded solutions of the first two cases are constants, hence they must be discarded because they lead to certain inconsistencies similar to those encountered in Section 4.1.2. Similarly, if $a(0) < 0$, the bounded solution of the last case (i.e., $\lambda = 1$) is a constant and must also be discarded; as a consequence, the boundary layer cannot exist at $x = 0$. If $a(0) > 0$, the general solution for $\lambda = 1$ is

$$y^i = A + Be^{-a(0)\zeta} \quad (4.1.88)$$

which is bounded as $\zeta \rightarrow \infty$ and contains two arbitrary constants; hence it is acceptable as an inner expansion because together with the solution of the reduced equation it can satisfy both boundary conditions.

To investigate whether $y(1) = \beta$ must be dropped, we introduce the stretching transformation

$$\eta = (1-x)\epsilon^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (4.1.89)$$

to transform (4.1.82) into

$$\epsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y}{d\eta^2} - \epsilon^{-\lambda} a(1 - \epsilon^\lambda \eta) \frac{dy}{d\eta} + b(1 - \epsilon^\lambda \eta) y = 0 \quad (4.1.90)$$

As $\epsilon \rightarrow 0$, this equation tends to

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\eta^2} &= 0 \text{ if } \lambda > 1 \\ \frac{dy}{d\eta} &= 0 \text{ if } \lambda < 1 \\ \frac{d^2 y}{d\eta^2} - a(1)\frac{dy}{d\eta} &= 0 \text{ if } \lambda = 1 \end{aligned} \quad (4.1.91)$$

The bounded solutions of (4.1.91) as $\eta \rightarrow \infty$ are constants if $\lambda \neq 1$ or $a(1) > 0$ when $\lambda = 1$, hence they must be discarded. However, if $a(1) < 0$ when $\lambda = 1$, the general solution of (4.1.91) is

$$y^i = A + Be^{a(1)\eta} \quad (4.1.92)$$

which is bounded as $\eta \rightarrow \infty$; hence it is acceptable as an inner expansion because it contains two arbitrary constants which allow, when combined with the outer solution, the satisfaction of both boundary conditions.

In summary, the boundary layer exists at

$$x = 0 \quad \text{if} \quad a(x) > 0$$

and at

$$x = 1 \text{ if } a(x) < 0 \quad (4.1.93)$$

Next we determine a first-order uniformly valid expansion for the former case.

The Case of $a(x) > 0$. In this case the first term of the outer expansion (4.1.41) is governed by

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(1) = \beta \quad (4.1.94)$$

which yields

$$y^o = \beta \exp \left[- \int_1^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] \quad (4.1.95)$$

The general solution for the first term of the inner expansion (4.1.51) is given by (4.1.88). Under the transformation (4.1.85) the boundary condition $y(x = 0) = \alpha$ is transformed into $y(\zeta = 0) = \alpha$, hence

$$y^i = \alpha - B + Be^{-a(0)\zeta} \quad (4.1.96)$$

To match y^o and y^i , we take $m = n = 1$ in (4.1.66) and proceed as follows
One-term inner expansion of (one-term outer expansion)

$$= \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] \quad (4.1.97)$$

One-term outer expansion of (one-term inner expansion) $= \alpha - B$

By equating (4.1.97) and (4.1.98) according to the matching principle (4.1.66), we have

$$B = \alpha - \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] \quad (4.1.99)$$

Forming a composite expansion by adding (4.1.95) and (4.1.96) and subtracting (4.1.98), we obtain

$$y^c = \beta \exp \left[- \int_1^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] + \left\{ \alpha - \beta \exp \left[- \int_1^0 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right] \right\} \times \exp \left[- \frac{a(0)x}{\epsilon} \right] + O(\epsilon) \quad (4.1.100)$$

Letting $a(x) = b(x) = 1$, we have

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e) e^{-x/\epsilon} + O(\epsilon) \quad (4.1.101)$$

in agreement with (4.1.20). Taking $a(x) = 2x + 1$ and $b(x) = 2$, we obtain

$$y^c = \frac{3\beta}{1+2x} + (\alpha - 3\beta) e^{-x/\epsilon} + O(\epsilon) \quad (4.1.102)$$

4.1.4. Reynolds' Equation for a Slider Bearing

The pressure distribution in an isothermal, compressible film in an

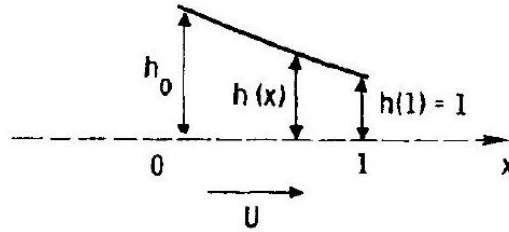


Figure 4-1

infinitely long slider bearing (see Figure 4-1) is given by the Reynolds equation, written in dimensionless quantities

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 p \frac{dp}{dx} \right) = \Lambda \frac{d}{dx} (ph) \quad (4.1.103)$$

Here the distance x , the film thickness h , and the pressure p have been made dimensionless with respect to the length L of the bearing in the flow direction, the film thickness T at the trailing edge, and the ambient pressure p_a , respectively. The bearing number Λ is given by $6\mu LU/p_a T^2$, where μ is the fluid viscosity and U is the velocity of the lower surface. The boundary conditions are

$$p = 1 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = 1 \quad (4.1.104)$$

Following Di Prima (1969) we seek an asymptotic solution to this problem for large Λ using the method of matched asymptotic expansions.

We seek an outer expansion of the form

$$p^o = p_0(x) + \Lambda^{-1} p_1(x) + \cdots \quad (4.1.105)$$

Substituting this expansion into (4.1.103) and equating coefficients of like powers of Λ^{-1} , we obtain

$$\frac{d}{dx} (hp_0) = 0 \quad (4.1.106)$$

$$\frac{d}{dx} (hp_1) = \frac{d}{dx} \left(h^3 p_0 \frac{dp_0}{dx} \right) \quad (4.1.107)$$

Since these equations are of first order, one of the boundary conditions must be dropped, and the outer expansion is not valid near that boundary. Since h and Λ are positive, arguments similar to those used in Sections 4.1.2 and 4.1.3 show that the boundary condition at $x = 1$ must be dropped. Hence $p^o(0) = 1$, which together with (4.1.105) gives

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0 \quad (4.1.108)$$

Consequently, the solution for p_0 is

$$p_0 = \frac{h_0}{h(x)} \quad (4.1.109)$$

Hence the solution for p_1 is

$$p_1 = \frac{h_0^2 [h'(0) - h'(x)]}{h(x)} \quad (4.1.110)$$

This outer expansion needs to be supplemented by an inner expansion (boundary-layer solution) near $x = 1$. Introducing the stretching transformation

$$\zeta = (1 - x)\Lambda^\sigma, \quad \sigma > 0 \quad (4.1.111)$$

we transform (4.1.103) into

$$\Lambda^{\sigma-1} \frac{d}{d\zeta} \left[h^3 (1 - \zeta\Lambda^{-\sigma}) p \frac{dp}{d\zeta} \right] = -\frac{d}{d\zeta} [h (1 - \zeta\Lambda^{-\sigma}) p] \quad (4.1.112)$$

As $\Lambda \rightarrow \infty$ this equation reduces to

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left(p \frac{dp}{d\zeta} \right) &= 0 & \text{if } \sigma > 1 \\ \frac{dp}{d\zeta} &= 0 & \text{if } \sigma < 1 \\ \frac{d}{d\zeta} \left(p \frac{dp}{d\zeta} \right) &= -\frac{dp}{d\zeta} & \text{if } \sigma = 1 \end{aligned} \quad (4.1.113)$$

The first two cases must be discarded because the solution of the second is a constant while the solution of the first is a constant as $\zeta \rightarrow \infty$, hence in neither case can we satisfy the boundary conditions. In the third case a first integral is

$$p \frac{dp}{d\zeta} + p = A \quad (4.1.114)$$

where A is a constant. The solution of (4.1.114) is

$$-\zeta = p + A \ln(p - A) + B \quad (4.1.115)$$

where B is another constant. This solution thus represents the first term P_0 in the inner expansion

$$p^i = P_0(\zeta) + \Lambda^{-1} P_1(\zeta) + \dots \quad (4.1.116)$$

hence it must satisfy the boundary condition $p(x = 1) = 1$ or $p^i(\zeta = 0) = 1$. This together with (4.1.116) leads to

$$P_0(0) = 1 \quad (4.1.117)$$

which, when substituted into (4.1.115), yields

$$B = -1 - A \ln(1 - A) \quad (4.1.118)$$

Hence P_0 is given implicitly by

$$-\zeta = P_0 - 1 + A \ln \frac{A - P_0}{A - 1} \quad (4.1.119)$$

To determine A we take $m = n = 1$ in the matching principle (4.1.66) and proceed as follows
One-term inner expansion of (one-term outer expansion) $= h_0$

$$\text{One-term outer expansion of (one-term inner expansion)} = A \quad (4.1.120)$$

Equation (4.1.121) was obtained by expanding (4.1.119) for large ζ as a result of the implicit functional dependence of P_0 on ζ . Equating (4.1.120) and (4.1.121) according to the matching principle, we have

$$A = h_0 \quad (4.1.122a)$$

hence

$$-\zeta = P_0 - 1 + h_0 \ln \frac{h_0 - P_0}{h_0 - 1} \quad (4.1.122b)$$

A first-order uniformly valid composite expansion is then formed according to

$$\begin{aligned} y^0 &= y^0 + y^i - (y^0)^i \\ &= \frac{h_0}{h(x)} + P_0(\zeta) - h_0 + O(\Lambda^{-1}) \end{aligned} \quad (4.1.123)$$

where P_0 is given by (4.1.122b).

4.1.5. Unsymmetrical Bending of Prestressed Annular Plates

We next consider the problem of unsymmetrical bending of prestressed annular plates introduced by Alzheimer and Davis (1968) and discussed in Section 2.2.4. The problem was reduced to a boundary value problem consisting of the fourth-order ordinary differential equation (2.2.28) and the boundary conditions (2.2.29) and (2.2.30). As $\epsilon \rightarrow 0$, (2.2.28) reduces from a fourth-order equation to the second-order equation (2.2.31) which can satisfy in general only two of the four boundary conditions. Consequently, its solution is not valid near one or both boundaries where boundary-layer solutions must be introduced.

Using arguments similar to those used in Sections 4.1.2 and 4.1.3, we conclude that boundary layers exist at both ends; that is, at $r = b$ and $r = 1$. The boundary layer at $r = b$ is characterized by the stretching transformation

$$\zeta = (r - b)\epsilon^{-1} \quad (4.1.124)$$

so that u is governed near $r = b$ by

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{\epsilon}{b + \epsilon\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{\epsilon^2}{(b + \epsilon\zeta)^2} \right]^2 u - \left[\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{\epsilon}{b + \epsilon\zeta} \frac{du}{d\zeta} - \frac{u\epsilon^2}{(b + \epsilon\zeta)^2} \right] = 0 \quad (4.1.125)$$

However, the boundary layer at $r = 1$ is characterized by the stretching transformation

$$\eta = (1 - r)\epsilon^{-1} \quad (4.1.126)$$

hence there u is governed by

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon\eta)^2} \right]^2 u - \left[\frac{d^2 u}{d\eta^2} - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon\eta} \frac{du}{d\eta} - \frac{u\epsilon^2}{(1 - \epsilon\eta)^2} \right] = 0 \quad (4.1.127)$$

Outer Expansion. We seek an expansion, under the outer limit process $\epsilon \rightarrow 0$ with r fixed, of the form

$$u^o = \sum_{n=0}^{N=1} \epsilon^n u_n(r) + O(\epsilon^N) \quad (4.1.128)$$

Substituting this expansion into (2.2.28) and equating coefficients of like powers of ϵ , we have

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{u_n}{r^2} = 0 \quad \text{for each } n \quad (4.1.129)$$

Hence

$$u_n = \frac{A_n}{r} + B_n r \quad (4.1.130)$$

where A_n and B_n are constants. Since the boundary layer exists at both ends, we cannot use the boundary conditions to determine these constants; they are determined from matching the outer solution with the boundary-layer solutions.

Inner Expansion Near $r = b$. In this case we seek an inner expansion, under the inner limit process $\epsilon \rightarrow 0$ with $\zeta = (r - b)\epsilon^{-1}$ fixed, of the form

$$u^i = U_0(\zeta) + \epsilon U_1(\zeta) + \dots \quad (4.1.131)$$

Substituting this expansion into (4.1.125) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - 1 \right) \frac{d^2 U_0}{d\zeta^2} = 0 \quad (4.1.132)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - 1 \right) \frac{d^2 U_1}{d\zeta^2} = \frac{1}{b} \left(1 - 2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \frac{dU_0}{d\zeta} \quad (4.1.133)$$

This expansion must satisfy the boundary conditions (2.2.29); that is

$$u^i(\zeta = 0) = b\alpha, \quad \frac{du^i}{d\zeta}(\zeta = 0) = \epsilon\alpha \quad (4.1.134)$$

This together with (4.1.131) leads to

$$\begin{aligned} U_0(0) &= b\alpha, & U_0'(0) &= 0 \\ U_1(0) &= 0, & U_1'(0) &= \alpha \end{aligned} \quad (4.1.135b)$$

The general solution of (4.1.132) is

$$U_0 = a_0 + b_0\zeta + c_0e^{-\zeta} + d_0e^{\zeta} \quad (4.1.136)$$

The constant d_0 must be zero; otherwise U_0 would grow exponentially with ζ and it could not be matched with the outer expansion. The boundary conditions (4.1.135a) demand that

$$b_0 = c_0, \quad a_0 + c_0 = b\alpha$$

so that U_0 can be written as

$$U_0 = b\alpha + c_0(e^{-\zeta} + \zeta - 1) \quad (4.1.137)$$

where c_0 is a constant to be determined from matching. To do this, we take $m = n = 1$ in the matching principle (4.1.66) and obtain

$$\frac{A_0}{b} + B_0b = \begin{cases} \frac{c_0(r-b)}{\epsilon} & \text{if } c_0 \neq 0 \\ b\alpha & \text{if } c_0 = 0 \end{cases} \quad (4.1.138)$$

Hence

$$c_0 = 0 \quad \text{and} \quad \frac{A_0}{b} + B_0b = b\alpha \quad (4.1.139)$$

To determine A_0 and B_0 , we need another relationship between them which can be provided only from matching the outer expansion with the inner expansion at $r = 1$.

We could have proceeded in this example to higher order and then performed the matching. This would have been at the expense of algebraic inconvenience arising from the terms proportional to c_0 . In general, one cannot determine an outer expansion and an inner expansion to any order and then match them to determine the arbitrary constants. For example, one must proceed term by term in the problem of high Reynolds number flow past a body (e.g., Van Dyke, 1964).

With $U_0 = b\alpha$, the solution of (4.1.133) that does not grow exponentially with ζ and satisfies the boundary condition (4.1.135b) is

$$U_1 = c_1(e^{-\zeta} + \zeta - 1) + \alpha\zeta \quad (4.1.140)$$

To determine c_1 we match the two-term inner expansion with the two-term outer expansion as follows

Two-term inner expansion of (two-term outer expansion)

$$= \frac{A_0}{b} + B_0b + \epsilon \left[\frac{A_1}{b} + B_1b + \left(B_0 - \frac{A_0}{b^2} \right) \zeta \right] \quad (4.1.141)$$

Two-term outer expansion of (two-term inner expansion)

$$= b\alpha + (c_1 + \alpha)(r - b) - \epsilon c_1 \quad (4.1.142)$$

Equating (4.1.141) and (4.1.142) according to the matching principle, we have

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{b} + B_0b + \epsilon \left[\frac{A_1}{b} + B_1b + \left(B_0 - \frac{A_0}{b^2} \right) \zeta \right] \\ = b\alpha + (c_1 + \alpha)(r - b) - \epsilon c_1 \end{aligned} \quad (4.1.143)$$

Since $\zeta = (r - b)\epsilon^{-1}$

$$\frac{A_1}{b} + B_1b = -c_1, \quad B_0 - \frac{A_0}{b^2} = c_1 + \alpha \quad (4.1.144)$$

These provide two equations for A_1, B_1 , and c_1 ; the third relationship is obtained from matching the outer expansion with the inner expansion at $r = 1$.

Inner Expansion Near $r = 1$. Near $r = 1$, we seek an inner expansion u^I , under the inner limit process $\epsilon \rightarrow 0$ with $\eta = (1 - r)\epsilon^{-1}$ fixed, of the form

$$u^r = \tilde{U}_0(\eta) + \epsilon \tilde{U}_1(\eta) + \dots \quad (4.1.145)$$

Substituting this expansion into (4.1.127) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1 \right) \frac{d^2 \tilde{U}_0}{d\eta^2} = 0 \quad (4.1.146)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1 \right) \frac{d^2 \tilde{U}_1}{d\eta^2} = \left(2 \frac{d^2}{d\eta^2} - 1 \right) \frac{d \tilde{U}_0}{d\eta} \quad (4.1.147)$$

Since $r = 1$ corresponds to $\eta = 0$, u^I must satisfy the boundary conditions (2.2.30); that is

$$u^I = \frac{du^I}{d\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (4.1.148)$$

which, when combined with (4.1.145), gives

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(0) = 0, \quad \tilde{U}_0'(0) = 0 \\ \tilde{U}_1(0) = 0, \quad \tilde{U}_1'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.150)$$

The solution of (4.1.146) and (4.1.149) which does not grow exponentially with η is

$$\tilde{U}_0 = \tilde{c}_0 (e^{-\eta} + \eta - 1) \quad (4.1.151)$$

To determine $\tilde{c}_0$ we match the one-term outer expansion with the one-term inner expansion according to

$$A_0 + B_0 = \tilde{c}_0 \frac{1 - r}{\epsilon} \quad (4.1.152)$$

Hence

$$\tilde{c}_0 = 0 \text{ and } A_0 + B_0 = 0 \quad (4.1.153)$$

and

$$\tilde{U}_0 = 0 \quad (4.1.154)$$

Solving (4.1.139) and (4.1.153) for A_0 and B_0 , we obtain

$$A_0 = -B_0 = \frac{b^2\alpha}{1-b^2} \quad (4.1.155)$$

Hence

$$u_0 = \frac{b^2\alpha}{1-b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \quad (4.1.156)$$

Since $\tilde{U}_0 = 0$, the solution of (4.1.147) and (4.1.150) that does not grow exponentially with η is

$$\tilde{U}_1 = \tilde{c}_1 (e^{-\eta} + \eta - 1) \quad (4.1.157)$$

To determine $\tilde{c}_1$ we match the two-term outer expansion with the two-term inner expansion as follows

Two-term inner expansion of (two-term outer expansion)

$$= 0 + \epsilon (2A_0\eta + A_1 + B_1) \quad (4.1.158)$$

Two-term outer expansion of (two-term inner expansion)

$$= \tilde{c}_1(1-r) - \epsilon\tilde{c}_1 \quad (4.1.159)$$

Equating (4.1.158) and (4.1.159) according to the matching principle, we have

$$\tilde{c}_1 = 2A_0 = \frac{2b^2\alpha}{1-b^2}, \quad A_1 + B_1 = -\tilde{c}_1 = -\frac{2b^2\alpha}{1-b^2} \quad (4.1.160)$$

With A_0 and B_0 given by (4.1.155), (4.1.144) gives

$$c_1 = -\frac{2\alpha}{1-b^2} \quad (4.1.161)$$

while (4.1.144) and (4.1.160) give

$$A_1 = \frac{2\alpha b(1+b^3)}{(1-b^2)^2}, \quad B_1 = -\frac{2\alpha b(1+b)}{(1-b^2)^2} \quad (4.1.162)$$

This completes the determination of the constants of integration in all of the second-order expansions.

Composite Expansion. Let us first summarize the results of the previous three sections

$$\begin{aligned} u^o &= \frac{b^2\alpha}{1-b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) + \epsilon \frac{2\alpha b}{(1-b^2)^2} \\ &\quad \times \left[\frac{1+b^3}{r} - (1+b)r \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.163)$$

$$u^i = b\alpha - \epsilon \frac{2\alpha}{1-b^2} \left(e^{-\zeta} + \frac{1+b^2}{2}\zeta - 1 \right) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.164)$$

$$u^I = \epsilon \frac{2b^2\alpha}{1-b^2} (e^{-\eta} + \eta - 1) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.165)$$

$$(u^o)^i = b\alpha - \frac{2\alpha}{1-b^2} \epsilon \left(\frac{1+b^2}{2}\zeta - 1 \right) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.166)$$

$$(u^o)^I = \frac{2b^2\alpha}{1-b^2} \epsilon (\eta - 1) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.167)$$

A uniformly valid composite expansion in the interval $[b, 1]$ is now formed according to

$$\begin{aligned} u^c &= u^o + u^i + u^I - (u^o)^i - (u^o)^I \\ &= \frac{b^2 \alpha}{1 - b^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{2\epsilon \alpha b^2}{(1 - b^2)^2} \left[\frac{1 + b^3}{r} - (1 + b)r \right] \\ &\quad - \frac{2\epsilon \alpha}{1 - b^2} e^{-\zeta} + \frac{2\epsilon b^2 \alpha}{1 - b^2} e^{-\eta} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.168)$$

4.1.6. Thermoelastic Surface Waves

The problem of thermoelastic surface waves was reduced in Section 2.4.3 to the solution of the algebraic equation (2.4.35) for the square of the wave speed $x = c^2$. The straightforward expansion of the solution of this equation for small ϵ can be written as (Section 2.4.3)

$$x = x_R \left\{ 1 - \epsilon \frac{\tau x_R (1 - \frac{1-x_R}{F})}{(1 - \tau x_R) [1 + G'(x_R)]} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (4.1.169)$$

for small τ , and

$$x = \frac{1}{\tau} \left\{ 1 - \frac{\epsilon \tau}{\tau - 1} - \frac{\epsilon^2 \tau}{\tau - 1} \left[\frac{-\tau^2}{(\tau - 1)^2} + M^2 \right] \right\} + O(\epsilon^3) \quad (4.1.170)$$

for large τ , where $F(c_R^2)$ and $M(c_R^2)$ are given, respectively, by (2.4.39) and (2.4.42), and

$$x_R = c_R^2 \approx 0.2817 \quad (\text{square of Rayleigh wave speed})$$

The Rayleigh wave speed is the solution of

$$G(c_R^2) = 1 - c_R^2 \quad (4.1.171)$$

It is clear that the expansion (4.1.169) breaks down as $\tau \uparrow 1/x_R$. In fact, $x \rightarrow \infty$ as $\tau \rightarrow 1/x_R$. The second term in (4.1.170) indicates that this expansion breaks down as $\tau \downarrow 1$. However, the third term shows that this expansion breaks down well before $\tau = 1$. Since $G(x_R) = 1 - x_R$ from (4.1.171), the coefficient of M^2 in (2.4.42) vanishes at $\tau = 1/x_R \approx 3.550$, hence both M and $x \rightarrow \infty$ as $\tau \downarrow 1/x_R$. Therefore both of the above expansions break down at or near $\tau_R = 1/x_R$.

In order to determine an expansion valid uniformly for all τ , we consider the above two expansions as outer expansions and supplement them by an inner expansion near $\tau = \tau_R$. In all the examples thus far considered, we needed only to stretch the independent variable. However, in this case we find that it is necessary to stretch both the independent variable τ as well as the dependent variable x . Thus we introduce the transformation

$$T = \frac{\tau - \tau_R}{\tau_R} \epsilon^{-n}, \quad X = \frac{x_R - x}{x_R} \epsilon^{-m} \quad 0 < m, n < 1 \quad (4.1.172)$$

Before changing the variables in (2.4.35), we note that

$$\begin{aligned} &[1 - x\tau(1 + \epsilon) + A]^2 \\ &= (1 - x\tau + A)^2 - 2x\tau\epsilon(1 - x\tau + A) + O(\epsilon^2) \\ &= (1 - x\tau)^2 + 2A(1 - x\tau) + A^2 - 2\epsilon x\tau(1 - x\tau + A) + O(\epsilon^2) \\ &= (1 - x\tau) \left[2 - x\tau - x + 2A - \epsilon x\tau \frac{3 - 2x\tau + 2A}{1 - x\tau} \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

hence we can rewrite (2.4.35) as

$$G(x) = 1 - x - \frac{\epsilon x^2 \tau}{2 - x - x\tau + 2A} \left(1 + \frac{2A}{1 - x\tau} \right) + O(\epsilon^2) \quad (4.1.173)$$

With (4.1.172) this equation becomes

$$X [1 + G'(x_R)] = \frac{2}{\sqrt{1 - x_R}} \frac{\epsilon^{1-3m/2}}{\sqrt{X - \epsilon^{n-m}T}} + O(\epsilon) \quad (4.1.174)$$

To obtain a nontrivial result as $\epsilon \rightarrow 0$, we choose

$$m = n = \frac{2}{3}$$

and (4.1.174) tends to

$$X [1 + G'(x_R)] = \frac{2}{\sqrt{1 - x_R} \sqrt{X - T}} \text{ as } \epsilon \rightarrow 0$$

Letting

$$\xi^2 = X - T \quad (4.1.175)$$

we can rewrite this equation as

$$\xi^3 + T\xi = K \quad (4.1.176)$$

where

$$K = \frac{2}{\sqrt{1 - x_R} [1 + G'(x_R)]}$$

Hence the solution of this cubic equation gives the first term in the inner expansion. This cubic equation has one or three real roots depending on whether

$$D = \frac{K^2}{4} + \frac{T^3}{27}$$

is positive definite or negative semidefinite. For positive or small negative T , D is positive, and we have only the following real root

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}K + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}K + \sqrt{D}} \quad (4.1.177)$$

For $T < -3\sqrt[3]{K^2/4}$, we have three real roots for ξ , and we choose the one that continues (4.1.177) as D changes sign. We match this inner expansion with the outer expansions (4.1.169) and (4.1.170) and then form uniformly valid composite expansions.

Expansion for $0 \leq \tau \leq \tau_R$. We match the inner expansion with the outer expansion (4.1.169) by taking $m = n = 2$ in (4.1.66) as follows

Two-term inner expansion of (two-term outer expansion)

$$= x_R \left[1 - \epsilon^{2/3} \frac{K}{\sqrt{-T}} \right] \quad (4.1.178)$$

Two-term outer expansion of (two-term inner expansion)

$$= x_R \left[1 - \epsilon^{2/3} \frac{K}{\sqrt{-T}} \right] \quad (4.1.179)$$

In arriving at (4.1.179) we have found the solution of (4.1.176) for large negative T and picked out the root

$$\xi = \sqrt{-T} - \frac{K}{2T} + \cdots \quad \text{as } T \rightarrow -\infty \quad (4.1.180)$$

since (4.1.177) is not valid for large negative T . Comparing (4.1.178) and (4.1.179), we see that they are equal, hence the outer expansion (4.1.169) indeed matches the inner expansion represented by (4.1.176). Therefore a composite expansion valid for all $0 \leq \tau \leq \tau_R$ is given by

$$\begin{aligned} x^c &= x^o + x^i - (x^o)^i \\ &= x_R \left\{ 1 - \epsilon \frac{\tau x_R \left(1 - \frac{1-x_R}{F}\right)}{(1 - \tau x_R) [1 + G'(x_R)]} + \epsilon^{2/3} \left[\frac{K}{\sqrt{-T}} - T - \xi^2 \right] \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.181)$$

Note that this expansion is regular at $\tau = \tau_R$ because the singular contribution of the term multiplying ϵ is exactly canceled by the term $\epsilon^{2/3} K / \sqrt{-T}$.

Expansion for $\tau \geq \tau_R$. In this case T is positive, and we match the outer expansion (4.1.170) with the inner expansion by also taking $m = n = 2$ as follows

Two-term inner expansion of (two-term outer expansion)

$$= x_R (1 - \epsilon^{2/3} T) \quad (4.1.182)$$

Two-term outer expansion of (two-term inner expansion)

$$= x_R \left[1 - \frac{\tau - \tau_R}{\tau_R} + 0 \cdot \epsilon \right] \quad (4.1.183)$$

Since (4.1.182) and (4.1.183) are equal, the two expansions indeed match. A composite expansion uniformly valid for $\tau \geq \tau_R$ can be formed according to

$$\begin{aligned} x^c &= x^o + x^i - (x^o)^i \\ &= \frac{1}{\tau} - \frac{\epsilon}{\tau - 1} - \epsilon^{2/3} x_R \xi^2 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.184)$$

Adnan Nayfeh and Nemat-Nasser (1971) were the first to analyze this problem using the method of matched asymptotic expansion. The results of this section show that the outer and inner expansions are not in general expandable in the same asymptotic sequence, say, powers of ϵ . In the present example the outer expansions are in powers of ϵ , while the inner expansion is in fractional powers of ϵ . Moreover, this example serves to demonstrate that a nonuniformity may arise in the interior of the domain rather than at the boundaries as the earlier examples indicate.

4.1.7. The Earth-moon-spaceship Problem

In the examples discussed so far, the asymptotic sequences contained powers ϵ^n or fractional powers $\epsilon^{m/n}$ of the small parameter. These asymptotic sequences may fail to represent the solution in some instances in which they must be supplemented by $\log(1/\epsilon)$ which tends to infinity more slowly than any fractional power of ϵ . The present example serves to demonstrate that one should keep in mind that it may be necessary to supplement the asymptotic sequences by logarithms such as $\log(1/\epsilon)$, $\log[\log(1/\epsilon)]$, $\log\{\log[\log(1/\epsilon)]\}$, or their equivalents.

The problem under consideration is represented mathematically by (2.4.7) through (2.4.9) in Section 2.4.2. The one-dimensional problem was treated in Section 3.2.2 using the method

of strained coordinates. It was shown in 3.5.3 that the method of strained coordinates leads to an erroneous solution in the two-dimensional case.

If we take x rather than t as the independent variable, the straightforward expansion (obtained using the outer limit process $\mu \rightarrow 0$ with x fixed) is given by (2.4.17) through (2.4.19). It was pointed out that this expansion is invalid near $x = 1$ because the second term (2.4.19) has a logarithmic singularity while the third term has an algebraic singularity at $x = 1$. The size of the nonuniformity, hence the appropriate stretching transformation, may be estimated by taking the ratio of the most singular part of the term $O(\mu^2)$ to that of $O(\mu)$. This estimation suggests that the region of nonuniformity is $1 - x = O(\mu)$. Had we taken the ratio of the singular part in the term $O(\mu)$ to the first term, we would have concluded that the region of nonuniformity is $1 - x = O(e^{-1/\mu})$ which is not correct.

A better way of estimating the size of nonuniformity and determining the stretching transformation is an analysis of the order of magnitude of the various terms in the equations, as we have made in the earlier examples. Thus we introduce the transformation

$$\xi = \frac{1-x}{\mu^\alpha}, \quad \zeta = \frac{y}{\mu^\alpha}, \quad \eta = \frac{t-\tau}{\mu^\beta}, \quad \alpha \text{ and } \beta > 0 \quad (4.1.185)$$

where τ is the time elapsed to reach $x = 1$ and transform (2.4.7) into

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{(1-\mu)\mu^{2\beta-\alpha}(1-\mu^\alpha\xi)}{[(1-\mu^\alpha\xi)^2 + \mu^{2\alpha}\zeta^2]^{3/2}} - \mu^{1-3\alpha+2\beta} \frac{\xi}{(\xi^2 + \zeta^2)^{3/2}} \quad (4.1.186)$$

The term on the left-hand side of this equation represents the spaceship's acceleration, the first term on the right-hand side represents the contribution to this acceleration due to the earth's attraction, and the last term represents the contribution to this acceleration due to lunar attraction. If the lunar attraction force is neglected compared to the earth's attraction force, we would arrive at the outer expansion (2.4.12) which is not valid near $x = 1$. Thus in order to obtain an expansion valid near the moon (i.e., $x = 1$), the contribution to the acceleration by the lunar attraction must be of the same order as the acceleration; that is

$$3\alpha - 2\beta = 1 \quad (4.1.187)$$

This condition can be satisfied by an infinity of α and β values. Since the inner expansion must match the outer expansion, the velocity $d\xi/d\eta$ near the moon must be of the same order as the velocity $dx/dt = O(1)$ away from the moon, hence

$$\alpha = \beta \quad (4.1.188)$$

Thus

$$\alpha = \beta = 1 \quad (4.1.189)$$

and the original equations can be rewritten in terms of the inner variable $\xi = (1-x)\mu^{-1}$ as

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = (1-\mu) \frac{1-\mu\xi}{[(1-\mu\xi)^2 + y^2]^{3/2}} - \mu^2 \frac{\xi}{(\mu^2\xi^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.1.190)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(1-\mu) \frac{y}{[(1-\mu\xi)^2 + y^2]^{3/2}} - \mu \frac{y}{(\mu^2\xi^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.1.191)$$

We next discuss the one-dimensional case and refer the reader to Lagerstrom and Kevorkian (1963b) for the two-dimensional case and to Lagerstrom and Kevorkian (1963a) and Breakwell and Perko (1966) for the case of rotating mass centers.

If we set $y = 0$ and integrate (2.4.7) subject to (2.4.11) with $h = \rho = 0$, we have

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0 \quad (4.1.192)$$

The outer expansion (obtained using the outer limit $\mu \rightarrow 0$ with x fixed) is (Exercise 2.12)

$$\sqrt{2}t^o = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + O(\mu^2) \quad (4.1.193)$$

which breaks down as $x \rightarrow 1$. To describe the solution near $x = 1$, we let $\xi = (1-x)\mu^{-1}$ in (4.1.192) and obtain

$$\frac{1}{2}\mu^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{1-\mu\xi} + \frac{1}{\xi} \quad (4.1.194)$$

Now we seek an inner expansion, under the inner limit process $\mu \rightarrow 0$ with ξ fixed, of the form

$$t^i = \tau_0 + \mu T_1(\xi) + O(\mu^2) \quad (4.1.195)$$

and equate coefficients of like powers of μ to obtain

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dT_1} \right)^2 = 1 + \frac{1}{\xi} \quad (4.1.196)$$

Its general solution is

$$\sqrt{2}T_1 = -\sqrt{\xi(\xi+1)} + \sinh^{-1} \sqrt{\xi} + \tau_1 \quad (4.1.197)$$

where τ_1 is a constant, which together with τ_0 must be determined from matching because this expansion is not valid near $x = 0$; hence we cannot use the initial condition $t(x = 0) = 0$.

To perform the matching, we take $m = n = 2$ in (4.1.66) and obtain:

Two-term inner expansion of (two-term outer expansion)

$$= \frac{2}{3} + \mu \left[-\xi + \frac{5}{3} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu + \frac{1}{2} \ln \xi \right] \quad (4.1.198)$$

Two-term outer expansion of (two-term inner expansion)

$$= \sqrt{2}\tau_0 - 1 + x - \mu \left[\frac{1}{2} - \ln 2 - \tau_1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{\mu} \right] \quad (4.1.199)$$

Equating (4.1.198) and (4.1.199) according to the matching principle, we have

$$\sqrt{2}\tau_0 = \frac{2}{3}, \quad \tau_1 = \frac{13}{6} - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu \quad (4.1.200)$$

Hence

$$\sqrt{2}t^i = \frac{2}{3} + \mu \left[\frac{13}{6} - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \sinh^{-1} \sqrt{\xi} \right] + O(\mu^2) \quad (4.1.201)$$

which contains a $\mu \ln \mu$ term in addition to the $O(\mu)$ term.

A composite expansion uniformly valid over $[0, 1]$ can be formed according to

$$t^c = t^o + t^i - (t^o)^i$$

Hence

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t^c = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left[\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \mu + \frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) \right. \\ \left. + \xi - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \sinh^{-1} \sqrt{\xi} \right] + O(\mu^2) \end{aligned} \quad (4.1.202)$$

4.1.8. Small Reynolds Number Flow Past a Sphere

As a last example, we consider the problem of small Reynolds number flow past a sphere discussed in Section 2.1.4. In addition to being governed by a partial differential equation, this example shows that one sometimes needs a contracting rather than a stretching transformation. The stream function is given by the fourth-order partial differential equation (2.1.37) subject to the boundary conditions (2.1.39) and (2.1.40).

Stokes' Expansion. In Section 2.1.4 we obtained the straightforward expansion (2.1.59) which was called Stokes' expansion by Lagerstrom and Cole (1955). It was obtained under what is called Stokes' limit process: $R \rightarrow 0$ with r fixed. As pointed out in Section 2.1.4, Stokes' expansion satisfies the conditions (2.1.39) on the surface of the sphere, but it does not satisfy the infinity condition (2.1.40). Thus Stokes' expansion breaks down as $r \rightarrow \infty$ (Whitehead's paradox).

Oseen's Expansion. To investigate the source of this nonuniformity, Oseen (1910) examined the relative magnitude of the (convective) terms neglected by Stokes to those retained (viscous). The right-hand side of (2.1.45) shows that

$$\text{Neglected terms} = O\left(\frac{R}{r^2}\right) \quad (4.1.203a)$$

while the cross-product term (retained) in (2.1.42) is

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi_0 = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.1.203b)$$

Hence

$$\frac{\text{Neglected}}{\text{Retained}} = O(Rr) \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty \quad (4.1.203c)$$

and Stokes' expansion breaks down when r increases to $O(R^{-1})$.

One can also arrive at this conclusion by noting that the source of nonuniformity is the term $-(3/16)Rr^2 \sin^2 \theta \cos \theta$ in the particular integral that does not behave properly as $r \rightarrow \infty$. Consequently, Stokes' expansion is valid as long as this term is small compared to the term $-(3/4)r \sin^2 \theta$ in ψ_0 , and Stokes' expansion breaks down when these two terms are of the same order; that is, when $rR = O(1)$.

The above arguments led Oseen (1910) to derive an approximation to the flow field valid everywhere. It is the first two terms of what Lagerstrom and Cole (1955) called Oseen's expansion, derived using Oseen's limit process $R \rightarrow 0$ with $\rho = Rr$ fixed. It should be noted that ρ is a contracting rather than a stretching transformation. With this new variable (2.1.37) becomes

$$D^4 \psi = \frac{R^2}{\rho^2 \sin \theta} \left(\psi_\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \psi_\rho \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \psi_\rho - 2 \frac{\psi_\theta}{\rho} \right) D^2 \psi \quad (4.1.204)$$

where

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (4.1.205)$$

Since the general solutions to partial differential equations are not known in general, it is more convenient and expedient to determine the inner and outer expansions term by term, employing the matching principle as a guide to the forms of these expansions. Since Stokes' solution (2.1.51) is uniformly valid, we can determine the first term in Oseen's expansion by taking Oseen's limit of (2.1.51). To determine the form of the second term as well, we use the matching principle

one-term Stokes (two-term Oseen) = two-term Oseen (one-term Stokes)

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \frac{1}{R} \rho \sin^2 \theta \quad (4.1.206)$$

Thus Oseen's expansion (denoted by ψ^o) must have the form

$$\psi^o = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{R} \Psi_1(\rho, \theta) + \Psi_2(\rho, \theta) + \dots \quad (4.1.207)$$

and the first term is a consequence of the validity of Stokes' solution for all r . Substituting this expansion into (4.1.204) and equating the coefficients of R on both sides, we obtain

$$\left(D^2 - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) D^2 \Psi_1 = 0 \quad (4.1.208)$$

This equation is called Oseen's equation which he derived using physical arguments.

To solve Oseen's equation we follow Goldstein (1929) by letting

$$D^2 \Psi_1 = \phi e^{(1/2)\rho \cos \theta} \quad (4.1.209)$$

and obtaining

$$\left(D^2 - \frac{1}{4} \right) \phi = 0 \quad (4.1.210)$$

Rather than obtaining the general solution to (4.1.208) by solving (4.1.209) and (4.1.210) and then using the matching principle (4.1.206) to select the terms that match Stokes' solution, Proudman and Pearson (1957) matched $\mathcal{D}^2 \psi^3$ and $\mathcal{D}^2 \psi^o$ first. Since

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 \psi^s &= \frac{3}{2} \frac{1}{r} \sin^2 \theta + O(R) \\ \mathcal{D}^2 \psi^o &= R^2 D^2 \psi^o = R D^2 \Psi_1(\rho, \theta) + O(R^2) \end{aligned} \quad (4.1.211)$$

and the matching condition demands that

$$\text{one-term Stokes (one-term } \mathcal{D}^2 \psi^o) = \text{one-term Oseen (one-term } \mathcal{D}^2 \psi^s), \quad (4.1.212)$$

we have

$$\text{one-term Stokes } (D^2 \Psi_1) = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \sin^2 \theta \quad (4.1.213)$$

To satisfy this condition we seek a solution of (4.1.210) of the form

$$\phi = \sin^2 \theta f(\rho) \quad (4.1.214)$$

so that

$$f'' - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \right) f = 0 \quad (4.1.215)$$

The solution of f that does not grow exponentially with ρ is

$$f = A \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) e^{-(1/2)\rho} \quad (4.1.216)$$

so that

$$D^2\Psi_1 = A \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \sin^2 \theta e^{-(1/2)\rho(1-\cos \theta)} \quad (4.1.217)$$

Hence

$$\text{one-term Stokes } (D^2\Psi_1) = \frac{2A}{R} \frac{1}{r} \sin^2 \theta \quad (4.1.218)$$

Then (4.1.213) gives $A = 3/4$, and $D^2\Psi_1$ becomes

$$D^2\Psi_1 = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \sin^2 \theta e^{-(1/2)\rho(1-\cos \theta)} \quad (4.1.219)$$

The particular integral of (4.1.219) is

$$\Psi_{1p} = \frac{3}{2} (1 + \cos \theta) e^{-(1/2)\rho(1-\cos \theta)} \quad (4.1.220)$$

so that

$$\Psi_1 = \Psi_{1c} + \frac{3}{2} (1 + \cos \theta) e^{-(1/2)\rho(1-\cos \theta)} \quad (4.1.221)$$

Then from (4.1.206)

$$\text{one-term Stokes } (\Psi_{1c}) = -\frac{3}{2} (1 + \cos \theta) \quad (4.1.222)$$

Hence $\Psi_{1c} = -3(1 + \cos \theta)/2$, and Oseen's expansion becomes

$$\psi^o = \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{2R} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-(1/2)\rho(1-\cos \theta)}] + O(1) \quad (4.1.223)$$

Second Term in Stokes' Expansion. Equations (2.1.51), (2.1.52), and (2.1.58) show that the second-order Stokes' expansion is

$$\begin{aligned} \psi^s = & \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \\ & + R \left[-\frac{3}{32} \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta + \psi_{1c} \right] + O(R^2) \end{aligned} \quad (4.1.224)$$

where ψ_{1c} is the complementary solution of (2.1.52). To determine ψ_{1c} we match two terms of ψ^s with two terms of ψ^o according to

Two-term Stokes' expansion: $\psi \sim \psi_0 + R(\psi_{1p} + \psi_{1c})$

Rewritten in Oseen's variables: $= \frac{1}{4} \left(2\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{3\rho}{R} + \frac{R}{\rho} \right) \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 & + R \left[-\frac{3}{32} \left(2\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{3\rho}{R} + 1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right. \\
 & \left. \times \sin^2 \theta \cos \theta + \psi_{1c} \left(\frac{\rho}{R}, \theta \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.1.225b}$$

$$\text{Two-term Oseen's expansion:} \quad = \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R} \left[-\frac{3}{4} \left(\rho \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta \right) \right. \\
 & \left. + \text{term } O(1) \text{ in } R^2 \psi_{1c} \left(\frac{\rho}{R}, \theta \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.1.225c}$$

$$\text{Two-term Oseen's expansion:} \quad \psi \sim \frac{1}{2R^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{2R} (1 + \cos \theta)$$

$$\times [1 - e^{-(1/2)\rho(1-\cos\theta)}] \tag{4.1.226a}$$

$$\text{Rewritten in Stokes' variables:} \quad = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{2R} (1 + \cos \theta)$$

$$\times [1 - e^{-(1/2)rR(1-\cos\theta)}] \tag{4.1.226b}$$

$$\text{Two-term Stokes' expansion:} \quad = \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} r \right) \sin^2 \theta$$

$$+ \frac{3}{16} r^2 R \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \tag{4.1.226c}$$

Equating (4.1.225c) and (4.1.226c) according to the matching principle, we have

$$\text{one-term Oseen } (\psi_{1c}) = \frac{3}{16} r^2 \sin^2 \theta \tag{4.1.227}$$

This suggests that

$$\psi_{1c} = f(r) \sin^2 \theta \tag{4.1.228}$$

hence from (2.1.50)

$$f(r) = c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1} \tag{4.1.229}$$

The matching condition (4.1.227) demands that $c_4 = 0$ and $c_2 = 3/16$, while the boundary conditions $\psi_1(1, \theta) = \psi_{1r}(1, \theta) = 0$ demand that $c_1 = -\frac{9}{32}$ and $c_{-1} = \frac{3}{32}$. Therefore

$$\begin{aligned}
 \psi^s = & \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta + \frac{3}{32} R \left[\left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \right. \\
 & \left. - \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right] + O(R^2)
 \end{aligned} \tag{4.1.230}$$

Higher Approximations. Proudman and Pearson (1957) found that the particular solution for ψ_2 contains $\ln r$ which leads to the appearance of $\ln R$ on matching. This is another example in which logarithms of the perturbation parameter appear naturally when one matches expansions containing logarithms of the independent variable.

9.4.2 4.2. The Method of Composite Expansions

The composite expansions obtained in Sections 4.1.1 through 4.1.7 are generalized expansions having the form

$$y(x; \epsilon) = y^o(x; \epsilon) + y^i(\zeta; \epsilon) - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \quad (4.2.1a)$$

where y is the dependent variable, ϵ is the small parameter, x is the outer variable, and ζ is the inner variable. This composite expansion can be viewed as the sum of two terms $F(x; \epsilon) = y^o$ and $G(\zeta; \epsilon) = y^i - (y^o)^i$; that is

$$y(x; \epsilon) = F(x; \epsilon) + G(\zeta; \epsilon) \quad (4.2.1b)$$

Rather than determining outer and inner expansions, matching them, and then forming a composite expansion, Bromberg (1956) and Viik and Lyusternik (1957) assumed the solution to have the form (4.2.1b) which is valid everywhere; hence it satisfies all the boundary conditions. Taking the outer limit of (4.2.1b) gives

$$y^o(x; \epsilon) = F + G^o \quad (4.2.1c)$$

which must satisfy the original differential equation expressed in terms of the outer variable. Similarly

$$y^i = F^i + G \quad (4.2.1d)$$

must satisfy the original differential equation expressed in terms of the inner variable. To determine an approximate solution, F and G are expanded in terms of ϵ , and equations and boundary conditions are derived for each level of approximation. This technique was applied by Chudov (1966) to viscous flow past a flat plate, and the version of Bromberg was rediscovered by O'Malley (1971).

Another method of composite expansions was devised earlier by Latta (1951). According to this technique, the solution is assumed to have the same form as (4.2.1b) except G is also a function of the outer variable and the inner variable ζ is generalized from $x/\delta(\epsilon)$ into $g(x)/\delta(\epsilon)$ with g to be determined from the analysis. Moreover, Latta inspected the inner expansion to determine special functions that can be used to represent $G(x, \zeta; \epsilon)$.

Next we illustrate both techniques by applying them to specific examples.

4.2.1. A Second-order Equation with Constant Coefficients

Let us again consider the problem

$$\epsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.2.2a)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (4.2.2b)$$

As discussed in Section 4.1.1, the straightforward expansion breaks down near $x = 0$, and an inner expansion using the stretching transformation $\zeta = x\epsilon^{-1}$ was introduced to describe y in the region of nonuniformity. The inner expansion was shown to involve the function $e^{-\zeta} = e^{-x/\epsilon}$. Since upon differentiation $e^{-x/\epsilon}$ reproduces itself, no other special functions are needed to represent the composite expansion. Therefore Latta assumed that y has a uniformly valid expansion of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(x) + e^{-x/\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n h_n(x) \quad (4.2.3)$$

Substituting (4.2.3) into (4.2.2a) and (4.2.2b) and equating the coefficients of ϵ^n and $\epsilon^n e^{-x/\epsilon}$ for all n to zero, we obtain equations for f_n and h_n . The equations for $n = 0, 1$, and 2 are

$$\begin{aligned} f'_0 + f_0 &= 0, & h'_0 - h_0 &= 0 \\ f'_1 + f_1 &= -f''_0, & h'_1 - h_1 &= h''_0 \\ f'_2 + f_2 &= -f''_1, & h'_2 - h_2 &= h''_1 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

The boundary conditions are

$$f_0(1) = \beta, \quad f_0(0) + h_0(0) = \alpha \quad (4.2.7)$$

$$f_n(1) = 0, \quad f_n(0) + h_n(0) = 0 \text{ for } n \geq 1 \quad (4.2.8)$$

where the exponentially small terms $e^{-\epsilon^{-1}} h_n(1)$ are neglected. The solution of (4.2.4) subject to (4.2.7) is

$$f_0 = \beta e^{1-x}, \quad h_0 = (\alpha - \beta e) e^x \quad (4.2.9)$$

Using (4.2.9) in (4.2.5) and solving the resulting equations subject to (4.2.8), we have

$$f_1 = \beta(1-x)e^{1-x}, \quad h_1 = [-\beta e + (\alpha - \beta e)x]e^x \quad (4.2.10)$$

Substituting the first-order solution into (4.2.6) and solving the resulting equations subject to (4.2.8), we obtain

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{2}\beta(1-x)(5-x)e^{1-x} \\ h_2 &= \left[-\frac{5}{2}\beta e + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta e)x^2 \right] e^x \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

With the above solutions the expansion (4.2.3) becomes

$$\begin{aligned} y &= \beta \left[1 + \epsilon(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)(5-x) \right] e^{1-x} \\ &\quad + \{ \alpha - \beta e + \epsilon[-\beta e + (\alpha - \beta e)x] \\ &\quad + \epsilon^2 \left[-\frac{5}{2}\beta e + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(x - \beta e)x^2 \right] \} e^{x-x/\epsilon} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

It can be easily verified that the outer expansion ($\lim \epsilon \rightarrow 0$ with x kept fixed) of the first two terms of this expansion is given by (4.1.49), while the inner expansion ($\epsilon \rightarrow 0$ with $\zeta = x/\epsilon$ kept fixed) is given by (4.1.76). Therefore the method of composite expansions gives a uniformly valid expansion directly without the need to determine an outer expansion and an inner expansion, to match them, and then to form a composite expansion.

Let us next determine an expansion for y by using the technique of Bromberg and Viik and Lyusternik. We assume that

$$\begin{aligned} y(x; \epsilon) &= F(x; \epsilon) + G(\zeta; \epsilon) \\ &= F_0(x) + G_0(\zeta) + \epsilon [F_1(x) + G_1(\zeta)] + \epsilon^2 [F_2(x) + G_2(\zeta)] + \dots \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

where $G(\zeta; \epsilon)$ is negligible outside the inner region (Bromberg, 1956); that is, $G(\zeta; \epsilon) \rightarrow 0$ as $\zeta \rightarrow \infty$ so that

$$y^o(x, \epsilon) = F(x; \epsilon) = F_0(x) + \epsilon F_1(x) + \epsilon^2 F_2(x) + \dots \quad (4.2.14)$$

Since $x = \epsilon \zeta$

$$\begin{aligned} y^i(x; \epsilon) &= F_0(0) + G_0(\zeta) + \epsilon [F'_0(0)\zeta + F_1(0) + G_1(\zeta)] \\ &\quad + \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} F''_0(0)\zeta^2 + F'_1(0)\zeta + F_2(0) + G_2(\zeta) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Since $G(\zeta; \epsilon)$ is assumed to be negligible outside the boundary layer, $F(x; \epsilon)$ satisfies the boundary condition $y(1) = \beta$. Hence

$$F_0(1) = \beta, \quad F_n(1) = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (4.2.16)$$

The boundary condition $y(0) = \alpha$ is satisfied by $F + G$ so that

$$F_0(0) + G_0(0) = \alpha, \quad F_n(0) + G_n(0) = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (4.2.17)$$

To determine the equations governing F_n , we substitute (4.2.14) into (4.2.2a) and equate coefficients of like powers of ϵ , assuming x to be fixed, and obtain

$$F'_0 + F_0 = 0 \quad (4.2.18)$$

$$F'_n + F_n = -F''_{n-1} \quad \text{for } n \geq 1 \quad (4.2.19)$$

To determine the equations governing G_n , we first express (4.2.2a) in terms of the inner variable ζ as

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} + \epsilon y = 0 \quad (4.2.20)$$

Substituting (4.2.15) into (4.2.20), keeping ζ fixed, and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$G''_0 + G'_0 = 0 \quad (4.2.21)$$

$$G''_1 + G'_1 = -G_0 - F'_0(0) - F_0(0) \quad (4.2.22)$$

$$G''_2 + G'_2 = -G_1 - [F'_0(0) + F''_0(0)]\zeta - F''_0(0) - F_1(0) - F'_1(0) \quad (4.2.23)$$

The solution of (4.2.18) subject to (4.2.16) is

$$F_0 = \beta e^{1-x} \quad (4.2.24)$$

Hence $G_0(0) = \alpha - \beta e$ from (4.2.17), and thus the solution of (4.2.21) that tends to zero as $\zeta \rightarrow \infty$ is

$$G_0 = (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} \quad (4.2.25)$$

The solution of (4.2.19) and (4.2.16) for $n = 1$ is then

$$F_1 = \beta(1-x)e^{1-x} \quad (4.2.26)$$

which when combined with (4.2.17) gives $G_1(0) = -\beta e$. Substituting for F_0 and G_0 into (4.2.22) gives

$$G_1'' + G_1' = -(\alpha - \beta e)e^{-\zeta}$$

whose solution subject to $G_1(0) = -\beta e$ that tends to zero as $\zeta \rightarrow \infty$ is

$$G_1 = [(\alpha - \beta e)\zeta - \beta e]e^{-\zeta} \quad (4.2.27)$$

Proceeding to second order, we find that the solution of (4.2.19) and (4.2.16) is

$$F_2 = \frac{1}{2}\beta(1-x)(5-x)e^{1-x} \quad (4.2.28)$$

Then $G_2(0) = -5\beta e/2$ from (4.2.17), and (4.2.23) becomes

$$G_2'' + G_2' = -[(\alpha - \beta e)\zeta - \beta e]e^{-\zeta}$$

whose solution subject to $G_2(0) = -5\beta e/2$ that tends to zero as $\zeta \rightarrow \infty$ is

$$G_2 = \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta e)\zeta^2 + (\alpha - 2\beta e)\zeta - \frac{5}{2}\beta e \right] e^{-\zeta} \quad (4.2.29)$$

Therefore the first two terms of the resulting uniformly valid expansion are exactly the same as (4.1.81) obtained earlier by using the method of matched asymptotic expansions.

4.2.2. A Second-order Equation with Variable Coefficients

As a second example, we consider the following problem which is a special case of the problem considered in Section 4.1.3

$$\epsilon y'' + (2x + 1)y' + 2y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.2.30)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (4.2.31)$$

Since the coefficient of y' is positive, the nonuniformity occurs near $x = 0$. To describe y in the region of nonuniformity, we need a stretching transformation $\zeta = x\epsilon^{-1}$, and the inner expansion is described in terms of the special function $e^{-\zeta} = e^{-x/\epsilon}$. Since the problem has variable coefficients, we assume that y possesses a uniformly valid expansion of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(x) + e^{-g(x)/\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n h_n(x) \quad (4.2.32)$$

where the function $g(x)$, which is determined from the analysis, $\rightarrow x$ as $x \rightarrow 0$.

Substituting (4.2.32) into (4.2.30) and (4.2.31) and equating coefficients of ϵ^n and $\epsilon^n e^{-g(x)/\epsilon}$ for all n to zero, we obtain equations to determine g , f_n and h_n . The first three equations are

$$\begin{aligned} h_0 g' [g' - (2x + 1)] &= 0 \\ (2x + 1)f_0' + 2f_0 &= 0 \\ (-2g' + 2x + 1)h_0' + (2 - g'')h_0 &= 0 \\ f_0(1) = \beta, \quad f_0(0) + h_0(0) &= \alpha \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

To determine a nontrivial solution for h_0 , (4.2.33) requires that

$$g' = 0 \quad \text{or} \quad g' = 2x + 1 \quad (4.2.37)$$

The first case in (4.2.37) yields $g = \text{a constant}$, which must be rejected because $g(x) \rightarrow x$ as $x \rightarrow 0$. Hence

$$g = x^2 + x \quad (4.2.38)$$

The solution of (4.2.34) subject to $f_0(1) = \beta$ is

$$f_0 = \frac{3\beta}{2x+1} \quad (4.2.39)$$

Using (4.2.38) in solving (4.2.35) subject to (4.2.36) gives

$$h_0 = \alpha - 3\beta \quad (4.2.40)$$

Therefore

$$y = \frac{3\beta}{2x+1} + (\alpha - 3\beta)e^{-(x^2+x)/\epsilon} + O(\epsilon) \quad (4.2.41)$$

Let us next apply the second version of the method of composite expansions to this problem. In this case (4.2.13) through (4.2.17) are applicable. Substituting (4.2.14) into (4.2.30), keeping x fixed, and equating coefficients of like powers of ϵ , we have

$$(2x+1)F'_0 + 2F_0 = 0 \quad (4.2.42)$$

$$(2x+1)F'_1 + 2F_1 = -F''_0 \quad (4.2.43)$$

To determine the equations governing G_n , we express (4.2.30) in terms of the inner variable $\zeta = x/\epsilon$; that is

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + (1 + 2\epsilon\zeta)\frac{dy}{d\zeta} + 2\epsilon y = 0 \quad (4.2.44)$$

Substituting (4.2.15) into this equation, keeping ζ fixed, and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$G''_0 + G'_0 = 0 \quad (4.2.45)$$

$$G''_1 + G'_1 = -2\zeta G'_0 - 2G_0 - 2F_0(0) - F'_0(0) \quad (4.2.46)$$

The solution of (4.2.42) subject to (4.2.16) is

$$F_0 = \frac{3\beta}{2x+1} \quad (4.2.47a)$$

which together with (4.2.17) gives $G_0(0) = \alpha - 3\beta$. Hence the solution of (4.2.45) that tends to zero as $\zeta \rightarrow \infty$ is

$$G_0 = (\alpha - 3\beta)e^{-\zeta} \quad (4.2.47b)$$

Substituting for F_0 into (4.2.43) and solving the resulting equation subject to (4.2.16), we obtain

$$F_1 = \frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3} \quad (4.2.48)$$

Then (4.2.17) gives $G_1(0) = -16\beta/3$, and (4.2.46) becomes

$$G''_1 + G'_1 = 2(\alpha - 3\beta)(\zeta - 1)e^{-\zeta}$$

whose solution which tends to zero as $\zeta \rightarrow \infty$ is

$$G_1 = - \left[\frac{16}{3}\beta + (\alpha - 3\beta)\zeta^2 \right] e^{-\zeta} \quad (4.2.49)$$

Therefore

$$\begin{aligned} y = \frac{3\beta}{2x+1} + \epsilon \frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3} + (\alpha - 3\beta)e^{-\zeta} \\ - \epsilon \left[\frac{1}{3}\beta + (\alpha - 3\beta)\zeta^2 \right] e^{-\zeta} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

4.2.3. An Initial Boundary Value Problem for the Heat Equation

As a third example of the application of the method of composite expansions, we consider an initial boundary value problem for the heat equation which was introduced by Keller (1968). We assume that the temperature $u(x, t; \epsilon)$ depends on one space variable (i.e., x) which ranges from 0 to $b(\epsilon t)$ where b is a known function and ϵ is a small parameter. Thus b is a slowly varying function of t . The mathematical description of the problem is

$$u_i = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq b(\epsilon t) \quad (4.2.51)$$

$$u(0, t) = \phi(\epsilon t), \quad u[b(\epsilon t), t] = 0 \quad (4.2.52)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq b(0) \quad (4.2.53)$$

Changing from the variable t to $\tau = \epsilon t$, (4.2.51) and (4.2.52) become

$$\epsilon u_\tau = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq b(\tau) \quad (4.2.54)$$

$$u(0, \tau) = \phi(\tau), \quad u[b(\tau), \tau] = 0 \quad (4.2.55)$$

Since ϵ multiplies u_τ , the straightforward perturbation solution for small ϵ , keeping τ fixed, cannot satisfy in general the initial condition (4.2.53), and a nonuniformity exists at and near $\tau = 0$. To describe the behavior of u near $t = 0$, a stretching transformation $t = \tau/\epsilon$ is needed. As verified below, the special function $\exp[-g(\tau)/\epsilon]$ with $g(\tau) \rightarrow \tau$ as $\tau \rightarrow 0$ describes the behavior of u in this region. Therefore we assume that u has a uniformly valid asymptotic expansion of the form

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(x, \tau) + e^{-g(\tau)/\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n h_n(x, \tau) \quad (4.2.56)$$

Substituting this expansion into (4.2.53) through (4.2.55) and equating to zero the coefficients of ϵ^n and $\epsilon^n e^{-g(\tau)/\epsilon}$ for all n , we obtain

$$\begin{aligned} f_{0,xx} = 0, \quad f_0(0, \tau) = \phi(\tau), \quad f_0[b(\tau), \tau] = 0 \\ h_{0,xx} + g'h_0 = 0, \quad h_0(0, \tau) = 0, \quad h_0[b(\tau), \tau] = 0 \\ f_0(x, 0) + h_0(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq b(0) \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

and for $n \geq 1$

$$f_{n,xx} = f_{n-1,\tau}, f_n(0, \tau) = f_n[b(\tau), \tau] = 0 \quad (4.2.60)$$

$$h_{n,xx} + g'h_n = h_{n-1,\tau}, h_n(0, \tau) = h_n[b(\tau), \tau] = 0 \quad (4.2.61)$$

$$f_n(x, 0) + h_n(x, 0) = 0 \quad (4.2.62)$$

where g' stands for $dg/d\tau$.
The solution of (4.2.57) is

$$f_0 = \phi(\tau) \left[1 - \frac{x}{b(\tau)} \right] \quad (4.2.63)$$

Since the boundary conditions on h_0 are homogeneous, the equation for h_0 has a nontrivial solution if and only if g' is one of the eigenvalues

$$g'_k = \left[\frac{k\pi}{b(\tau)} \right]^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.64)$$

Then the corresponding normalized eigenfunctions are

$$\chi_k = \left[\frac{2}{b(\tau)} \right]^{1/2} \sin \frac{k\pi x}{b(\tau)} \quad (4.2.65)$$

Hence

$$h_0 = a_0(\tau) \chi_k(x, \tau) \quad (4.2.66)$$

where a_0 is an unknown function which is determined from the examination of the equation for h_1 .

With h_0 known (4.2.61) for $\mathbf{n} = 1$ becomes

$$\begin{aligned} h_{1,xx} + g'_k h_1 &= a'_0 \chi_k + a_0 \chi_{k,r} \\ h_1(0, \tau) &= h_1[b(\tau), \tau] = 0 \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

We assume that h_1 can be expanded in terms of the eigenfunctions χ_k ; that is

$$h_1 = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(\tau) \chi_s(x, \tau) \quad (4.2.68)$$

Substituting (4.2.68) into (4.2.67) and using the fact that $\chi_{s,xx} = -g'_s \chi_s$, we obtain

$$\sum_{s=1}^{\infty} (g'_k - g'_s) c_s \chi_s = a'_0 \chi_k + a_0 \chi_{k,r} \quad (4.2.69)$$

If we multiply this equation by χ_k and integrate from $x = 0$ to $b(\tau)$, the left-hand side vanishes because χ_k is orthogonal to χ_s for $k \neq s$, and $g'_s = g'_k$ when $k = s$. Therefore

$$\int_0^{b(\tau)} (a'_0 \chi_k^2 + a_0 \chi_{k,\tau} \chi_k) dx = 0 \quad (4.2.70)$$

which is the condition for the solvability of (4.2.67). Since

$$\int_0^{b(\tau)} \chi_k^2 dx = 1 \quad (4.2.71)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{b(\tau)} \chi_k^2 dx = 0 = b'(\tau) \chi_k^2[b(\tau), \tau] + 2 \int_0^{b(\tau)} \chi_k \chi_{k,\tau} dx = 0 \quad (4.2.72)$$

Since $\chi_k[b(\tau), \tau] = 0$

$$\int_0^{b(r)} \chi_k \chi_{k,r} dx = 0 \quad (4.2.73)$$

Hence (4.2.70) and (4.2.71) lead to

$$a_0 = a \text{ constant} \quad (4.2.74)$$

Therefore the zeroth-order solution is

$$\begin{aligned} u(x, \tau; \epsilon) = & \phi(\tau) \left[1 - \frac{x}{b(\tau)} \right] \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{2}{b(\tau)} \right]^{1/2} \sin \frac{k\pi x}{b(\tau)} \exp \left[-\frac{k^2 \pi^2}{\epsilon} \int_0^r b^{-2}(\xi) d\xi \right] + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

where a_k is a constant given by

$$a_k = \left[\frac{2}{b(0)} \right]^{1/2} \int_0^{b(0)} \left\{ \psi(x) - \phi(0) \left[1 - \frac{x}{b(0)} \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{b(0)} dx \quad (4.2.76)$$

4.2.4. Limitations of the Method of Composite Expansions

Complications might arise if one tries to apply Latta's technique to nonlinear problems. Moreover, difficulties might arise if a large number of special functions are needed to describe the behavior of the function under consideration in the inner region. In spite of these limitations, it is the starting point for the development of the method of multiple scales which is discussed in Chapter 6.

The modified method of composite expansions of Bromberg, Viik, and Lyusternik overcomes these complications as illustrated by its application to the nonlinear problem

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0 \quad (4.2.77)$$

describing the one-dimensional earth-moon-spaceship problem treated in Section 4.1.7 using the method of matched asymptotic expansions.

We assume a composite expansion of the form

$$t(x; \mu) = F_0(x) + G_0(\xi) + \mu [F_1(x) + G_1(\xi)] + \cdots \quad (4.2.78)$$

where $\xi = (1-x)/\mu$ is the inner variable found in Section 4.1.7 and $G_n \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow \infty$. Then the initial condition $t(0) = 0$ gives

$$F_0(0) = F_1(0) = 0 \quad (4.2.79)$$

From (4.2.78)

$$t^o = F_0(x) + \mu F_1(x) + \cdots \quad (4.2.80)$$

which when substituted into (4.2.77) gives

$$\begin{aligned} 2F_0'^2 &= x \\ \frac{F_1'}{F_0'^3} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{aligned} \quad (4.2.81)$$

The solutions of these equations subject to (4.2.79) are

$$\begin{aligned}\sqrt{2}F_0 &= \frac{2}{3}x^{3/2} \\ \sqrt{2}F_1 &= \frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\end{aligned}\quad (4.2.82)$$

From (4.2.78) and (4.2.82)

$$\sqrt{2}t^i = \frac{2}{3} + \sqrt{2}G_0(\xi) + \mu \left[-\xi + \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu\xi}{4} + \sqrt{2}G_1(\xi) \right] + \dots \quad (4.2.83)$$

To determine G_0 and G_1 , we express (4.2.77) in terms of the inner variable ξ ; that is

$$\frac{1}{2}\mu^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{1-\mu\xi} + \frac{1}{\xi} \quad (4.2.84)$$

Substituting (4.2.83) into this equation and equating the coefficients of like powers of μ , we obtain

$$G'_0 = 0 \quad (4.2.85)$$

$$\left[\sqrt{2}G_1 + \frac{1}{2}\ln \xi - \xi \right]' = - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right)^{-1/2} \quad (4.2.86)$$

The solution of (4.2.85) that tends to zero as $\xi \rightarrow \infty$ is $G_0 = 0$, while the solution of (4.2.86) that tends to zero as $\xi \rightarrow \infty$ is

$$\sqrt{2}G_1 = \xi - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \sinh^{-1} \sqrt{\xi} - \frac{1}{2}\ln \xi + \frac{1}{2} - \ln 2 \quad (4.2.87)$$

Substituting for F_0 and F_1 from (4.2.82) and using the values of G_0 and G_1 in (4.2.78), we obtain exactly the expansion (4.1.202) that we obtained using the method of matched asymptotic expansions.

9.4.3 Exercises

4.1. Consider the problem

$$\begin{aligned}\epsilon y'' + y' &= 2x \\ y(0) &= x, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

- (a) Determine a three-term outer expansion.
 - (b) Determine a three-term inner expansion.
 - (c) Match these two expansions and then form a composite expansion.
 - (d) Determine a three-term uniformly valid expansion using the method of composite expansions (MCE) and compare the result with (c).
- 4.2. Determine second-order (three-term) expansions for

$$\begin{aligned}\epsilon y'' - y' &= 2x \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using (a) the method of matched asymptotic expansions (MMAE) and (b) the MCE.

4.3. Determine second-order uniformly valid expansions for the problems

$$\begin{aligned}\epsilon y'' \pm (2x + 1)y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using (a) the MMAE (b) Latta's method, and (c) the Bromberg-Visik-Lyusternik method.

4.4. Determine first-order uniformly valid expressions for

$$\begin{aligned}\epsilon y'' - a(x)y' + b(x)y &= 0, \quad a(x) > 0 \\ y(0) &= x, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using (a) the MMAE and (b) the MCE.

4.5. Consider the problem

$$\begin{aligned}\epsilon^2 y''' - y' + y &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad y'(1) = \gamma'\end{aligned}$$

(a) Show that boundary layers exist at both ends which are characterized by the stretching transformations

$$\eta = x/\epsilon \quad \text{and} \quad \zeta = (1 - x)/\epsilon$$

(b) Determine a second-order uniformly valid solution using the MMAE.

(c) Determine a second-order expansion using the MCE by letting

$$y = F(x; \epsilon) + G(\eta; \epsilon) + H(\zeta; \epsilon)$$

where $G \rightarrow 0$ as $\eta \rightarrow \infty$ and $H \rightarrow 0$ as $\zeta \rightarrow \infty$.

4.6. Determine first-order (two-term) uniformly valid expansions for (2.2.28) through (2.2.30) using both versions of the MCE.

4.7. Show that the MMAE cannot be used to obtain uniformly valid expansions for

$$\begin{aligned}\epsilon^2 y'' + y &= f(x) \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

Can you conclude from this example that the MMAE is inapplicable to oscillation problems?

4.8. Consider the problem given by (2.2.28) for $0 \leq r \leq b$ subject to the conditions

$$u(b) = b\alpha, \quad \frac{du}{dr}(b) = \alpha$$

Determine two-term uniformly valid expansions using (a) the MMAE and (b) the MCE.

4.9. The vibration of a beam with clamped ends is governed by

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{d^2 u}{dx^2} &= \lambda^2 u \\ u(0) &= u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\end{aligned}$$

Determine a first-order expansion for small • for u and λ .

4.10. For one-dimensional nondissipative steady flow, the heat transfer is governed by (Hanks, 1971)

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{d^2 T}{dx^2} + x \frac{dT}{dx} - xT &= 0 \\ T(0) &= T_0, \quad T(l) = T_l\end{aligned}$$

Determine first-order expansions using (a) the MMAE and (b) the two versions of the MCE.

4.11. Determine a first-order uniformly valid expansion for the equation

$$(x + \epsilon y)y' + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1}$$

using the MMAE. Can you conclude that the method of strained coordinates (MSC) is more suited for such problems?

4.12. Determine one-term expansions for the solutions of the problems

$$\begin{aligned}\epsilon y'' \pm (2x + 1)y' + y^2 &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using the MMAE and the MCE.

4.13. Determine one-term expansions for

$$\begin{aligned}\epsilon y'' + a(x)y' + y^2 &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using the MMAE and the MCE if $a(x)$ is (a) negative and (b) positive in $0 \leq x \leq 1$.

4.14. Determine a first-order expansion for the problem in the previous example if $a(x)$ has a simple zero at μ where $0 \leq \mu \leq 1$.

4.15. Determine first-order uniformly valid expansions for

$$\begin{aligned}\epsilon y'' \pm yy' - y &= 0 \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta\end{aligned}$$

using the MMAE and the MCE.

4.16. The laminar flow through a channel with porous walls can be reduced for the suction case to (Proudman, 1960; Terrill and Shrestha, 1965)

$$\begin{aligned}\epsilon f''' - ff'' + f'^2 &= c(\epsilon) \\ f(0) &= 1 - \alpha = a, \quad f'(0) = 0 \\ f(1) &= 1, \quad f'(1) = 0\end{aligned}$$

For a positive a show that (a) the first-order outer and inner expansions are

$$\begin{aligned}f^o &= a \cosh xb + \epsilon f_1(x) + \cdots \\ f^i &= 1 + \epsilon B(1 - \eta - e^{-\eta}) + \cdots, \quad \eta = (1 - x)/\epsilon \\ \beta &= ab + \epsilon \beta_1 + \cdots, \quad c = -\beta^2\end{aligned}$$

and determine b, B, β_1 , and f_1 ; (b) form a composite expansion; and (c) determine a first-order expansion using the MCE.

4.17. Consider the problem of the previous exercise for the case $a < 0$.

(a) Show that a uniformly valid expansion is given by

$$\begin{aligned}f^o &= 1 - \alpha + \alpha x + \epsilon f_1(x) + \cdots \\ f^i &= 1 + \alpha(1 - \eta - e^{-\eta}) + \cdots, \quad \eta = (1 - x)/\epsilon \\ f^I &= a + \frac{\epsilon \alpha}{\alpha - 1}(1 - \zeta - e^{-\zeta}) + \cdots, \quad \zeta = (\alpha - 1)x/\epsilon \\ \beta &= \alpha + \epsilon \beta_1 + \cdots, \quad c = \beta^2\end{aligned}$$

and determine f_1 and β_1 .

(b) Form a composite expansion.

(c) Determine a first-order expansion using the MCE.

4.18. Consider the problem

$$\begin{aligned}\epsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x)u_x &= 0 \\ u(0, y) &= F_1(y), \quad u(1, y) = F_2(y) \\ u(x, 0) &= G_1(x), \quad u(x, 1) = G_2(x)\end{aligned}$$

- (a) Show that a boundary layer exists at $x = 0$ if $a(x) > 0$ and at $x = 1$ if $a(x) < 0$. The first is characterized by $\xi = x/\epsilon$, while the second is characterized by $\zeta = (1 - x)/\epsilon$.
- (b) Determine the equations defining the first terms in the outer and inner expansions and match these expansions.
- (c) Use Latta's method to show that

$$u = A(x, y) + B(x, y)e^{-Q(x)/\epsilon} + O(\epsilon)$$

where

$$Q(x) = \int_0^x a(x)dx \quad \text{if} \quad a(x) > 0$$

and

$$Q(x) = \int_1^x a(x)dx \quad \text{if} \quad a(x) < 0$$

Determine the equations defining A and B .

4.19. Consider the problem

$$\begin{aligned}\epsilon(u_{xx} + u_{yy}) + a(x, y)u_x + b(x, y)u &= 0 \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x) \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y)\end{aligned}$$

- (a) Determine the equations defining the first terms in the outer and inner expansions and then match the expansions.
- (b) Use the MCE to obtain a first-order uniform expansion.
- 4.20. Consider the problem

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \nabla^4 u + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u_y &= 0 \\ u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x) \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y)\end{aligned}$$

Determine the equations defining the first terms in the outer and inner expansions and then match them.

4.21. Use the MCE to obtain a first-order uniform expansion for small R for (2.1.37) through (2.1.40) which describe flow past a sphere.

9.5 5 Variation of Parameters and Methods of Averaging

9.5.1 5.1. Variation of Parameters

This technique was originally developed to solve inhomogeneous linear equations when the general solutions to the corresponding homogeneous equations are known. As an example, consider the general linear secondorder inhomogeneous equation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \tag{5.1.1}$$

Let $y_1(x)$ and $y_2(x)$ be two linearly independent solutions of the corresponding homogeneous equation. Then we assume that the solution of (5.1.1) is

$$y = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x) \quad (5.1.2)$$

where the functions A_1 and A_2 need to be determined. Note that in the homogeneous problem A_1 and A_2 are constants, while in the inhomogeneous case they are allowed to vary, hence the name "variation of parameters."

Differentiating (5.1.2) with respect to x gives

$$y' = A_1y_1' + A_2y_2' + A_1'y_1 + A_2'y_2 \quad (5.1.3)$$

Since we have three unknown functions A_1 , A_2 , and y , while we have only the two equations (5.1.1) and (5.1.2), we are free to impose one more condition on A_1 , A_2 , and y . Let us demand that

$$A_1'y_1 + A_2'y_2 = 0 \quad (5.1.4)$$

Then (5.1.3) becomes

$$y' = A_1y_1' + A_2y_2' \quad (5.1.5)$$

Differentiating (5.1.5) with respect to x gives

$$y'' = A_1y_1'' + A_2y_2'' + A_1'y_1' + A_2'y_2' \quad (5.1.6)$$

Substituting for y , y' , and y'' into (5.1.1) and using the fact that y_1 and y_2 are solutions of the corresponding homogeneous equation, we obtain

$$A_1'y_1' + A_2'y_2' = R \quad (5.1.7)$$

Solving (5.1.4) and (5.1.7) for A_1' and A_2' yields

$$A_1' = \frac{-R(x)y_2(x)}{W(x)} \quad (5.1.8)$$

$$A_2' = \frac{R(x)y_1(x)}{W(x)} \quad (5.1.9)$$

where $W(x)$ is called the Wronskian and is given by

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (5.1.10)$$

The general solution of (5.1.1) is then

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \quad (5.1.11)$$

where c_1 and c_2 are constants, and the particular solution y_p is given by

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W(t)} R(t) dt \quad (5.1.12)$$

This technique has been extended for the determination of solutions of problems in which the inhomogeneity is a function of both the dependent and independent variables. The dependence on the dependent variable may be nonlinear. We next discuss two examples; the first is linear, while the second is nonlinear.

5.1.1. Time-dependent Solutions of the Schrödinger Equation

Let us consider the Schrödinger equation

$$H_0\psi + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -H_1\psi \quad (5.1.13)$$

subject to homogeneous boundary conditions, where H_0 and H_1 are timeindependent and time-dependent linear operators. We assume that

$$H_0\psi + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.14)$$

subject to the same homogeneous boundary conditions, has the solution

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{h} E_n \quad (5.1.15)$$

where a_n is a constant, and u_n and E_n are, respectively, the eigenfunctions and the corresponding eigenvalues of

$$H_0 u = E u \quad (5.1.16)$$

with the same homogeneous conditions. The eigenfunctions u_n are assumed to be orthonormal over the domain D .

Following Dirac (1926), we assume that the solutions of the perturbed problem are still given by (5.1.15) but with time-varying a_n . Substituting (5.1.15) into (5.1.13) gives

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [H_0 u_n(x) - E_n u_n(x)] e^{-i\omega_n t} + \frac{h}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

The first term on the left-hand side of this equation vanishes according to (5.1.16). Then (5.1.17) becomes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] \quad (5.1.18)$$

Multiplying (5.1.18) by $\bar{u}_m(x)$, integrating over the domain D , and using the orthonormality of u_n , we obtain

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_m t} H_{1mn} \quad (5.1.19)$$

where

$$H_{1mn} = \int_D \bar{u}_m(x) H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] dx \quad (5.1.20)$$

If H_1 does not contain any derivative with respect to t , then (5.1.19) becomes

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_{mn} t} \tilde{H}_{1mn} \quad (5.1.21)$$

where

$$\omega_{mn} = \frac{2\pi}{h} (E_m - E_n), \quad \tilde{H}_{1mn} = \int_D \tilde{u}_m(x) H_1 [u_n(x)] dx \quad (5.1.22)$$

Equation (5.1.21) is equivalent to the full problem given by (5.1.13). If H_1 is a small perturbation, then we can expand a_m as

$$a_m = a_{m0} + a_{m1} + a_{m2} + \cdots \quad (5.1.23)$$

where a_{m0} is a constant and equal to $a_{ni}(t=0)$, and $a_{mn} \ll a_{m(n-1)}$. Then the first approximation to a_m is given by

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} e^{i\omega_{mn}t} \tilde{H}_{1mn} \quad (5.1.24)$$

If in addition $a_{n0} = \delta_{nk}$, then (5.1.24) becomes

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} e^{i\omega_{mk}t} \tilde{H}_{1mk} \quad (5.1.25)$$

As an example, let

$$H_1\psi = \psi f(x) \sin \omega t \quad (5.1.26)$$

Then

$$\tilde{H}_{1mk} = f_{mk} \sin \omega t = -\frac{1}{2} i f_{mk} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \quad (5.1.27)$$

where

$$f_{mk} = \int_D \bar{u}_m(x) f(x) u_k(x) dx$$

Substituting in (5.1.25) and solving for a_{m1} , we obtain

$$a_{m1} = i \frac{\pi f_{mk}}{h} \left[\frac{e^{i(\omega_{mk} + \omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_{mk} - \omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} \right], \quad m \neq k \quad (5.1.28)$$

5.1.2. A Nonlinear Stability Example

The method of variation of parameters in conjunction with an expansion in terms of eigenfunctions has been developed and applied extensively to nonlinear stability problems by Stuart (1958, 1960a, b, 1961), Watson (1960), Eckhaus (1965), and Reynolds and Potter (1967). This technique has been unified and presented in a coherent manner by Eckhaus (1965).

To describe this technique let us consider the following example after Eckhaus (1965)

$$L(\phi) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) \quad (5.1.29)$$

where L is a linear operator and $F(\phi)$ is a nonlinear operator. Let us assume that L depends on one space variable, say x , with $0 \leq x \leq 1$, and let ϕ satisfy the linear homogeneous boundary conditions

$$B_1(\phi) = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad B_2(\phi) = 0 \quad \text{at} \quad x = 1 \quad (5.1.30)$$

It is obvious that the linearized problem

$$L(\phi) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.31)$$

subject to the boundary conditions (5.1.30), admits a solution of the form with

$$\phi = u(x)e^{-\lambda t} \quad (5.1.32)$$

$$L(u) + \lambda u = 0 \quad (5.1.33)$$

$$B_1(u) = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad B_2(u) = 0 \quad \text{at} \quad x = 1 \quad (5.1.34)$$

We assume that the eigenvalue problem (5.1.33) and (5.1.34) possesses a denumerable set of eigenvalues λ_n (real or complex), corresponding to the eigenfunctions u_n , for which we can solve. The eigenvalues are assumed to be different from each other and ordered such that $\text{Real}(\lambda_n) > \text{Real}(\lambda_{n-1})$. Let us assume that L is a self-adjoint operator so that the eigenfunctions u_n are orthogonal, and we assume that they have been normalized so that

$$\int_0^1 u_n(x) \bar{u}_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (5.1.35)$$

Then the general solution of the linearized problem can be written as

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (5.1.36)$$

where a_n are constants which can be determined from the initial conditions. For the nonlinear problem we assume that the solution is still expressible in the form (5.1.36) but with time-varying a_n , and we write it as

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \quad (5.1.37)$$

where $A_n = a_n \exp(-\lambda_n t)$. Substituting (5.1.37) into (5.1.29) leads to

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L[u_n(x)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dA_n}{dt}(t) u_n(x) = F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \quad (5.1.38)$$

Since $L(u_n) = -\lambda_n u_n$, (5.1.38) can be rewritten as

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{dA_n(t)}{dt} + \lambda_n A_n(t) \right] u_n(x) = F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \quad (5.1.39)$$

Multiplying (5.1.39) by $\bar{u}_m(x)$, integrating from $x = 0$ to $x = 1$, and using the orthonormality condition (5.1.35), we obtain

$$\frac{dA_m}{dt} + \lambda_m A_m = - \int_0^1 F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \bar{u}_m(x) dx \quad (5.1.40)$$

for $m = 1, 2, \dots$

If L is not self-adjoint, the eigenfunctions u_n are not mutually orthogonal. However, we can define the adjoint operator M by

$$\psi_1 L(\psi_2) - \psi_2 M(\psi_1) = \frac{d}{dx} [P(\psi_1, \psi_2)] \quad (5.1.41)$$

where ψ_1 and ψ_2 are two functions of x and P is a bilinear form. With this definition the adjoint problem is given by

$$M\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = 0 \quad (5.1.42)$$

and the boundary conditions are chosen such that $P(u, \tilde{u})$ vanishes at both $x = 0$ and $x = 1$. Under these conditions u_n and $\tilde{u}_n$ are orthogonal, and they can be normalized so that

$$\int_0^1 u_n(x) \tilde{u}_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (5.1.43)$$

The analysis in this case would be the same as in the self-adjoint case if we replace $\bar{u}_m(x)$ by $\tilde{u}_m(x)$. In particular, (5.1.40) becomes

$$\frac{dA_m}{dt} + \lambda_m A_m = - \int_0^1 F \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right] \tilde{u}_m(x) dx \quad (5.1.44)$$

9.5.2 5.2. The Method of Averaging

5.2.1. Van Der Pol's Technique

Van der Pol (1926) devised a technique, which is described in this section, to investigate the periodic solutions of the equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} + \epsilon k \hat{\lambda} \cos \lambda t \quad (5.2.1)$$

which is named for him. In (5.2.1) ϵ is assumed to be small, and λ (the frequency of the excitation) is assumed to differ from ω_0 (the natural frequency) by a small quantity which is of the order of ϵ . Under these assumptions the solution of (5.2.1) is assumed to have the form

$$u(t) = a_1(t) \cos \lambda t + a_2(t) \sin \lambda t \quad (5.2.2)$$

where $a_1(t)$ and $a_2(t)$ are assumed to be slowly varying functions of time; that is, $da_i/dt = O(\epsilon)$ and $d^2 a_i/dt^2 = O(\epsilon^2)$.

Differentiating (5.2.2) twice gives

$$\ddot{u} = -\lambda^2 a_1 \cos \lambda t - \lambda^2 a_2 \sin \lambda t - 2\dot{a}_1 \lambda \sin \lambda t + 2\dot{a}_2 \lambda \cos \lambda t + \ddot{a}_1 \cos \lambda t + \ddot{a}_2 \sin \lambda t \quad (5.2.3)$$

where the overdots denote differentiation with respect to t . Substituting (5.2.2) and (5.2.3) into (5.2.1), neglecting terms of order higher than ϵ , keeping in mind that $\dot{a}_i = O(\epsilon)$ while $\ddot{a}_i = O(\epsilon^2)$, and equating the coefficients of $\cos \lambda t$ and $\sin \lambda t$ on both sides, we obtain

$$2\dot{a}_1 + \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_2 - \epsilon a_1 (1 - \rho) = 0 \quad (5.2.4)$$

$$2\dot{a}_2 - \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_1 - \epsilon a_2 (1 - \rho) = \epsilon \dot{k} \quad (5.2.5)$$

where

$$\rho = \frac{a^2}{4} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4} \quad (5.2.6)$$

To analyze the periodic solutions of (5.2.1), we note that they correspond to the stationary solutions of (5.2.4) and (5.2.5); that is, they correspond to the solutions of

$$\begin{aligned} 2\sigma a_{20} - a_{10}(1 - \rho_0) &= 0 \\ -2\sigma a_{10} - a_{20}(1 - \rho_0) &= k \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

where σ is the detuning factor, and it is given by

$$\sigma = \frac{\lambda - \omega_0}{\epsilon} \quad (5.2.9)$$

Terms of $O(\epsilon^2)$ in (5.2.4) and (5.2.5) have been neglected. By adding the squares of (5.2.7) and (5.2.8) and using (5.2.6), we obtain the frequency response equation

$$\rho_0 [4\sigma^2 + (1 - \rho_0)^2] = \frac{k^2}{4} \quad (5.2.10)$$

5.2.2. The Krylov-bogoliubov Technique

We discuss this technique in connection with the general weakly nonlinear second-order equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \epsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) \quad (5.2.11)$$

When $\epsilon = 0$ the solution of (5.2.11) can be written as

$$u = a \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (5.2.12)$$

where a and θ are constants. To determine an approximate solution to (5.2.11) for ϵ small but different from zero, Krylov and Bogoliubov (1947) assumed that the solution is still given by (5.2.12) but with time-varying a and θ , and subject to the condition

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \phi, \quad \phi = \omega_0 t + \theta \quad (5.2.13)$$

Thus this technique is similar to van der Pol's technique which was discussed in the previous section. The only difference is in the form of the first term.

Differentiating (5.2.12) with respect to t gives

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \phi + \frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi$$

Hence

$$\frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi = 0 \quad (5.2.14)$$

on account of (5.2.13). Differentiating (5.2.13) with respect to t gives

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -a\omega_0^2 \cos \phi - \omega_0 \frac{da}{dt} \sin \phi - a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi$$

Substituting this expression into (5.2.11) and using (5.2.12), we obtain

$$\omega_0 \frac{da}{dt} \sin \phi + a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = -\epsilon f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (5.2.15)$$

Solving (5.2.14) and (5.2.15) for da/dt and $d\theta/dt$ yields

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\epsilon}{\omega_0} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (5.2.16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon}{a\omega_0} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (5.2.17)$$

Thus the original second-order differential equation (5.2.11) for u has been replaced by the two first-order differential equations (5.2.16) and (5.2.17) for the amplitude a and the phase θ .

To solve (5.2.16) and (5.2.17), we note that the right-hand sides of these equations are periodic with respect to the variable ϕ , hence $da/dt = O(\epsilon)$ and $d\theta/dt = O(\epsilon)$. Thus a and θ are slowly varying functions of time because ϵ is small; hence they change very little during the time $T = 2\pi/\omega_0$ (the period of the terms on the right-hand sides of these equations). Averaging (5.2.16) and (5.2.17) over the interval $[t, t+T]$, during which a and θ can be taken to be constants on the right-hand side of these equations, we obtain

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega_0} f_1(a) \quad (5.2.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon}{2a\omega_0} g_1(a) \quad (5.2.19)$$

where

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] d\phi \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] d\phi \quad (5.2.21)$$

Note that f_1 and g_1 are simply two coefficients of the Fourier series expansion of f .

As an example, let us consider Duffing's equation (2.1.1) in which

$$f(u, \dot{u}) = -u^3 \quad (5.2.22)$$

Hence

$$f_1(a) = 0, \quad g_1(a) = -\frac{3}{4}a^3 \quad (5.2.23)$$

Consequently, $a = \text{a constant}$ from (5.2.18), and

$$\theta = \frac{3}{8} \epsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0 \quad (5.2.24)$$

from (5.2.19). Therefore, to first approximation

$$u = a \cos \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} \right] t + O(\epsilon) \quad (5.2.25)$$

As a second example, we consider the van der Pol oscillator in which

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (5.2.26)$$

In this case

$$f_1 = -\omega_0 a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right), \quad g_1 = 0 \quad (5.2.27)$$

Hence $\theta = \theta_0 = \text{a constant}$ from (5.2.19), whereas

$$\frac{da}{dt} = \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) \quad (5.2.28)$$

Integrating (5.2.28) yields

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}} \quad (5.2.29)$$

The same basic idea of this technique underlies the method of Le Verrier (1856).

5.2.3. The Generalized Method of Averaging

In this technique we consider (5.2.12) and (5.2.13) as a transformation from u and du/dt into a and ϕ so that

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{\omega_0} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\epsilon}{a\omega_0} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

where the variable ϕ is called a rapidly rotating phase. Rather than integrate these equations as in the previous section, we define a near-identity transformation (see Bogoliubov and Mitropolski, 1961, p. 412)

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \epsilon a_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \epsilon^2 a_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots \\ \phi &= \bar{\phi} + \epsilon \phi_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \epsilon^2 \phi_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

from (a, ϕ) to $(\bar{a}, \bar{\phi})$, which is 2π periodic in $\bar{\phi}$ such that the transform of the system (5.2.30) has the form

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \epsilon A_1(\bar{a}) + \epsilon^2 A_2(\bar{a}) + \dots \\ \frac{d\bar{\phi}}{dt} &= \omega_0 + \epsilon B_1(\bar{a}) + \epsilon^2 B_2(\bar{a}) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

with A_i and B_i independent of $\bar{\phi}$. In this procedure a and ϕ need not be restricted to scalar functions (Mettler 1959; Sethna 1963; Morrison, 1966b). Higher-order effects were obtained by Volosov (1961, 1962), Musen (1965) and Zabreiko and Ledovskaja (1966). The inverse transformation of (5.2.31) was proposed by Kruskal (1962) and an order-by-order algorithm for this

latter procedure was obtained by Stern (1970b). Stern (1971b) used this technique to analyze slowly varying perturbed systems.

Substituting (5.2.31) and (5.2.32) into (5.2.30), expanding, and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations of the form

$$\begin{aligned}\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} + A_n &= F_n(\bar{a}, \bar{\phi}) \\ \omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} + B_n &= G_n(\bar{a}, \bar{\phi})\end{aligned}\tag{5.2.33}$$

where the right-hand sides are known functions of the lower-order terms in (5.2.31) and (5.2.32). In general, F_n and G_n contain short-period terms (denoted by superscript s) and long-period terms (denoted by superscript l). We choose A_n and B_n to be equal to the long-period terms; that is

Then

$$A_n = F_n^l, \quad B_n = G_n^l\tag{5.2.34}$$

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} = F_n^s, \quad \omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} = G_n^s\tag{5.2.35}$$

which can be solved successively for a_n and ϕ_n .

As an example, we consider the van der Pol oscillator in which

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \dot{u}, \quad \omega_0 = 1$$

In this case (5.2.30) become

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{8}\epsilon [a(4 - a^2) - 4a \cos 2\phi + a^3 \cos 4\phi] \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1 + \frac{1}{8}\epsilon [2(2 - a^2) \sin 2\phi - a^2 \sin 4\phi]\end{aligned}\tag{5.2.36}$$

Substituting (5.2.31) and (5.2.32) into (5.2.36) and equating coefficients of like powers of ϵ , we have

Order ϵ

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} + A_1 &= \frac{1}{8}\bar{a}(4 - \bar{a}^2) - \frac{1}{2}\bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8}\bar{a}^3 \cos 4\bar{\phi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} + B_1 &= \frac{1}{4}(2 - \bar{a}^2) \sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}\bar{a}^2 \sin 4\bar{\phi}\end{aligned}\tag{5.2.37}$$

Order ϵ^2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 = & -\frac{\partial a_1}{\partial \bar{a}} A_1 - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} B_1 \\
& + \frac{1}{8} a_1 [4 - 3\bar{a}^2 - 4 \cos 2\bar{\phi} + 3\bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi}] \\
& + \frac{1}{2} \bar{a} \phi_1 [2 \sin 2\bar{\phi} - \bar{a}^2 \sin 4\bar{\phi}]
\end{aligned} \tag{5.2.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 = & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{a}} A_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} B_1 \\
& - \frac{1}{4} \bar{a} a_1 (2 \sin 2\bar{\phi} + \sin 4\bar{\phi}) \\
& + \frac{1}{2} \phi_1 [(2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\phi} - \bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi}]
\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

Equating A_1 and B_1 to the long-period terms on the right-hand sides of (5.2.37), we have

$$A_1 = \frac{1}{8} \bar{a} (4 - \bar{a}^2), \quad B_1 = 0 \tag{5.2.40}$$

Consequently, (5.2.37) become

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} = & -\frac{1}{2} \bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8} \bar{a}^3 \cos 4\bar{\phi} \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} = & \frac{1}{4} (2 - \bar{a}^2) \sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8} \bar{a}^2 \sin 4\bar{\phi}
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

whose solution is

$$\begin{aligned}
a_1 = & -\frac{1}{4} \bar{a} \sin 2\bar{\phi} + \frac{1}{3} \bar{a} \bar{a}^3 \sin 4\bar{\phi} \\
\phi_1 = & -\frac{1}{8} (2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{32} \bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi}
\end{aligned} \tag{5.2.42}$$

With (5.2.40) and (5.2.42), (5.2.38) and (5.2.39) become

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 = & \text{short-period terms} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 = & -\frac{1}{8} + \frac{3}{16} \bar{a}^2 - \frac{11}{256} \bar{a}^4 + \text{short-period terms}
\end{aligned} \tag{5.2.43}$$

Equating A_2 and B_2 to the long-period terms on the right-hand sides of (5.2.43), we obtain

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16} \bar{a}^2 - \frac{11}{25} \bar{a}^4 \tag{5.2.44}$$

Therefore, to second order
where

$$u = a \cos \phi \tag{5.2.45}$$

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} - \frac{1}{4}\epsilon\bar{a} \left[\sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}\bar{a}^2 \sin 4\bar{\phi} \right] + O(\epsilon^2) \\ \phi &= \bar{\phi} - \frac{1}{8}\epsilon \left[(2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\phi} - \frac{1}{4}\bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi} \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{1}{8}\epsilon\bar{a} (4 - \bar{a}^2) + O(\epsilon^3) \\ \frac{d\bar{\phi}}{dt} &= 1 - \frac{1}{8}\epsilon^2 \left[1 - \frac{3}{2}\bar{a}^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\bar{a}^4 \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

This solution is in full agreement with that obtained in Section 5.7.4 by using Kamel's algorithm.

For canonical systems the transformation (5.2.31) and (5.2.32) can be effected in a more elegant manner by using von Zeipel's procedure (Section 5.6) or Lie series and transforms (Section 5.7.5). The latter is a simple and efficient algorithm which is built from the recursive application of a few elementary operations, thereby making it well suited for implementation on a computer. For noncanonical systems an efficient recursive algorithm was formulated by using Lie transforms (Section 5.7).

9.5.3 5.3. Struble's Technique

Struble (1962) developed a technique for treating weakly nonlinear oscillatory systems such as those governed by

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}, t) \quad (5.3.1)$$

He expressed the asymptotic solution of this equation for small ϵ in the form

$$u = a \cos(\omega_0 t - \theta) + \sum_{n=1}^N \epsilon^n u_n(t) + O(\epsilon^{N+1}) \quad (5.3.2)$$

where a and θ are slowly varying functions of time. If we set each $u_n = 0$, (5.3.2) reduces to the form of the solution used by Krylov and Bogoliubov to obtain a first approximation to u (see Section 5.2.2). Rather than carry out the details for a general function f , we use the specific function corresponding to the Duffing equation.

Thus we consider

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\epsilon u^3 \quad (5.3.3)$$

Substituting (5.3.2) into (5.3.3) gives

$$\begin{aligned} & \left[2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cos(\omega_0 t - \theta) \\ & + \left[-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \sin(\omega_0 t - \theta) \\ & + \epsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 \right) + \dots \\ & = -\epsilon a^3 \cos^3(\omega_0 t - \theta) - 3\epsilon^2 u_1 a^2 \cos^2(\omega_0 t - \theta) + \dots \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

If we consider terms through $O(\epsilon)$ and equate the coefficients of $\cos(\omega_0 t - \theta)$ and $\sin(\omega_0 t - \theta)$ on both sides, we obtain the following so-called variational equations

$$2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{3}{4} \epsilon a^3 \quad (5.3.5)$$

$$-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5.3.6)$$

This leaves the following so-called perturbational equation

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 = -\frac{1}{4} a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.7)$$

To first order in ϵ , (5.3.5) and (5.3.6) reduce to

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{8\omega_0} \epsilon a^2 \quad (5.3.8)$$

Hence

$$a = a_0, \quad \theta = -\frac{3}{8\omega_0} \epsilon a_0^2 t + \theta_0 \quad (5.3.9)$$

where a_0 and θ_0 are constants. Then the solution of (5.3.7) to first order is obtained by considering θ and a constants. The result is

$$u_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.10)$$

Hence the first-order solution becomes

$$u = a \cos(\omega_0 t - \theta) + \frac{1}{32\omega_0^2} \epsilon a^3 \cos 3(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.11)$$

where a and θ are given by (5.3.9).

With u_1 known the term

$$\begin{aligned} & -3\epsilon^2 u_1 a^2 \cos^2(\omega_0 t - \theta) \\ &= -\frac{3}{128\omega_0^2} \epsilon^2 a^5 [\cos(\omega_0 t - \theta) + 2\cos 3(\omega_0 t - \theta) + \cos 5(\omega_0 t - \theta)] \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Moreover, we have to calculate the terms of $O(\epsilon)$ in $(d^2 u_1/dt^2) + \omega_0^2 u_1$; that is, we must include the term

$$\frac{9}{16\omega_0} a^3 \frac{d\theta}{dt} \cos 3(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.13)$$

Now considering terms through $O(\epsilon^2)$ leads to the variational equations

$$2a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2 a}{dt^2} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{3}{4} \epsilon a^3 - \frac{3}{128\omega_0^2} \epsilon^2 a^5 \quad (5.3.14)$$

$$-2\omega_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5.3.15)$$

and the perturbational equation

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 = -\frac{3}{128\omega_0^2} a^5 [2 \cos 3(\omega_0 t - \theta) + \cos 5(\omega_0 t - \theta)] - \frac{9}{16\omega_0 \epsilon} a^3 \frac{d\theta}{dt} \cos 3(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.16)$$

The solution of (5.3.14) and (5.3.15) can be obtained by iteration starting with (5.3.9) to be

$$a = a_0, \quad \theta = -\frac{3}{8\omega_0} \epsilon a_0^2 t + \frac{15}{256\omega_0^3} \epsilon^2 a_0^4 t + \theta_0 + O(\epsilon^3) \quad (5.3.17)$$

where a_0 and θ_0 are constants. Substituting for $d\theta/dt$ from (5.3.9) into (5.3.16) and solving the resulting equation, we obtain within an error of $O(\epsilon)$ the following

$$u_2 = -\frac{21}{1024\omega_0^4} a^5 \cos 3(\omega_0 t - \theta) + \frac{1}{1024\omega_0^4} a^5 \cos 5(\omega_0 t - \theta) \quad (5.3.18)$$

Therefore the solution to second order is

$$u = a \cos(\omega t - \theta_0) + \frac{\epsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \frac{21\epsilon}{32\omega_0^2} a^2\right) \cos 3(\omega t - \theta_0) + \frac{\epsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t - \theta_0) + O(\epsilon^3) \quad (5.3.19)$$

where

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\epsilon a^2}{8\omega_0^2} - \frac{15\epsilon^2 a^4}{256\omega_0^4}\right) + O(\epsilon^3) \quad (5.3.20)$$

To carry out the solution to third order, we need to calculate the terms of $O(\epsilon^2)$ in $d^2 u_1/dt^2$, and the terms of $O(\epsilon)$ in $d^2 u_2/dt^2$, then write the variational and perturbational equations. This constitutes a major limitation of this technique. The second limitation is the iteration solution of the variational equations. Systematic ways of handling such problems are the Lindstedt-Poincaré technique (Section 3.1.1), the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique (Section 5.4), Lie series and transforms (Section 5.7), and the method of multiple scales discussed in Ch. 6.

9.5.4 5.4. The Krylov-bogoliubov-mitropolski Technique

In the course of their refinement of the first approximation for (5.2.11), which was discussed in Section 5.2.2, Krylov and Bogoliubov (1947) developed a technique for determining the solution to any approximation. This technique has been amplified and justified by Bogoliubov and Mitropolski (1961) and extended to nonstationary vibrations by Mitropolski (1965). They assumed an asymptotic expansion of the form

$$u = a \cos \psi + \sum_{n=1}^N \epsilon^n u_n(a, \psi) + O(\epsilon^{N+1}) \quad (5.4.1)$$

where each u_n is a periodic function of ψ with a period 2π , and a and ψ are assumed to vary with time according to

$$\frac{da}{dt} = \sum_{n=1}^N \epsilon^n A_n(a) + O(\epsilon^{N+1}) \quad (5.4.2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \sum_{n=1}^N \epsilon^n \psi_n(a) + O(\epsilon^{N+1}) \quad (5.4.3)$$

where the functions u_n , A_n , and ψ_n are chosen such that (5.4.1) through (5.4.3) satisfy the differential equation (5.2.11). In order to uniquely determine A_n and ψ_n , we require that no u_n contains $\cos \psi$. The derivatives are transformed according to

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (5.4.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{\partial}{\partial a} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \psi} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (5.4.5)$$

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \epsilon^n \frac{dA_n}{da} = \epsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + O(\epsilon^3) \quad (5.4.6)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \epsilon^n \frac{d\psi_n}{da} = \epsilon^2 A_1 \frac{d\psi_1}{da} + O(\epsilon^3) \quad (5.4.7)$$

We next illustrate this technique by its application to the Duffing, van der Pol, and Klein-Gordon equations.

54.1. The Duffing Equation

We consider the nonlinear oscillator

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\epsilon u^3 \quad (5.4.8)$$

which was treated previously in Sections 3.1.1, 5.2.2, and 5.3. Substituting (5.4.1) through (5.4.7) into (5.4.8) and equating coefficients of like powers of ϵ through ϵ^2 , we obtain

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_1 = 2\omega_0 \psi_1 a \cos \psi + 2\omega_0 A_1 \sin \psi - a^3 \cos^3 \psi \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_2 = & \left[(2\omega_0 \psi_2 + \psi_1^2) a - A_1 \frac{dA_1}{da} \right] \cos \psi \\ & + \left[2(\omega_0 A_2 + A_1 \psi_1) + a A_1 \frac{d\psi_1}{da} \right] \sin \psi \\ & - 3u_1 a^2 \cos^2 \psi - 2\omega_0 \psi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

In order that u_1 be periodic, the terms that produce secular terms on the right-hand side of (5.4.9) must vanish. Since $\cos^3 \psi = (3 \cos \psi + \cos 3\psi)/4$, this condition gives

$$A_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0} \quad (5.4.11)$$

Then the solution of (5.4.9) is

$$u_1 = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi \quad (5.4.12)$$

Substituting this first-order solution into (5.4.10) gives

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_2 = & \left(2\omega_0 \psi_2 + \frac{15a^4}{128\omega_0^2} \right) a \cos \psi + 2\omega_0 A_2 \sin \psi \\ & + \frac{a^5}{128\omega_0^2} (21 \cos 3\psi - 3 \cos 5\psi) \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Elimination of secular terms yields

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = -\frac{15a^4}{256\omega_0^3} \quad (5.4.14)$$

Then the solution of (5.4.13) is

$$u_2 = \frac{-a^5}{1024\omega_0^4}(21 \cos 3\psi - \cos 5\psi) \quad (5.4.15)$$

Therefore, to second order, u is given by

$$\begin{aligned} u = a \cos \psi + \frac{\epsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi \\ - \frac{\epsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4}(21 \cos 3\psi - \cos 5\psi) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

where

$$\frac{da}{dt} = 0 \text{ or } a = a_0 = \text{a constant} \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \frac{3\epsilon a^2}{8\omega_0} - \frac{15\epsilon^2 a^4}{256\omega_0^3} + O(\epsilon^3) \\ \psi &= \omega_0 \left[1 + \frac{3\epsilon a^2}{8\omega_0^2} - \frac{15\epsilon^2 a^4}{256\omega_0^4} \right] t + \psi_0 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

where ψ_0 is a constant. This solution agrees with (5.3.19) and obtained using Struble's method.

5.4.2. The Van Der Pol Oscillator

We discuss next the nonlinear oscillator

$$\ddot{u} + u = \epsilon (1 - u^2) \dot{u} \quad (5.4.19)$$

treated in Sections 5.2.2 and 5.2.3. Substituting (5.4.1) through (5.4.7) into (5.4.19) and equating coefficients of equal powers of ϵ through ϵ^2 , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 &= 2\psi_1 a \cos \psi + 2A_1 \sin \psi \\ &\quad - a \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right) \sin \psi + \frac{1}{4}a^3 \sin 3\psi \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 &= \left[(2\psi_2 + \psi_1^2) a - A_1 \frac{dA_1}{da} \right] \cos \psi \\ &\quad + \left[2(A_2 + A_1\psi_1) + aA_1 \frac{d\psi_1}{da} \right] \sin \psi \\ &\quad - 2\psi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + (1 - a^2 \cos^2 \psi) \\ &\quad \times \left(A_1 \cos \psi - a\psi_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + a^2 u_1 \sin 2\psi \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Elimination of secular terms from the right-hand side of (5.4.20) gives
Hence

$$\psi_1 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{2}a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) \quad (5.4.22)$$

$$u_1 = -\frac{a^3}{32} \sin 3\psi \quad (5.4.23)$$

With this solution (5.4.21) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 = & \left[2a\psi_2 - A_1 \frac{dA_1}{da} + \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) A_1 + \frac{a^5}{128} \right] \cos \psi \\ & + 2A_2 \sin \psi + \frac{a^3(a^2 + 8)}{128} \cos 3\psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

For there to be no secular terms in u_2

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = \frac{A_1}{2a} \left(\frac{dA_1}{da} - 1 + \frac{3}{4}a^2 \right) - \frac{a^4}{256} \quad (5.4.25)$$

Hence

$$u_2 = -\frac{5a^5}{3072} \cos 5\psi - \frac{a^3(a^2 + 8)}{1024} \cos 3\psi \quad (5.4.26)$$

Therefore the solution to second order is given by

$$\begin{aligned} u = & a \cos \psi - \frac{\epsilon a^3}{32} \sin 3\psi \\ & - \frac{\epsilon^2 a^3}{1024} \left[\frac{5}{3} a^2 \cos 5\psi + (a^2 + 8) \cos 3\psi \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

where

$$\frac{da}{dt} = \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right), \quad a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}} \quad (5.4.28)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 + \epsilon^2 \left[\frac{A_1}{2a} \left(\frac{dA_1}{da} - 1 + \frac{3}{4}a^2 \right) - \frac{a^4}{256} \right] \quad (5.4.29)$$

where a_0 is a constant. Using (5.4.22) and (5.4.28), we can write (5.4.29) as

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon}{8a} \left(1 - \frac{7}{4}a^2\right) \frac{da}{dt}$$

Hence

$$\psi = t - \frac{\epsilon^2}{16}t - \frac{\epsilon}{8} \ln a + \frac{7\epsilon}{64}a^2 + \psi_0 \quad (5.4.30)$$

where ψ_0 is a constant.

5.4.3. The Klein-gordon Equation

As a third example, we consider nonlinear waves governed by

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \lambda^2 u = \epsilon f(u, u_t, u_x) \quad (5.4.31)$$

after Montgomery and Tidman (1964). If $\epsilon = 0$, (5.4.31) admits solutions of the form

$$u = a \cos(k_0 x - \omega_0 t + \phi) \quad (5.4.32)$$

where a and ϕ are constants, and k_0 and ω_0 satisfy the dispersion relationship

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + \lambda^2 \quad (5.4.33)$$

For small but finite ϵ , we seek an expansion of the form

$$u = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \dots \quad (5.4.34)$$

where a is a slowly varying function of both time and position according to

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots \quad (5.4.35)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (5.4.36)$$

and ψ is a new phase variable which coincides with the phase of (5.4.32) for $\epsilon = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega_0 + \epsilon C_1(a) + \epsilon^2 C_2(a) + \dots \quad (5.4.37)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = k_0 + \epsilon D_1(a) + \epsilon^2 D_2(a) + \dots \quad (5.4.38)$$

In this case also, no u_n contains the fundamental $\cos \psi$.

Substituting (5.4.34) through (5.4.38) into (5.4.31), using (5.4.33), and equating the coefficients of ϵ on both sides, we obtain

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) = & -2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1) \sin \psi \\ & -2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) \cos \psi \\ & + f[a \cos \psi, a\omega_0 \sin \psi, -ak_0 \sin \psi] \end{aligned} \quad (5.4.39)$$

We now Fourier analyze f in terms of ψ as

$$\begin{aligned} f[a \cos \psi, a\omega_0 \sin \psi, -ak_0 \sin \psi] \\ = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(a) \sin n\psi + g_n(a) \cos n\psi] \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

Eliminating secular terms, we have

$$2\omega_0 A_1 + 2c^2 k_0 B_1 = f_1(a) \quad (5.4.41)$$

$$2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) = g_1(a) \quad (5.4.42)$$

Then the solution of (5.4.39) is

$$u_1 = \frac{g_0(a)}{\lambda^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \sin n\psi + g_n(a) \cos n\psi}{\lambda^2 (1 - n^2)} \quad (5.4.43)$$

Substituting for A_1, B_1, C_1 , and D_1 from (5.4.35) through (5.4.38) into (5.4.41) and (5.4.42), we obtain

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial a}{\partial x} = \epsilon \frac{f_1(a)}{2\omega_0} \quad (5.4.44)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} = \epsilon \frac{g_1(a)}{2a\omega_0} \quad (5.4.45)$$

where $\omega'_0 = d\omega_0/dk_0$, the group velocity, and

$$\begin{aligned} \text{If } f_1 &= 0 & \beta &= \psi - k_0 x + \omega_0 t \\ & & a &= h_1 (x - \omega'_0 t) \\ \beta &= \epsilon (x + \omega'_0 t) \frac{g_1(a)}{4a\omega_0\omega'_0} + h_2 (x - \omega'_0 t) \end{aligned}$$

where h_1 and h_2 are determined from the initial or boundary conditions. Equations (5.4.44) and (5.4.45) can be solved easily if a and β are functions of either time or position only.

9.5.5 5.5. The Method of Averaging by Using Canonical Variables

Let us consider a conservative dynamic system governed by the following Lagrange equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.5.1)$$

where $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ is the generalized coordinate vector, t is the independent variable, overdots denote differentiation with respect to t , $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \equiv T - V$ is the Lagrangian, and T and V are the kinetic and potential energies. Let us define the generalized momentum vector $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ by

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.5.2)$$

and the Hamiltonian H by

$$H = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L \quad (5.5.3)$$

where $\mathbf{p}^T$ denotes the transpose of $\mathbf{p}$ (if $\mathbf{p}$ is a column vector, $\mathbf{p}^T$ is a row vector). Considering H as a function of $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, and t only, we can write

$$dH = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (5.5.4)$$

Also, from (5.5.3)

$$dH = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (5.5.5)$$

The second and third terms on the right-hand side of (5.5.5) cancel according to (5.5.2). Moreover, since $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$ from (5.5.1) and (5.5.2), we can write (5.5.5) as

$$dH = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^N \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (5.5.6)$$

Comparing (5.5.4) and (5.5.6), we obtain the following canonical equations of Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (5.5.7)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.5.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.5.9)$$

These equations replace Lagrange's equations.

Under a transformation from $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ to $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ and $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, (5.5.7) and (5.5.8) are transformed into

$$\dot{Q}_i = f_i(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \quad (5.5.10)$$

$$\dot{P}_i = g_i(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \quad (5.5.11)$$

If there exists a function $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ such that

$$f_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \text{and} \quad g_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (5.5.12)$$

then (5.5.10) and (5.5.11) assume the form

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (5.5.13)$$

and $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{P}$ are called canonical variables, and the transformation from $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ to $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{P}$ is said to be a canonical transformation with respect to the function K .

Canonical transformations can be generated using a so-called generating function $S(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ according to (e.g., Goldstein, 1965, Chapter 8; Meirovitch, 1970, Chapter 9)

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \quad (5.5.14)$$

Once these equations are solved for $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ and $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, K is related to H by

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.5.15)$$

If a canonical transformation can be found such that $K \equiv 0$, then $\mathbf{P}$ is a constant vector according to the second relationship in (5.5.13), hence S is a function of $\mathbf{q}$ and t only. Since $p_i = \partial S / \partial q_i$ from the first relationship in (5.5.14), S must satisfy the following so-called Hamilton-Jacobi equation

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, q_2, \dots, q_N, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.5.16)$$

If S is a complete solution of (5.5.16), then (5.5.14) furnishes a complete set of integrals of the equations

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.5.17)$$

Complete solutions of (5.5.16) are not available for a general H . However, if $H = H_0 + \tilde{H}$ where $\tilde{H}$ is small compared to H_0 and a complete solution $S_0(P_1, \dots, P_N, q_1, \dots, q_N, t)$ is available for

$$H_0 \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N, t \right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0 \quad (5.5.18)$$

then an approximate solution of (5.5.17) can be obtained by using the method of averaging in conjunction with the method of variation of parameters. Thus we use a generating function

$$S = S_0(P_1, \dots, P_N, q_1, \dots, q_N, t) \quad (5.5.19)$$

where $\mathbf{P}$ is time-varying rather than being a constant. Hence $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ are given by

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (5.5.20)$$

where

$$K = H_0 + \tilde{H} + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \tilde{H} \quad (5.5.21)$$

as a result of (5.5.18). If the solution $\mathbf{q}_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ and $\mathbf{p}_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ of (5.5.17) with $H = H_0$ has a period T with respect to t , then an approximate solution to (5.5.17) is still given by $\mathbf{q}_0$ and $\mathbf{p}_0$ but $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ are given by (5.5.20) with K replaced by its average over T ; that is, by

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) dt \quad (5.5.22)$$

In (5.5.22), $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ are held constant.

We next illustrate this technique by its application to three specific examples.

5.5.1. The Duffing Equation

We consider again the equation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \epsilon q^3 = 0 \quad (5.5.23)$$

The Hamiltonian corresponding to this equation is

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) + \frac{1}{4} \epsilon q^4 \quad (5.5.24)$$

The Hamilton-Jacobi equation corresponding to the case $\epsilon = 0$ is

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega_0^2 q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.5.25)$$

This equation can be solved by separation of variables; that is, by letting

$$S = S_1(q) + \sigma(t) \quad (5.5.26)$$

Equation (5.5.25) separates into

$$\dot{\sigma} = -\alpha \quad \text{or} \quad \sigma = -\alpha t \quad (5.5.27)$$

and

$$\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \omega_0^2 q^2 = 2\alpha \quad \text{or} \quad S_1 = \int \sqrt{2\alpha - \omega_0^2 q^2} dq \quad (5.5.28)$$

Hence

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha - \omega_0^2 q^2} dq \quad (5.5.29)$$

with α the new momentum. Consequently, the new coordinate β is given by

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \int (2\alpha - \omega_0^2 q^2)^{-1/2} dq = -t + \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 q}{\sqrt{2\alpha}} \quad (5.5.30)$$

so that

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega_0} \sin \omega_0(t + \beta) \quad (5.5.31)$$

We could have written this solution for (5.5.23) by inspection if $\epsilon = 0$. However, the canonical variables α and β were obtained naturally by solving the Hamilton-Jacobi equation (5.5.25).

Since $\tilde{H} = (1/4)\epsilon q^4 = (\epsilon\alpha^2/\omega_0^4) \sin^4 \omega_0(t + \beta)$, the variational equations (5.5.20) become

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} \quad (5.5.32a)$$

Now

$$\tilde{H} = \frac{\epsilon\alpha^2}{\omega_0^4} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right]$$

so that

$$\langle \tilde{H} \rangle = \frac{3\epsilon\alpha^2}{8\omega_0^4} \quad (5.5.32b)$$

Hence (5.5.32a) become

$$\alpha = \text{a constant} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{3\epsilon\alpha}{4\omega_0^4} t + \beta_0 \quad (5.5.33)$$

where β_0 is a constant. Therefore, to first approximation

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega_0} \sin \left[\omega_0 \left(1 + \frac{3\epsilon\alpha}{4\omega_0^4} \right) t + \omega_0\beta_0 \right] \quad (5.5.34)$$

in agreement with the expansions obtained in Sections 5.4.1 and 5.3 by using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski and Struble techniques if we identify $\sqrt{2\alpha}/\omega_0$ by a_0 .

5.5.2. The Mathieu Equation

As a second example, we consider

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \epsilon \cos 2t) q = 0 \quad (5.5.35)$$

for positive ω . If we let

$$\dot{q} = p \quad (5.5.36)$$

then

$$\dot{p} = -(\omega^2 + \epsilon \cos 2t) q \quad (5.5.37)$$

from (5.5.35). These equations can be written in the form

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (5.5.38)$$

where

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{1}{2} \epsilon q^2 \cos 2t \quad (5.5.39)$$

As in Section 5.5.1, the solution of (5.5.38) for $\epsilon = 0$ is

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \cos \omega(t + \beta) \quad (5.5.40)$$

Hence $\tilde{H} = (1/2)\epsilon q^2 \cos 2t = (\epsilon\alpha/\omega^2) \cos 2t \cos^2 \omega(t + \beta)$ and the variational equations (5.5.20) become

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} \quad (5.5.41)$$

Since

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\epsilon\alpha}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] \right\} \\ \langle \tilde{H} \rangle &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } \omega \text{ is away from } 1 \\ \frac{\epsilon\alpha}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] & \text{if } \omega - 1 = O(\epsilon) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.5.42)$$

In the former case α and β are constants to first approximation. In the second case we introduce the new canonical variables α^* and β^* using the generating function

$$S^* = \alpha^*[(\omega - 1)t + \omega\beta] \quad (5.5.43)$$

so that

$$\alpha = \frac{\partial S^*}{\partial \beta} = \omega\alpha^* \quad (5.5.44)$$

$$\beta^* = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha^*} = (\omega - 1)t + \omega\beta \quad (5.5.45)$$

Consequently, α^* and β^* are canonical variables with respect to the Hamiltonian

$$K = \langle \tilde{H} \rangle + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega} \cos 2\beta^* + (\omega - 1)\alpha^* \quad (5.5.46)$$

Hence

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = \frac{\epsilon \alpha^*}{2\omega} \sin 2\beta^* \quad (5.5.47)$$

$$\dot{\beta}^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = \omega - 1 + \frac{\epsilon}{4\omega} \cos 2\beta^* \quad (5.5.48)$$

Elimination of t from (5.5.47) and (5.5.48) gives

$$\frac{d\alpha^*}{\alpha^*} = -\frac{\frac{\epsilon}{4\omega} d(\cos 2\beta^*)}{\omega - 1 + \frac{\epsilon}{4\omega} \cos 2\beta^*}$$

Hence

$$\ln \alpha^* = -\ln \left[\omega - 1 + \frac{\epsilon}{4\omega} \cos 2\beta^* \right] + \text{a constant} \quad (5.5.49)$$

Thus the motion is unstable (α^* unbounded) if

$$\frac{\epsilon}{4\omega} > |\omega - 1|$$

That is, to first approximation

$$\omega < 1 + \frac{1}{4}\epsilon \text{ or } \omega > 1 - \frac{1}{4}\epsilon \quad (5.5.50)$$

The curves

$$\omega = 1 \pm \frac{1}{4}\epsilon \quad \text{or} \quad \omega^2 = 1 \pm \frac{1}{2}\epsilon \quad (5.5.51)$$

separate the stable from the unstable regions in the $\omega - \epsilon$ plane. These curves are in agreement with those obtained in Section 3.1.2 by using the Lindstedt-Poincaré method and in Section 3.1.3 by using Whittaker's method.

5.5.3. A Swinging Spring

Following Kane and Kahn (1968), we consider the nonlinear oscillations of a spring swinging in a vertical plane as shown in Figure 5-1. This problem

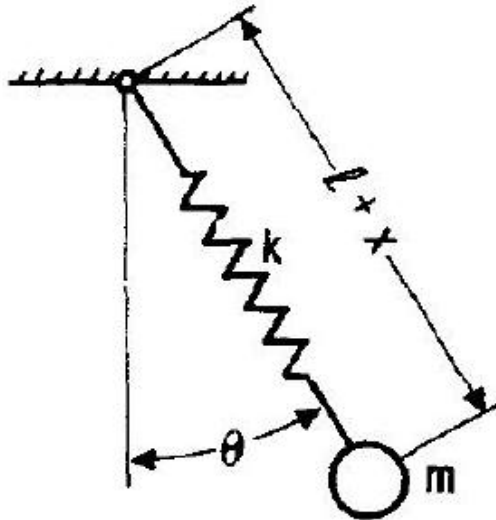


Figure 5-1

was introduced by Gorelik and Witt (1933) to illustrate internal resonances. The kinetic and potential energies of the mass m are

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (5.5.52)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mg(l+x)(1 - \cos \theta) \quad (5.5.53)$$

where x is the stretch in the spring beyond its equilibrium. Therefore

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2 \right] - mg(l+x)(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.5.54)$$

Since

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+x)^2 \dot{\theta} \quad (5.5.55)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m(l+x)^2} \right] + mg(l+x)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \quad (5.5.56)$$

For small x and θ and $x = O(\theta)$, H can be expanded into

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{ml^2} \right] + \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mgx\theta^2 \\ &\quad - \frac{xp_\theta^2}{ml^3} - \frac{1}{24}mgl\theta^4 + \frac{3x^2p_\theta^2}{2ml^4} + O(\theta^5) \end{aligned} \quad (5.5.57)$$

If we keep the quadratic terms in H , then a complete solution of the corresponding Hamilton-Jacobi equation can be obtained as follows. The Hamilton-Jacobi equation in this case is

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + kx^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + mgl\theta^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.5.58)$$

where $S = S(x, \theta, t)$. To solve this equation we let
hence

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + W_1(x) + W_2(\theta) \quad (5.5.59)$$

ence

$$\frac{1}{m} \left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 + kx^2 = 2\alpha_1 \quad (5.5.60)$$

$$\frac{1}{ml^2} \left(\frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 + mgl\theta^2 = 2\alpha_2 \quad (5.5.61)$$

Therefore

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)} \quad (5.5.62)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)} \quad (5.5.63)$$

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + \int \sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)} dx + \int \sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)} d\theta \quad (5.5.64)$$

Consequently

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{mdx}{\sqrt{m(2\alpha_1 - kx^2)}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin x \sqrt{\frac{k}{2\alpha_1}} \quad (5.5.65)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -t + \int \frac{ml^2 d\theta}{\sqrt{ml^2(2\alpha_2 - mgl\theta^2)}} = -t + \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin \theta \sqrt{\frac{mgl}{2\alpha_2}} \quad (5.5.66)$$

Hence

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{k}} \sin B_1 \quad (5.5.67)$$

$$\theta = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{mgl}} \sin B_2 \quad (5.5.68)$$

$$p_x = \sqrt{2m\alpha_1} \cos B_1 \quad (5.5.69)$$

$$p_\theta = l\sqrt{2m\alpha_2} \cos B_2 \quad (5.5.70)$$

where

$$B_i = \omega_i(t + \beta_i), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

To first approximation the variational equations correspond to

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2}mgx\theta^2 - \frac{xp_\theta^2}{ml^3} \\ &= -\frac{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}{l\sqrt{2k}} \left\{ \sin B_1 + \frac{3}{2} \sin(B_1 + 2B_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1 - 2\omega_2\beta_2] \right\} \end{aligned} \quad (5.5.71)$$

Thus $\tilde{H}$ is fast varying unless $\omega_1 - 2\omega_2 = \epsilon$, where ϵ is a small quantity. In the latter case the slowly varying part of $\tilde{H}$ is

$$\langle \tilde{H} \rangle = -\frac{3}{2l\sqrt{2k}} \alpha_2 \sqrt{\alpha_1} \sin(\epsilon t + \omega_1\beta_1 - 2\omega_2\beta_2) \quad (5.5.72)$$

To eliminate the explicit dependence of $\langle \tilde{H} \rangle$ on t , we make a further canonical transformation from α_1 and β_1 to α_1^* and β_1^* according to

$$S^*(\alpha_1^*, \beta_1, t) = \frac{\epsilon\alpha_1^*}{2\omega_2} t + \frac{\omega_1}{2\omega_2} \alpha_1^* \beta_1 \quad (5.5.73)$$

Thus

$$\alpha_1 = \frac{\partial S^*}{\partial \beta_1} = \frac{\omega_1}{2\omega_2} \alpha_1^* \quad (5.5.74)$$

$$\beta_1^* = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_1^*} = \frac{\epsilon}{2\omega_2} t + \frac{\omega_1}{2\omega_2} \beta_1$$

$$K = \langle \tilde{H} \rangle + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{\epsilon\alpha_1^*}{2\omega_2} - \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 k}} \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \sin 2\omega_2(\beta_1^* - \beta_2) \quad (5.5.75)$$

Therefore $K = \text{a constant}$ because $\partial K / \partial t = 0$. The variational equations become

$$\dot{\alpha}_1^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta_1^*} = 2\omega_2 C \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \cos \gamma \quad (5.5.76)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\frac{\partial K}{\partial \beta_2} = -2\omega_2 C \alpha_2 \sqrt{\alpha_1^*} \cos \gamma \quad (5.5.77)$$

$$\dot{\beta}_1^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha_1^*} = \frac{\epsilon}{2\omega_2} - \frac{1}{2} C \alpha_2 \alpha_1^{*-1/2} \sin \gamma \quad (5.5.78)$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = -C \sqrt{\alpha_1^*} \sin \gamma \quad (5.5.79)$$

where

$$C = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 k}}, \quad \gamma = 2\omega_2 (\beta_1^* - \beta_2) \quad (5.5.80)$$

Equations similar to (5.5.76) through (5.5.80) were obtained by Mettler (1959) and Sethna (1965) using the method of averaging.

Adding (5.5.76) and (5.5.77) and integrating, we obtain

$$\alpha_1^* + \alpha_2 = E = \text{a constant} \quad (5.5.81)$$

Hence the motion is completely bounded. Elimination of γ from (5.5.75) and (5.5.77) gives

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{\alpha}_2}{2\omega_2} \right)^2 &= C^2 \alpha_2^2 (E - \alpha_2) - \left[\frac{\epsilon (E - \alpha_2)}{2\omega_2} - K \right]^2 \\ &= C^2 [F^2(\alpha_2) - G^2(\alpha_2)] \end{aligned} \quad (5.5.82)$$

where

$$F = \pm \alpha_2 \sqrt{E - \alpha_2}, \quad G = \frac{1}{C} \left[\frac{\epsilon (E - \alpha_2)}{2\omega_2} - K \right] \quad (5.5.83)$$

The functions $F(\alpha_2)$ and $G(\alpha_2)$ are shown schematically in Figure 5-2. For

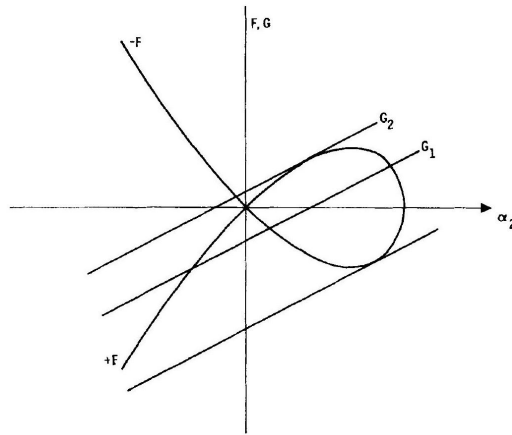


Figure 5-2

real motion, F^2 must be greater than or equal to G^2 . The points where G meets F correspond to the vanishing of both $\dot{\alpha}_2$ and $\dot{\alpha}_1^*$. A curve such as G_1 which meets both branches of F

or one branch of F at two different points corresponds to a periodic motion for the amplitudes and the phases, hence it corresponds to an aperiodic motion. The solution for the amplitudes and the phases can be written in terms of Jacobi elliptic functions. However, the points where G_2 touches the branches of F represent periodic motions where the nonlinearity adjusts the frequencies ω_1 and ω_2 to produce perfect resonance.

9.5.6 5.6. Von Zeipel's Procedure

To determine a first approximation to Hamiltonian systems, the method of variation of parameters in conjunction with the method of averaging was used in Section 5.5. To determine higher approximations, von Zeipel (1916) devised a technique which is described and applied in this section to the first two examples discussed in the previous section. The essence of this technique is to expand the generating function S in powers of a small parameter ϵ as $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n$, and then determine S_n recursively by solving a chain of partial differential equations.

Let the system under consideration be described by the Hamiltonian

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n H_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \epsilon \ll 1 \quad (5.6.1)$$

with $\mathbf{q}$ the generalized coordinate vector and $\mathbf{p}$ the conjugate momenta vector. Let $S_0 = S_0(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ be a complete solution of the Hamilton-Jacobi equation

$$H_0 \left[\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t \right] + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0 \quad (5.6.2)$$

and let $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ and $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ be the solutions of

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S_0}{\partial P_i} \quad (5.6.3)$$

If we assume $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ to be time varying rather than being constants and use $S = S_0(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$ as a generating function to transform from the canonical system $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ to the canonical system $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$, we transform the Hamiltonian from H into

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n H_n[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] + \frac{\partial S_0}{\partial t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n H_n[\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \tilde{H}_n(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Hence $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ are governed by the variational equations

$$\dot{\mathbf{P}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \quad (5.6.5)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \quad (5.6.6)$$

To determine an approximate solution to (5.6.5) through (5.6.6) to any order, we introduce a near-identity transformation from the canonical system $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ to the canonical system $\mathbf{P}^*$ and $\mathbf{Q}^*$ using the generating function

$$S = \sum_{i=1}^N P_i * Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n S_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) \quad (5.6.7)$$

so that

$$P_i = P_i^* + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial Q_i}(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) \quad (5.6.8)$$

and $\hat{H}$ is transformed into

$$K \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n K_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \tilde{H}_n \left[\left(\mathbf{P}^* + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \frac{\partial S_m}{\partial \mathbf{Q}} \right), \mathbf{Q}, t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial t} \quad (5.6.9)$$

To determine K_n we expand the right-hand side of (5.6.9) for small ϵ and then equate the coefficients of equal powers of ϵ on both sides to obtain

$$K_1 = \tilde{H}_1(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (5.6.10)$$

$$K_2 = \tilde{H}_2(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial P_i}(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (5.6.11)$$

$$K_n = F_n + \frac{\partial S_n}{\partial t} \quad (5.6.12)$$

where $F_n = F_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t)$ is a known function of $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_n$ and $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$. The functions S_n are still undetermined and they can be chosen in any manner desired. Since F_n contains, in general, a short-period term F_n^s and a long-period term F_n^l , we choose

$$K_n = F_n^l \quad \text{and} \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} = -F_n^s \quad (5.6.13)$$

Thus K_n contains long-period terms only, while S_n contains short-period terms only. The functions S_n can be obtained by solving successively the chain of partial differential equations in (5.6.13).

The basic idea underlying this technique is the same as that underlying the generalized method of averaging of Section 5.2.3. Stern (1971c) showed that, for Hamiltonian systems, Kruskal's technique is equivalent to von Zeipel's technique. In both techniques we introduce near-identity transformations from the old dependent variables, which contain long- as well as short-period terms, into new dependent variables which contain longperiod terms. The basic difference between the two techniques is that the transformation in the von Zeipel method must be canonical, while the transformation in the generalized method of averaging need not be canonical and the system need not be described by a Hamiltonian. Morrison (1966b) showed that up to second order the von Zeipel procedure is a particular case of the generalized method of averaging. Giacaglia (1964) carried

out the expansion to any order, while Barrar (1970) investigated the convergence of the von Zeipel procedure. Musen (1965) showed that the equations governing the expansion take a concise form if written in terms of Faa de Bruno operators (1857). We next determine second-order expansions for the first two problems discussed in the previous section.

5.6.1. The Duffing Equation

As a first example, we consider the Duffing equation (5.5.23) which corresponds to the Hamiltonian (5.5.24). The solution of the problem corresponding to H_0 is given by (5.5.31) as found in Section 5.5.1. Hence

$$\tilde{H} = \frac{\epsilon \alpha^2}{\omega_0^4} \sin^4 \omega_0(t + \beta) \quad (5.6.14)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} \quad (5.6.15)$$

To determine an approximate solution to (5.6.15), we introduce a nearidentity transformation from α and β to α^* and β^* using the generating function

Hence

$$S = \alpha^* \beta + \epsilon S_1(\alpha^*, \beta, t) + \epsilon^2 S_2(\alpha^*, \beta, t) + \dots \quad (5.6.16)$$

$$\alpha = \alpha^* + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + \dots \quad (5.6.17)$$

$\tilde{H}$ is transformed into

and the Hamiltonian $\tilde{H}$ is transformed into

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n K_n(\alpha^*, \beta, t) \\ &= \frac{\epsilon}{\omega_0^4} \sin^4 \omega_0(t + \beta) \left[\alpha^* + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + \dots \right]^2 \\ &\quad + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

Equating coefficients of equal powers of ϵ on both sides, we have

$$K_1 = \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^4} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] + \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (5.6.19)$$

$$K_2 = \frac{2\alpha^*}{\omega_0^4} \frac{\partial S_1}{\partial \beta} \sin^4 \omega_0(t + \beta) + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (5.6.20)$$

Equating K_1 to the long-period term on the right-hand side of (5.6.19), we obtain

$$K_1 = \frac{3\alpha^{*2}}{8\omega_0^4} \quad (5.6.21)$$

Hence (5.6.19) becomes

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^4} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t + \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] = 0 \quad (5.6.22)$$

The solution of (5.6.22) is

$$S_1 = \frac{\alpha^{*2}}{4\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta) \right] \quad (5.6.23)$$

With this value of S_1 , (5.6.20) becomes

$$K_2 = \frac{\alpha^{*3}}{\omega_0^8} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] \sin^4 \omega_0(t + \beta) + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (5.6.24)$$

Equating K_2 to the long-period term on the right-hand side of this equation, we have

$$K_2 = -\frac{17\alpha^{*3}}{64\omega_0^8} \quad (5.6.25)$$

Hence, to second order

$$K = \epsilon \frac{3\alpha^{*2}}{8\omega_0^4} - \epsilon^2 \frac{17\alpha^{*3}}{64\omega_0^8} \quad (5.6.26)$$

and

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^* &= -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = 0 \quad \text{or} \quad \alpha^* = a \text{ constant} \\ \dot{\beta}^* &= \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = \frac{3}{4} \epsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} - \frac{51}{64} \epsilon^2 \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^8} \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

or

$$\beta^* = \left(\frac{3}{4} \epsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} - \frac{51}{64} \epsilon^2 \frac{\alpha^{*2}}{\omega_0^8} \right) t + \frac{\beta_0}{\omega_0} \quad (5.6.28)$$

where β_0 is a constant.

Having determined S_1 , we obtain

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots \\ &= \alpha^* + \epsilon \frac{\alpha^{*2}}{2\omega_0^4} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta) \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.6.29)$$

$$\begin{aligned} \beta^* &= \beta + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} + \dots \\ &= \beta + \epsilon \frac{\alpha^*}{2\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta) \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

Solving (5.6.29) and (5.6.30) for α and β in terms of α^* and β^* gives

$$\alpha = \alpha^* + \frac{\epsilon \alpha^{*2}}{2\omega_0^4} \left[\cos 2\omega_0(t + \beta^*) - \frac{1}{4} \cos 4\omega_0(t + \beta^*) \right] + O(\epsilon^2) \quad (5.6.31)$$

$$\beta = \beta^* - \frac{\epsilon \alpha^*}{2\omega_0^5} \left[\sin 2\omega_0(t + \beta^*) - \frac{1}{8} \sin 4\omega_0(t + \beta^*) \right] + O(\epsilon^2) \quad (5.6.32)$$

To compare this expansion with those obtained by other methods, we substitute for α and β from (5.6.31) and (5.6.32) into (5.5.31), expand for small ϵ , keeping α^* and β^* fixed, and obtain

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} \left(1 - \frac{3}{8} \epsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} \right) \sin(\omega t + \beta_0) - \epsilon \frac{\sqrt{2\alpha^*} \alpha^*}{16\omega_0^5} \sin 3(\omega t + \beta_0) + O(\epsilon^2) \quad (5.6.33)$$

where

$$\omega = \omega_0 (1 + \dot{\beta}^*) \quad (5.6.34)$$

If we let

$$a = \frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} \left(1 - \frac{3}{8} \epsilon \frac{\alpha^*}{\omega_0^4} \right)$$

then

$$\frac{\sqrt{2\alpha^*}}{\omega_0} = a + \frac{3}{16} \epsilon \frac{a^3}{\omega_0^2} + O(\epsilon^2) \quad (5.6.35)$$

Hence

$$q = a \sin(\omega t + \beta_0) - \frac{1}{32} \epsilon \frac{a^3}{\omega_0^2} \sin 3(\omega t + \beta_0) + O(\epsilon^2) \quad (5.6.36)$$

where

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} - \frac{15}{256} \epsilon^2 \frac{a^4}{\omega_0^4} \right] + O(\epsilon^3) \quad (5.6.37)$$

This expansion is in agreement with those obtained in Section 5.3 by using Struble's method and in Section 5.4.1 by using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski method.

5.6.2. The Mathieu Equation

Next we determine a second-order expansion for Mathieu's equation (5.5.35) which corresponds to the Hamiltonian (5.5.39). The solution corresponding to H_0 can be written as (see Section 5.5.1)

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \cos \omega(t + \beta), \quad p = -\sqrt{2\alpha} \sin \omega(t + \beta) \quad (5.6.38a)$$

Hence α and β are canonical variables with respect to

$$\tilde{H} = \frac{\epsilon \alpha}{\omega^2} \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t \quad (5.6.38b)$$

Transforming from α and β to α^* and β^* using the generating function (5.6.16), we obtain

$$\begin{aligned} K &= \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + \dots \\ &= \frac{\epsilon}{\omega^2} \left(\alpha^* + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots \right) \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (5.6.39)$$

since α is given by (5.6.17). Equating coefficients of equal powers of ϵ in (5.6.39) yields

$$K_1 = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\alpha^*}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] \right\} \quad (5.6.40)$$

$$K_2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta} \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t \quad (5.6.41)$$

Two cases arise depending on whether ω is near 1 (resonance) or ω is away from 1. We consider both cases next starting with the latter case.

The Case of ω Away from 1. In this case all the terms on the right-hand side of (5.6.40) are fast varying. Hence $K_1 = 0$, and

$$S_1 = -\frac{\alpha^*}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} + \frac{\sin 2[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{2(\omega - 1)} \right\} \quad (5.6.42)$$

Substituting for S_1 into (5.6.41), we obtain

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{4\omega^3} \cos^2 \omega(t + \beta) \\ &\quad \times \cos 2t \left\{ \frac{\cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{\omega + 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{\omega - 1} \right\} \\ &= \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{16\omega^3} \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]}{\omega - 1} + \frac{\cos 2[(\omega + 2)t + \omega\beta]}{\omega + 1} \right. \\ &\quad + \frac{\cos 4[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} + \frac{\cos 4[(\omega - 1)t + \omega\beta]}{2(\omega - 1)} \\ &\quad \left. + \omega \frac{\cos 4\omega(t + \beta) + \cos 4t + 2 \cos 2\omega(t + \beta)}{\omega^2 - 1} \right\} \end{aligned} \quad (5.6.43)$$

If ω is also away from 2

$$K_2 = -\frac{1}{16} \frac{\alpha^*}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} \quad (5.6.44)$$

because the rest of the terms on the right-hand side of (5.6.43) are fast varying and must be set equal to $-\partial S_2/\partial t$. In this case

$$K = -\frac{1}{16} \epsilon^2 \frac{\alpha^*}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.45)$$

Hence

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{\partial K}{\partial \beta^*} = 0 \text{ or } \alpha^* = \text{a constant} \quad (5.6.46)$$

$$\dot{\beta}^* = \frac{\partial K}{\partial \alpha^*} = -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^2}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.47)$$

Consequently

$$\beta^* = -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^2 t}{\omega^2 (\omega^2 - 1)} + \beta_0 \quad (5.6.48)$$

and q is given by (6.2.95) if we make the following replacement of variables

$$\begin{aligned} u &\rightarrow q, \omega_0 \rightarrow \omega, a \rightarrow \sqrt{2\alpha^*}/\omega \\ \phi_0 &\rightarrow \omega\beta_0 \text{ and } \omega \rightarrow \omega [1 - \epsilon^2/16\omega^2 (\omega^2 - 1)] \end{aligned} \quad (5.6.49)$$

Thus q is bounded and the motion in this case is stable.

If ω is near 2, however, $\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]$ is slowly varying, and it has to be included in K_2 ; otherwise S_2 will contain secular terms or a small divisor depending on whether ω is exactly equal to 2 or not. Equating K_2 to the long-period terms on the right-hand side of (5.6.43), we obtain

$$K_2 = -\frac{\alpha^*}{16\omega^3} \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 2[(\omega - 2)t + \omega\beta]}{\omega - 1} \right\} \quad (5.6.50)$$

To an error of $O(\epsilon)$, β can be replaced by β^* in (5.6.50). To analyze the motion in this case, we remove the explicit dependence of K on t by transforming from α^* and β^* to α' and β' using the generating function

Thus

$$S' = \alpha' [(\omega - 2)t + \omega\beta^*] \quad (5.6.51)$$

$$\alpha^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta^*} = \omega\alpha' \quad (5.6.52)$$

$$\beta' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} = (\omega - 2)t + \omega\beta^* \quad (5.6.53)$$

and

$$K' = K + (\omega - 2)\alpha' = (\omega - 2)\alpha' - \epsilon^2 \frac{\alpha'}{16\omega^2} \left[\frac{\cos 2\beta'}{\omega - 1} + \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \right] \quad (5.6.54)$$

Hence

$$\dot{\alpha}' = -\frac{\partial K'}{\partial \beta'} = -\epsilon^2 \frac{\alpha'}{8\omega^2(\omega - 1)} \sin 2\beta' \quad (5.6.55)$$

$$\dot{\beta}' = \frac{\partial K'}{\partial \alpha'} = \omega - 2 - \frac{\epsilon^2}{16\omega^2} \left[\frac{\cos 2\beta'}{\omega - 1} + \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \right] \quad (5.6.56)$$

The solution of (5.6.55) and (5.6.56) can be obtained as in Section 5.5.2 to be

$$\begin{aligned} \ln \alpha' &= -\ln \left[\omega - 2 - \frac{\epsilon^2}{16\omega(\omega^2 - 1)} - \frac{\epsilon^2}{16\omega^2(\omega - 1)} \cos 2\beta' \right] \\ &\quad + \text{a constant} \end{aligned} \quad (5.6.57)$$

Therefore, for instability

$$\frac{\epsilon^2}{16\omega^2(\omega - 1)} > \left| \omega - 2 - \frac{\epsilon^2}{16\omega(\omega^2 - 1)} \right|$$

or

$$\omega < 2 + \frac{5\epsilon^2}{192} + O(\epsilon^3), \omega > 2 - \frac{\epsilon^2}{192} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.58)$$

Consequently, the transition curves that separate stable from unstable motions in the $\omega^2 - \epsilon$ plane and emanating from $\omega = 2$ are given by

$$\omega^2 = 4 + \frac{5\epsilon^2}{48} + O(\epsilon^3) \quad \text{and} \quad \omega^2 = 4 - \frac{\epsilon^2}{48} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.59)$$

in agreement with those obtained in Section 3.1.2.

The Case of ω Near 1. In this case $\cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta]$ is slowly varying, and therefore it should remain in K_1 ; otherwise S_1 is singular at $\omega = 1$ as evident from (5.6.42). Equating K_1 to the long-period terms in (5.6.40), we have

$$K_1 = \frac{\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] \quad (5.6.60)$$

Hence

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{\alpha^*}{2\omega^2} \left\{ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] \right\} \quad (5.6.61)$$

The solution of (5.6.61) is

$$S_1 = -\frac{\alpha^*}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} \right\} \quad (5.6.62)$$

Substituting for S_1 into (5.6.41) gives

$$K_2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\alpha^*}{4\omega^3(\omega + 1)} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] \cos^2 \omega(t + \beta) \cos 2t \quad (5.6.63)$$

Equating K_2 to the long-period terms in (5.6.63), we have

$$K_2 = -\frac{\alpha^*}{32\omega^3(\omega + 1)} \quad (5.6.64)$$

Therefore, to second order

$$K = \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta] - \frac{\epsilon^2\alpha^*}{32\omega^3(\omega + 1)} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.65)$$

Moreover

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \beta} + \dots \\ &= \alpha^* - \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega(\omega + 1)} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.6.66)$$

$$\begin{aligned} \beta^* &= \beta + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} + \dots \\ &= \beta - \frac{\epsilon}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega + 1)t + \omega\beta]}{2(\omega + 1)} \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.6.67)$$

Solving (5.6.66) and (5.6.67) for α and β in terms of α^* and β^* gives

$$\alpha = \alpha^* - \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega(\omega + 1)} \cos 2[(\omega + 1)t + \omega\beta^*] + O(\epsilon^2) \quad (5.6.68)$$

$$\beta = \beta^* + \frac{\epsilon}{4\omega^2} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2[(\omega + 1)t + \omega\beta^*]}{2(\omega + 1)} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (5.6.69)$$

Substituting for β into (5.6.65) gives

$$K = \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta^*] - \frac{\epsilon^2\alpha^*}{32\omega^3(\omega + 1)} + \frac{\epsilon^2\alpha^*}{2\omega} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha^*} \sin 2[(\omega - 1)t + \omega\beta^*] + O(\epsilon^3) \quad (5.6.70)$$

The presence of the last term on the right-hand side of (5.6.70) exhibits a shortcoming of the von Zeipel procedure in its present form, in which the fast and slowly varying terms in (5.6.40) were determined using mixed variables (new momenta but old coordinates). Had we expressed (5.6.39) in terms of the new variables α^* and β^* , this last term would have been absorbed into S_2 , which might contribute to the slowly varying part of K_3 . In fact, such a representation in mixed variables was recognized by Breakwell (see Schechter, 1968) to lead to invalid results for the motion of a particle near the triangular points in the restricted problem of three bodies (Breakwell and Pringle, 1966). Using this suggestion, Schechter obtained a valid expansion by expressing the Hamiltonian in terms of the new variables before averaging to determine the slowly varying part (long period). Musen (1965) developed algorithms for effecting the transformation, to any order, of variables and arbitrary functions from the old to the new variables and vice versa. Lacina (1969a, b) and Stern (1970a, 1971a) obtained expressions for general near-identity canonical transformations from the old variables to the new variables. With these transformations, they modified the Hamilton-Jacobi equation. The resulting perturbation schemes may be related to other perturbation schemes which use canonical variables by the proper choice of certain expressions entering into these transformations.

A technique of determining integrals of motion of a system governed by a Hamiltonian was developed by Whittaker (1916, 1937), Cherry (1927), Contopoulos (1963), McNamara and Whiteman (1967), and Coffey (1969). The technique is based on the fact that the equation

$$[\phi, H] = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

is satisfied by any integral of the canonical equations of motion

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

An effective and powerful technique of effecting the transformation of variables and arbitrary functions to new variables has been developed by Hori (1966, 1967) using the Lie series, and Deprit (1969) and Kamel (1969, 1970) using the Lie transforms. This technique is described in Section 5.7.

Had we expressed (5.6.39) in terms of the new variables, we would have found that

$$K = \frac{\epsilon\alpha^*}{4\omega^2} \cos 2[(\omega - 1)t + \omega\beta^*] - \frac{\epsilon^2\alpha^*}{32\omega^3(\omega + 1)} + O(\epsilon^3) \quad (5.6.71)$$

We remove the explicit dependence of K on t by changing from α^* and β^* to α' and β' by using the generating function

$$S' = \alpha' [(\omega - 1)t + \omega\beta^*] \quad (5.6.72)$$

Hence

$$\alpha^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta^*} = \omega \alpha' \quad (5.6.73)$$

$$\beta' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} = (\omega - 1)t + \omega \beta^* \quad (5.6.74)$$

and

$$K' = K + \frac{\partial S'}{\partial t} = \frac{\epsilon \alpha'}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\epsilon^2 \alpha'}{32\omega^2(\omega + 1)} + (\omega - 1)\alpha' \quad (5.6.75)$$

Therefore

$$\dot{\alpha}' = -\frac{\partial K'}{\partial \beta'} = \frac{\epsilon \alpha'}{2\omega} \sin 2\beta' \quad (5.6.76)$$

$$\dot{\beta}' = \frac{\partial K'}{\partial \alpha'} = \frac{\epsilon}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\epsilon^2}{32\omega^2(\omega + 1)} + \omega - 1 \quad (5.6.77)$$

As in Section 5.5.2, the solution of (5.6.76) and (5.6.77) is

$$\ln \alpha' = -\ln \left[\frac{\epsilon}{4\omega} \cos 2\beta' - \frac{\epsilon^2}{32\omega^2(\omega + 1)} + \omega - 1 \right] + \text{a constant} \quad (5.6.78)$$

Hence the transition curves are given by

$$\frac{\epsilon}{4\omega} = \left| \omega - 1 - \frac{\epsilon^2}{32\omega^2(\omega + 1)} \right|$$

Consequently

$$\omega = 1 \pm \frac{1}{4}\epsilon - \frac{3}{64}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (5.6.79)$$

or

$$\omega^2 = 1 \pm \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (5.6.80)$$

These curves are in agreement with those obtained in Section 3.1.2 by using the Lindstedt-Poincaré technique, and in Section 3.1.3 by using the Whittaker technique.

9.5.7 5.7. Averaging by Using the Lie Series and Transforms

In analyzing the oscillations of a weakly nonlinear system, the method of variation of parameters is usually used to transform the equations governing these oscillations into the standard form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \quad (5.7.1)$$

where

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \epsilon^m} \right|_{\epsilon=0}$$

Here $\mathbf{x}$ and $\mathbf{f}$ are vectors with N components. The vector $\mathbf{x}$ may represent, for example, the amplitudes and the phases of the system, or the orbital parameters of the unperturbed

two-body problem. If we denote the components of the vector $\mathbf{f}_m$ by f_{mn} , then a component x_k of the vector $\mathbf{x}$ is said to be a rapidly rotating phase if $f_{0k} \neq 0$.

To analyze this standard system, we found it to be useful (see Section 5.2.3) to introduce a near-identity transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon) = \mathbf{y} + \epsilon \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) + \cdots \quad (5.7.2a)$$

from x to y such that the system (5.7.1) is transformed into

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{g}_n(\mathbf{y}) \quad (5.7.2b)$$

where $\mathbf{g}_n$ contains long-period terms only. In Section 5.2.3, $\mathbf{X}_n$ and $\mathbf{g}_n$ were determined by substituting (5.7.2) into (5.7.1) and separating the short- and the long-period terms assuming that $\mathbf{X}_n$ contains short-period terms only.

5.7.1. The Lie Series and Transforms

In this section we define the transformation (5.7.2a) as the solution of the N differential equations

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} = \mathbf{W}(\mathbf{x}; \epsilon), \quad \mathbf{x}(\epsilon = 0) = \mathbf{y} \quad (5.7.3)$$

The vector $\mathbf{W}$ is called the generating vector. It seems at first that we are turning in circles because we are proposing to simplify the original system of differential equations by solving a system of N differential equations. This is not the case, because we are interested in the solution of (5.7.1) for large t , whereas we need the solution of (5.7.3) for small ϵ ; which is a significant simplification.

Equation (5.7.3) generates the so-called Lie transforms (Kamel, 1970), which are invertible because they are close to the identity. If $\mathbf{W}$ does not depend on ϵ , (5.7.3) generates the so-called Lie series. For a canonical system, Hori (1966, 1967) and Deprit (1969) took

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \\ t \end{bmatrix} \quad (5.7.4a)$$

with q the system's coordinates, p the conjugate momenta, and t the time, and defined

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} S_{\mathbf{p}} \\ -S_{\mathbf{q}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = S(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \epsilon) \quad (5.7.4b)$$

with S the generating function.

Hori (1966) constructed a nonrecursive algorithm using the Lie series to determine the transform $K = \sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon^n/n!) K_n(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ of a Hamiltonian $H = \sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon^n/n!) H_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Deprit (1969) constructed another algorithm to generate K recursively using the Lie transforms. Kamel (1969b), Campbell and Jefferys (1970), and Mersman (1970) showed the equivalence of Hori's and Deprit's theories, while Kamel (1969a) simplified Deprit's algorithm. Hori (1970) showed that, to second order, Lie transforms are equivalent to von Zeipel's technique. Shniad (1970) proved that the von Zeipel transformation is equivalent to the Deprit transformation, while Mersman (1971) established the equivalence of the Hori, Deprit and von Zeipel transformations. It should be mentioned that a perturbation theory based on the Lie series and transforms has several advantages over von Zeipel's procedure. The generating function is not a mixed function

of the old and new variables, the theory is canonically invariant, and it is possible to give a direct expansion of any function of the old variables in terms of the new variables.

Kamel (1970) introduced the transformation (5.7.3) and constructed an algorithm to transform the standard system (5.7.1) into (5.7.2b). Moreover, he constructed algorithms (1) to transform any vector function from the old to the new variables and (2) to determine (5.7.2a) and its inverse. Henrard (1970) and Kamel (1971) investigated more deeply the mathematical and operational significance of these algorithms. We next construct these generalized algorithms and then specialize them to the canonical case in Section 5.7.5.

5.7.2. Generalized Algorithms

Let the solution of (5.7.3) be $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)$ and let its inverse be $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}; \epsilon)$ so that

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}_Y d\mathbf{y} \quad \text{and} \quad d\mathbf{y} = \mathbf{Y}_X d\mathbf{x} \quad (5.7.5)$$

where

$$\mathbf{X}_Y = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} \quad (\text{Jacobian matrix})$$

and

$$\mathbf{X}_X d\mathbf{y} = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} dy_j$$

From (5.7.5) we have

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}_Y \mathbf{Y}_X d\mathbf{x}$$

so that

$$\mathbf{X}_Y \mathbf{Y}_X = I \quad (\text{identity matrix})$$

Hence

$$\mathbf{Y}_X = (\mathbf{X}_Y)^{-1} \quad (\text{inverse of } \mathbf{X}_Y) \quad (5.7.6)$$

The second relationship in (5.7.5) gives

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}_X \dot{\mathbf{x}}$$

which can be rewritten using (5.7.1) as

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}; \epsilon) = \mathbf{Y}_X \mathbf{f}|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \quad (5.7.7)$$

We are interested in developing the right-hand side of (5.7.7) in powers of ϵ so that

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{g}}{d\epsilon^n} \bigg|_{\epsilon=0} \quad (5.7.8)$$

From (5.7.7)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{g}}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[(\mathbf{Y}_X \mathbf{f})_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{r}; \epsilon)} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{Y}_X \mathbf{f}) \frac{d\mathbf{X}}{d\epsilon} + \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\mathbf{Y}_X \mathbf{f}) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{r}; \epsilon)} \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

Now

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} (\mathbf{Y}_x \mathbf{f}) = \mathbf{Y}_x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \epsilon} \right) \mathbf{f} \quad (5.7.10)$$

Since $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}; \epsilon)$ is the inverse of $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)$ [the solution of $d\mathbf{x}/d\epsilon = \mathbf{W}(\mathbf{x}; \epsilon)$ subject to $\mathbf{x}(\epsilon = 0) = \mathbf{y}$]

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\epsilon} = 0 = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \epsilon} + \mathbf{Y}_x \frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \epsilon} + \mathbf{Y}_x \mathbf{W}$$

so that

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \epsilon} = -\mathbf{Y}_x \mathbf{W}$$

Hence (5.7.10) can be rewritten as

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} (\mathbf{Y}_x \mathbf{f}) = \mathbf{Y}_x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \epsilon} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{Y}_x \mathbf{W}) \mathbf{f} \quad (5.7.11)$$

Using this expression and noting that $d\mathbf{X}/d\epsilon = \mathbf{W}$, we rewrite (5.7.9) as

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[(\mathbf{Y}_x \mathbf{f})_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{Y}_x \mathbf{f}) \mathbf{W} + \mathbf{Y}_x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \epsilon} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{Y}_x \mathbf{W}) \mathbf{f} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \end{aligned}$$

which can be simplified to

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \left[(\mathbf{Y}_x \mathbf{f})_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \right] = [\mathbf{Y}_x D\mathbf{f}]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \quad (5.7.12)$$

where

$$D\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \epsilon} + \mathbf{f}_x \mathbf{W} - \mathbf{W}_x \mathbf{f} \quad (5.7.13)$$

By recurrence, (5.7.12) gives

$$\frac{d^n \mathbf{g}}{d\epsilon^n} = [\mathbf{Y}_x D^n \mathbf{f}]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon)} \quad (5.7.14)$$

Since $\mathbf{x}(\epsilon = 0) = \mathbf{y}$

$$\mathbf{Y}_{x|\epsilon=0} = I \quad (\text{identity matrix})$$

so that

$$\left. \frac{d^n \mathbf{g}}{d\epsilon^n} \right|_{\epsilon=0} = D^n \mathbf{f}|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}, \epsilon=0} \quad (5.7.15)$$

To determine $D^n \mathbf{f}$, we assume that $\mathbf{W}$ can be expanded as

$$\mathbf{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{W}_{n+1} \quad (5.7.16)$$

so that the transformation (5.7.3) can be generated, successively, to any order. If $\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon^n/n!) \mathbf{f}_n$, (5.7.13) becomes

$$D\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{f}_n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{\epsilon^m}{m!} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_{m+1} - \frac{\partial \mathbf{W}_{m+1}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}_n \right]$$

Letting $n = k + 1$ in the first term, and $n = k - m$ in the second term, we can rewrite this expression as

$$D\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{f}_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{m=0}^k C_m{}^k \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{k-m}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_{m+1} - \frac{\partial \mathbf{W}_{m+1}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}_{k-m} \right]$$

or

$$D\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{f}_k^{(1)} \quad (5.7.17)$$

where

$$\mathbf{f}_k^{(1)} = \mathbf{f}_{k+1} + \sum_{m=0}^k C_m{}^k L_{m+1} \mathbf{f}_{k-m} \quad (5.7.18a)$$

$$L_m \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_m - \frac{\partial \mathbf{W}_m}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{g} \quad (5.7.18b)$$

$$C_m{}^k = \frac{k!}{(k-m)!m!}$$

By recurrence, (5.7.17) and (5.7.18) with $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k^{(0)}$ give

$$D^n \mathbf{f} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{f}_k^{(n)} \quad (5.7.19)$$

where

$$\mathbf{f}_k^{(n)} = \mathbf{f}_{k+1}^{(n-1)} + \sum_{m=0}^k C_m{}^k L_{m+1} \mathbf{f}_{k-m}^{(n-1)} \quad (5.7.20)$$

Hence

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{f}^{(n)} \quad \text{where } \mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{f}_0^{(n)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \quad (5.7.21)$$

The recurrence relationship (5.7.20) can be best visualized using the Lie triangle introduced by Deprit (1969); it is somewhat reminiscent of the Pascal triangle and shown in Figure 5-3.

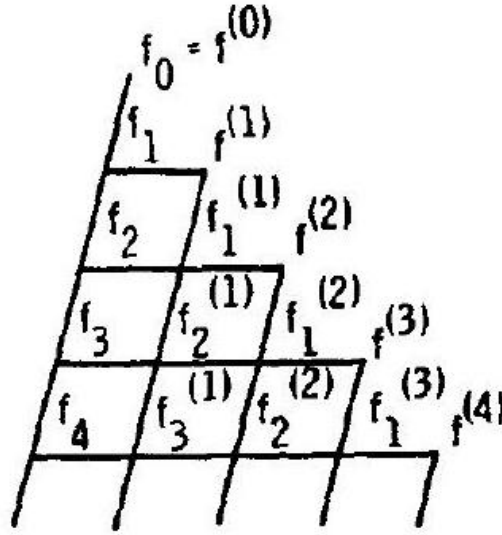


Figure 5-3. Lie triangle. $\left\{ \mathbf{f}^{(n)} \right\} = \left\{ \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1^{(1)}, \mathbf{f}_2^{(1)}, \mathbf{f}_1^{(2)}, \mathbf{f}_2^{(2)}, \mathbf{f}_1^{(3)}, \mathbf{f}_2^{(3)}, \mathbf{f}_1^{(4)} \right\}$

For example

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^{(1)} &= \mathbf{f}_1 + L_1 \mathbf{f}_0 \\
 \mathbf{f}_1^{(1)} &= \mathbf{f}_2 + L_1 \mathbf{f}_1 + L_2 \mathbf{f}_0 \\
 \mathbf{f}^{(2)} &= \mathbf{f}_1^{(1)} + L_1 \mathbf{f}_0^{(1)} \\
 \mathbf{f}_2^{(1)} &= \mathbf{f}_3 + L_1 \mathbf{f}_2 + 2L_2 \mathbf{f}_1 + L_3 \mathbf{f}_0 \\
 \mathbf{f}_1^{(2)} &= \mathbf{f}_2^{(1)} + L_1 \mathbf{f}_1^{(1)} + L_2 \mathbf{f}^{(1)} \\
 \mathbf{f}^{(3)} &= \mathbf{f}_1^{(2)} + L_1 \mathbf{f}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{5.7.22}$$

In carrying out perturbation solutions, we often need to express a vector

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{F}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^n \mathbf{F}}{\partial \epsilon^n} \right|_{\epsilon=0} \tag{5.7.23a}$$

in terms of the new variable y in the form

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}(\mathbf{y}; \epsilon) &= \mathbf{F}[\mathbf{X}(\mathbf{y}; \epsilon); \epsilon] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{y}) = \left. \frac{d^n \mathbf{F}}{d\epsilon^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}, \epsilon=0}
 \end{aligned} \tag{5.7.23b}$$

where

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\epsilon} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \epsilon} + \mathcal{L}\mathbf{F}, \quad \mathcal{L}\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W} \tag{5.7.23c}$$

Using (5.7.16) and (5.7.23a), we express this [as we expressed (5.7.17)] in the form

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{F}_k^{(1)} \tag{5.7.24}$$

where

$$\mathbf{F}_k^{(1)} = \mathbf{F}_{k+1} + \sum_{m=0}^k C_m^k \mathcal{L}_{m+1} \mathbf{F}_{k-m} \quad (5.7.25)$$

$$\mathcal{L}_m \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{W}_m \quad (5.7.26)$$

By recurrence (5.7.24) and (5.7.25) give

$$\frac{d^n \mathbf{F}}{d\epsilon^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{F}_k^{(n)} \quad (5.7.27)$$

where

$$\mathbf{F}_k^{(n)} = \mathbf{F}_{k+1}^{(n-1)} + \sum_{m=0}^k C_m^k \mathcal{L}_{m+1} \mathbf{F}_{k-m}^{(n-1)} \quad (5.7.28)$$

with $\mathbf{F}_k^{(0)} = \mathbf{F}_k$. Hence

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}, \quad \mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{F}_0^{(n)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \quad (5.7.29)$$

Equations (5.7.27) through (5.7.29) have the same form as (5.7.19) through (5.7.21) except for the different operator $\mathcal{L}$, so that (5.7.28) can also be visualized using the Lie triangle.

5.7.3. Simplified General Algorithms

To simplify an algorithm such as (5.7.20), Kamel (1969, 1970) wrote it first as

$$\mathbf{f}_k^{(n)} = \mathbf{f}_{k-1}^{(n+1)} - \sum_{m=0}^{k-1} C_m^{k-1} L_{m+1} \mathbf{f}_{k-m-1}^{(n)} \quad (5.7.30)$$

He then eliminated successively the functions on the right-hand side to obtain eventually $\mathbf{f}_k^{(n)}$ as a linear functional of $\mathbf{f}^{(n+k)}, \mathbf{f}^{(n+k-1)}, \dots, \mathbf{f}^{(n)}$. Thus we assume that

$$\mathbf{f}_k^{(n)} = \mathbf{f}^{(n+k)} - \sum_{j=1}^k C_j^k G_j \mathbf{f}^{(n+k-j)} \quad (5.7.31)$$

where G_j is a linear operator which is a functional of $L_j, L_{j-1}, \dots, L_1$. Substituting (5.7.31) into (5.7.30) yields the following recursion relationship

$$G_j = L_j - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L_m G_{j-m}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.7.32)$$

For example

$$\begin{aligned} G_1 &= L_1 \\ G_2 &= L_2 - L_1 L_1 \\ G_3 &= L_3 - L_1 (L_2 - L_1 L_1) - 2L_2 L_1 \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

For $n = 0$ and $n = 1$, (5.7.31) gives

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_k + \sum_{j=1}^k C_j^k \mathbf{f}_{j,k-j} \quad (5.7.34)$$

$$\mathbf{f}_k^{(1)} = \mathbf{f}^{(k+1)} - \sum_{j=1}^k C_j^k \mathbf{f}_{j,k-j+1} \quad (5.7.35)$$

where

$$\mathbf{f}_{j,i} = G_j \mathbf{f}^{(i)} = L_j \mathbf{f}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L_m \mathbf{f}_{j-m,i} \quad (5.7.36)$$

This is the simplified algorithm of Kamel in which $\mathbf{f}_{j,i} = 0$ if $\mathbf{f}^{(i)} = 0$ because the second index i , in the recursion relationship, is fixed.

A more convenient form of this algorithm was obtained by Kamel by writing (5.7.35) as

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_{k-1}^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^{k-1} \mathbf{f}_{j,k-j} \quad (5.7.37)$$

However, from (5.7.18a)

$$\mathbf{f}_{k-1}^{(1)} = \mathbf{f}_k + \sum_{j=1}^{k-1} C_{j-1}^{k-1} L_j \mathbf{f}_{k-j} + L_k \mathbf{f}_0$$

so that (5.7.37) can be rewritten as

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_k + \sum_{j=1}^{k-1} [C_{j-1}^{k-1} L_j \mathbf{f}_{k-j} + C_j^{k-1} \mathbf{f}_{j,k-j}] + L_k \mathbf{f}_0 \quad (5.7.38)$$

Since $d\mathbf{x}/d\epsilon = \mathbf{W}$ from (5.7.3)

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (5.7.39)$$

where

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(\mathbf{y}) = \left. \frac{d^n \mathbf{W}}{d\epsilon^n} \right|_{\epsilon=0, \mathbf{x}=\mathbf{y}} \quad \text{for } n \geq 1$$

Hence from (5.7.16) and (5.7.34)

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{W}_k + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^{k-1} \mathbf{x}_{j,k-j}, \quad k \geq 1 \quad (5.7.40)$$

where

$$\mathbf{x}_{j,i} = \mathcal{L}_j \mathbf{x}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} \mathcal{L}_m \mathbf{x}_{j-m,i} \quad (5.7.41)$$

To determine the inverse transform

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (5.7.42)$$

we eliminate $x - y$ from (5.7.39) and (5.7.42) to obtain

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (5.7.43a)$$

However

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (5.7.43b)$$

so that

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{y}) = -\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{y}), \quad n \geq 1 \quad (5.7.43c)$$

Then (5.7.34) gives

$$\mathbf{y}^{(k)}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{(k)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k-1} C_j^k \mathbf{x}_{j,k-j} \quad \text{for } k \geq 1 \quad (5.7.44)$$

where $\mathbf{x}_{j,i}$ is defined by (5.7.41).

5.7.4. Procedure Outline

Consider a system of differential equations written in the standard form

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \quad (5.7.45)$$

The essence of the algorithms of the previous section is to introduce a transformation from $\mathbf{x}$ to $\mathbf{y}$ so that (5.7.45) becomes

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{g}_n(\mathbf{y}) \quad (5.7.46)$$

where $\mathbf{g}_n$ does not contain short-period terms. To do this we construct a near-identity transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (5.7.47)$$

Under such a transformation a vector

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) \quad (5.7.48)$$

becomes

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (5.7.49)$$

The algorithms described in the previous section to generate these transformations can be implemented on a computer because they can be effected by the recursive application of

elementary operations. We describe below the procedure to second order. It is initiated by putting

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_0(\mathbf{y}) &= \mathbf{f}_0(\mathbf{y}) \\ \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_0(\mathbf{y})\end{aligned}\tag{5.7.50}$$

Then we begin the first-order expansion by writing the linear partial differential equation

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{y}) + L_1 \mathbf{f}_0\tag{5.7.51}$$

We choose $\mathbf{g}_1$ to equal the long-period terms in $\mathbf{f}_1$, solve the resulting equation for W_1 , and compute

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{F}_{1,0} &= \mathcal{L}_1 \mathbf{F}^{(0)} \\ \mathbf{F}^{(1)} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1,0}\end{aligned}\tag{5.7.52}$$

To prepare for the second-order expansion, we compute

$$\mathbf{g}_{1,1} = L_1 \mathbf{g}_1$$

Then we set up the differential equation

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + L_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_{1,1} + L_2 \mathbf{f}_0\tag{5.7.53}$$

and choose $\mathbf{g}_2$ to be equal to the long-period part of the right-hand side. This completes the expansion to second order.

We illustrate this procedure by applying it to van der Pol's equation

$$\ddot{q} + q = \epsilon (1 - q^2) \dot{q}\tag{5.7.54}$$

whose solution for $\epsilon = 0$ can be written as

$$q = a \cos \phi, \quad \phi = t + \beta\tag{5.7.55}$$

By the method of variation of parameters, (5.7.54) can be replaced by (see Section 5.2.3)

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\epsilon \left[a \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right) - aC_2 + \frac{1}{4}a^3C_4 \right]\tag{5.7.56}$$

$$\dot{\phi} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2}a^2 \right) S_2 - \frac{1}{4}a^2S_4 \right]\tag{5.7.57}$$

where

$$C_n = \cos n\phi \quad \text{and} \quad S_n = \sin n\phi$$

Equations (5.7.56) and (5.7.57) have the same form as (5.7.1) with

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \phi \end{bmatrix} \quad (5.7.58)$$

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.59)$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) - \frac{1}{2}aC_2 + \frac{1}{8}a^3C_4 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) S_2 - \frac{1}{8}a^2S_4 \end{bmatrix} \quad (5.7.60)$$

$$\mathbf{f}_n = 0 \text{ for } n > 1 \quad (5.7.61)$$

We transform now from $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \phi \end{bmatrix}$ to $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a^* \\ \phi^* \end{bmatrix}$. From (5.7.50) and (5.7.59) we obtain

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.62)$$

From (5.7.18b) and (5.7.59), we find that

$$L_n \mathbf{f}_0 = -\frac{\partial \mathbf{W}_n}{\partial \phi^*} \quad (5.7.63)$$

Hence (5.7.51) becomes

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \phi^*} \quad (5.7.64)$$

Choosing $\mathbf{W}_1$ to remove the short-period terms in $\mathbf{f}_1$ gives

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a^* \left(1 - \frac{1}{4}a^{*2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7.65)$$

Solving the resultant equation gives

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}a^*S_2^* + \frac{1}{32}a^{*3}S_4^* \\ -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}a^{*2}\right) C_2^* + \frac{1}{32}a^{*2}C_4^* \end{bmatrix} \quad (5.7.66)$$

where $S_n^* = \sin n\phi^*$ and $C_n^* = \cos n\phi^*$.

With (5.7.61) and (5.7.63), (5.7.53) becomes

$$\mathbf{g}_2 = L_1 (\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1) - \frac{\partial \mathbf{W}_2}{\partial \phi^*} \quad (5.7.67)$$

Choosing $\mathbf{W}_2$ to remove the short-period terms, we obtain

$$\mathbf{g}_2 = \langle L_1 \mathbf{f}_1 \rangle + \langle L_1 \mathbf{g}_1 \rangle \quad (5.7.68)$$

Since $\mathbf{g}_1$ consists of long-period terms only, and $\mathbf{W}_1$ consists of short-period terms only, $\langle L_1 \mathbf{g}_1 \rangle = 0$. Hence

$$\mathbf{g}_2 = \langle L_1 \mathbf{f}_1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}a^{*2} - \frac{11}{128}a^{*4} \end{bmatrix} \quad (5.7.69)$$

Therefore

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{a}^* \\ \dot{\phi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\epsilon a^* \left(1 - \frac{1}{4}a^{*2}\right) \\ 1 - \frac{1}{8}\epsilon^2 \left(1 - \frac{3}{2}a^{*2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}a^{*4}\right) \end{bmatrix} \quad (5.7.70)$$

in agreement with the expansion obtained in Section 5.2.3 using the generalized method of averaging.

To compare the expansion obtained in this section with that obtained in Section 5.4.2 by using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique, we need to express (5.7.55) in terms of the new variables. Here

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} F_n(\mathbf{x}) \quad (5.7.71)$$

with

$$F_0 = a \cos \phi, \quad F_n = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (5.7.72)$$

From (5.7.50)

$$F^{(0)} = a^* \cos \phi^* \quad (5.7.73)$$

Then (5.7.52) and (5.7.26) give

$$\begin{aligned} F_{1,0} &= \mathcal{L}_1(a^* \cos \phi^*) = [\cos \phi^*, -a^* \sin \phi^*] \mathbf{W}_1 \\ &= -\frac{1}{4}a^* \left(1 - \frac{1}{4}a^{*2}\right) \sin \phi^* - \frac{1}{3}a^{*3} \sin 3\phi^* \end{aligned}$$

Hence

$$q = a^* \cos \phi^* - \frac{1}{4}\epsilon a^* \left[\left(1 - \frac{1}{4}a^{*2}\right) \sin \phi^* + \frac{1}{8}a^{*2} \sin 3\phi^* \right] + O(\epsilon^2) \quad (5.7.74)$$

which can be rewritten as

$$q = a^* \cos \psi - \frac{\epsilon a^{*3}}{32} \sin 3\psi + O(\epsilon^2) \quad (5.7.75a)$$

where

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \epsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{a^{*2}}{8} + \frac{7a^{*4}}{256} \right) + O(\epsilon^3) \quad (5.7.75b)$$

in agreement with the expansion obtained in Section 5.4.2 using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique.

5.7.5. Algorithms for Canonical Systems

Hori (1966, 1967) and Deprit (1969) used the Lie series and transforms, respectively, to transform a Hamiltonian

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} H_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \quad (5.7.76)$$

into a new Hamiltonian

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} K_n(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \quad (5.7.77)$$

If we let

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ t \end{bmatrix}, & \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \\ t \end{bmatrix} \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} S_{\mathbf{p}} \\ -S_{\mathbf{q}} \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} H_{\mathbf{p}} \\ -H_{\mathbf{q}} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.79)$$

then $\mathbf{g}$ can be generated from a Hamiltonian K as

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} K_P \\ -K_Q \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.7.80)$$

In this case the algorithm of Section 5.7.3 reduces to the scalar form (Kamel, 1969a)

$$\begin{aligned} K_0 &= H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ K_n &= H_n + \sum_{j=1}^{n-1} [C_{j-1}^{n-1} L'_j H_{n-j} + C_j^{n-1} K_{j,n-j}] - \frac{\mathcal{D}S_n}{\mathcal{D}t} \end{aligned} \quad (5.7.81)$$

where

$$L'_j f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial S_j}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial S_j}{\partial \mathbf{Q}} \quad (5.7.82a)$$

$$\frac{\mathcal{D}S_n}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial S_n}{\partial t} - L'_n H_0 \quad (5.7.82b)$$

and

$$K_{j,i} = L'_j K_i - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_m K_{j-m,i} \quad (5.7.82c)$$

Under the above transformation the old variables are given in terms of the new variables as

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{P} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{p}^{(n)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \end{aligned} \quad (5.7.83)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(n)} &= \frac{\partial S_n}{\partial \mathbf{P}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} \mathbf{q}_{j,n-j} \\ \mathbf{p}^{(n)} &= -\frac{\partial S_n}{\partial \mathbf{Q}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} \mathbf{p}_{j,n-j} \end{aligned} \quad (5.7.84a)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{j,i} &= L'_j \mathbf{q}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_m \mathbf{q}_{j-m,i} \\ \mathbf{p}_{j,i} &= L'_j \mathbf{p}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_m \mathbf{p}_{j-m,i} \end{aligned} \quad (5.7.84b)$$

To third order, the above algorithms become

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= H_0 \\ K_1 &= H_1 - \frac{\mathcal{D}S_1}{\mathcal{D}t} \\ K_2 &= H_2 + L'_1 H_1 + L'_1 K_1 - \frac{\mathcal{D}S_2}{\mathcal{D}t} \\ K_3 &= H_3 + L'_1 H_2 + 2L'_2 H_1 + 2L'_1 K_2 + L'_2 K_1 - L'^2_1 K_1 - \frac{\mathcal{D}S_3}{\mathcal{D}t} \\ \mathbf{q}^{(1)} &= \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{P}}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{P}} + L'_1 \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{q}^{(3)} &= \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + 2L'_1 \mathbf{q}^{(2)} + L'_2 \mathbf{q}^{(1)} - L'^2_1 \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{p}^{(1)} &= -\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = -\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{Q}} + L'_1 \mathbf{p}^{(1)} \\ \mathbf{p}^{(3)} &= -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}} + 2L'_1 \mathbf{p}^{(2)} + L'_2 \mathbf{p}^{(1)} - L'^2_1 \mathbf{p}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.7.90)$$

We next illustrate this procedure by its application to the swinging spring represented by the Hamiltonian (5.5.57). Using the solution (5.5.67) through (5.5.70), we transform this Hamiltonian into

$$H = H_1 + \frac{1}{2}H_2 + \cdots \quad (5.7.91)$$

where

$$H_1 = \frac{\alpha_2}{l} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{k}} [\sin^2 B_2 - 2 \cos^2 B_2] \sin B_1 \quad (5.7.92)$$

$$H_2 = -\frac{1}{3} \frac{\alpha_2^2}{mgl} \sin^4 B_2 + \frac{12\alpha_1\alpha_2}{kl^2} \sin^2 B_1 \cos^2 B_2 \quad (5.7.93)$$

and $B_i = \omega_i(t + \beta_i)$.

We transform α, β , and H into α^*, β^* , and $K = K_0 + K_1 + \frac{1}{2}K_2 + \cdots$ using the algorithm defined by (5.7.85) through (5.7.87). Since $H_0 = 0$, $K_0 = 0$ by (5.7.85), and $\mathcal{D}S_n/\mathcal{D}t = \partial S_n/\partial t$ by (5.7.82b). With (5.7.92), (5.7.86) becomes

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\alpha_2^*}{l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \left\{ \sin B_1^* + \frac{3}{2} \sin(B_1^* + 2B_2^*) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*] \right\} - \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.7.94)$$

All the terms in K_1 have short periods unless $\omega_1 \approx 2\omega_2$. In the latter case $\sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*]$ has a long period (slowly varying). Choosing S_1 to eliminate the short-period terms results in

$$K_1 = -\frac{3\alpha_2^*}{2l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1\beta_1^* - 2\omega_2\beta_2^*] \quad (5.7.95)$$

and

$$S_1 = \frac{\alpha_2^*}{l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \left[\frac{\cos B_1^*}{\omega_1} + \frac{3 \cos (B_1^* + 2B_2^*)}{2(\omega_1 + 2\omega_2)} \right] \quad (5.7.96)$$

If we choose S_2 to eliminate the short-period terms in (5.7.87), we obtain

$$K_2 = \langle H_2 \rangle + \langle L_1' H_1 \rangle + \langle L_1' K_1 \rangle \quad (5.7.97)$$

The averaged values in K_2 are given by

$$\langle L_1' K_1 \rangle = \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} \right\rangle = 0 \quad (5.7.98)$$

$$\langle H_2 \rangle = -\frac{\alpha_2^{*2}}{8mgl} + \frac{3\alpha_1^* \alpha_2^*}{kl^2} \approx -\frac{\alpha_2^{*2}}{2kl^2} + \frac{3\alpha_1^* \alpha_2^*}{kl^2} \quad (5.7.99)$$

$$\begin{aligned} \langle L_1' H_1 \rangle &= \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} \right\rangle \\ &= - \left[1 + \frac{9\omega_1}{4(\omega_1 + 2\omega_2)} \right] \frac{\alpha_2^{*2}}{4kl^2} - \frac{9\alpha_1^* \alpha_2^*}{4kl^2} \frac{\omega_2}{\omega_1 + 2\omega_2} \\ &\approx -\frac{17\alpha_2^*}{32kl^2} - \frac{9\alpha_1^* \alpha_2^*}{16kl^2} \end{aligned} \quad (5.7.100)$$

In (5.7.99) and (5.7.100) use has been made of the fact that $\omega_1 \approx 2\omega_2$ (i.e., $kl \approx 4mg$ from the definitions of ω_1 and ω_2). Hence

$$K_2 = -\frac{33\alpha_2^*}{32kl^2} + \frac{39\alpha_1^* \alpha_2^*}{16kl^2} \quad (5.7.101)$$

and

$$\begin{aligned} K &= K_0 + K_1 + \frac{1}{2}K_2 + \dots \\ &= -\frac{3\alpha_2^*}{2l} \sqrt{\frac{\alpha_1^*}{2k}} \sin [(\omega_1 - 2\omega_2)t + \omega_1 \beta_1^* - 2\omega_2 \beta_2^*] \\ &\quad - \frac{33\alpha_2^*}{64kl^2} + \frac{39\alpha_1^* \alpha_2^*}{32kl^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.7.102)$$

To remove the explicit dependence of K on t , we transform from α^* and β^* to α' and β' using the generating function

$$S' = \alpha_1' \left[\frac{(\omega_1 - 2\omega_2)t}{\omega_1} + \beta_1^* \right] + \alpha_2' \beta_2^* \quad (5.7.103)$$

so that

$$\alpha_1^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta_1^*} = \alpha_1' \quad (5.7.104)$$

$$\alpha_2^* = \frac{\partial S'}{\partial \beta_2^*} = \alpha_2' \quad (5.7.105)$$

$$\beta_1' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_1'} = \frac{(\omega_1 - 2\omega_2)t}{\omega_1} + \beta_1^* \quad (5.7.106)$$

$$\beta_2' = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_2'} = \beta_2^* \quad (5.7.107)$$

and

$$K' = K + \frac{\partial S'}{\partial t} = -\frac{3\alpha'_2\sqrt{\alpha'_1}}{2l\sqrt{2k}} \sin(\omega_1\beta'_1 - 2\omega_2\beta'_2) - \frac{33\alpha'_2{}^2}{64kl^2} + \frac{39\alpha'_1\alpha'_2}{32kl^2} + \frac{\omega_1 - 2\omega_2}{\omega_1}\alpha'_1 \quad (5.7.108)$$

Since $\dot{\alpha}'_i = -\partial K'/\partial\beta'_i$ and $\dot{\beta}'_i = \partial K'/\partial\alpha'_i$

$$\dot{\alpha}'_1 = \frac{3\omega_1\alpha'_2\sqrt{\alpha'_1}}{2l\sqrt{2k}} \cos \gamma \quad (5.7.109)$$

$$\dot{\alpha}'_2 = -\frac{3\omega_2\alpha'_2\sqrt{\alpha'_1}}{l\sqrt{2k}} \cos \gamma \quad (5.7.110)$$

$$\dot{\beta}'_1 = -\frac{3\alpha'_2}{4l\sqrt{2k}\alpha'_1} \sin \gamma + \frac{39\alpha'_2}{32kl^2} + \frac{\omega_1 - 2\omega_2}{\omega_1} \quad (5.7.111)$$

$$\dot{\beta}'_2 = -\frac{3\sqrt{\alpha'_1}}{2l\sqrt{2k}} \sin \gamma - \frac{33\alpha'_2}{32kl^2} + \frac{39\alpha'_1}{32kl^2} \quad (5.7.112)$$

where

$$\gamma = \omega_1\beta'_1 - 2\omega_2\beta'_2 \quad (5.7.113)$$

9.5.8 5.8. Averaging by Using Lagrangians

Instead of using canonical variables, which require the use of Hamiltonians, Sturrock (1958, 1962) developed a technique that does not require canonical variables. It consists of averaging the Lagrangian and then writing down the corresponding Euler-Lagrange equations. Whitham (1965a, 1967a, b, 1970) developed a similar technique for waves in which the frequency and wave number as well as the amplitude are slowly varying functions of space and time. Bisshop (1969) supplied a more rigorous justification of this technique. Although this technique is not as elegant as those using canonical variables, it has the advantage of being directly applicable to partial as well as ordinary differential equations. Kawakami (1970) and Kawakami and Yagishita (1971) used canonical variables in conjunction with Hamiltonians to solve the nonlinear Vlasov equation.

This technique was applied to a variety of problems of wave propagation in fluids and plasmas. Lighthill (1965, 1967) applied Whitham's theory to moderate waves in deep water where pseudofrequencies are absent, while Karpman and Krushkal' (1969) used Whitham's theory to study the decay of a plane wave into separate wave packets. Howe (1967) studied open-channel steady flow past a solid surface of finite wave group shape. Bretherton (1968) treated linear wave propagation in slowly varying wave guides, while Bretherton and Garrett (1968) investigated slowly varying waves in inhomogeneous media. Garrett (1968), Drazin (1969), and Rarity (1969) analyzed nonlinear internal gravity waves; the effects of shear and slight atmospheric stratification were determined by Garrett and Drazin, respectively. Simmons (1969) studied the interaction of capillary and gravity waves, while Grimshaw (1970) discussed solitary waves in water of variable depth. Crapper (1970) investigated the generation of capillary waves by gravity waves. Dougherty (1970), Galloway and Crawford (1970), and Galloway and Kim (1971) treated nonlinear waves in plasmas. Dewar (1970) investigated the interaction between hydromagnetic waves and an inhomogeneous medium,

while Tang and Sivasubramanian (1971) studied the nonlinear instability of modulated waves in a magnetoplasma. Lowell (1970) analyzed wave propagation in lattices with an anharmonic potential. We describe this technique and its application to three examples.

5.8.1. A Model for Dispersive Waves

As a first example, we analyze slowly varying wave train solutions for Bretherton's (1964) model equation

$$\phi_{tt} + \phi_{xxxx} + \phi_{xx} + \phi = \epsilon \phi^3 \quad (5.8.1)$$

with the nonlinear term $\epsilon \phi^3$ rather than $\epsilon \phi^2$. If we neglect the nonlinear term $\epsilon \phi^3$, (5.8.1) admits the uniform traveling wave solution

$$\phi = a \cos \theta, \quad \theta = kx - \omega t \quad (5.8.2)$$

where ω and k satisfy the dispersion relationship

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 \quad (5.8.3)$$

To determine a slowly varying wave train solution by using the variational approach, we first write the Lagrangian corresponding to (5.8.1); that is

$$L = \frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} \phi_{xx}^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} \epsilon \phi^4 \quad (5.8.4)$$

It can be easily verified that (5.8.1) is the Euler-Lagrange equation corresponding to this Lagrangian. We assume an expansion of the form

$$\phi = a \cos \theta + \epsilon \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta + O(\epsilon^2) \quad (5.8.5)$$

where

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t \quad (5.8.6)$$

and a, ω, k , and A_i are slowly varying functions of x and t . If θ is twice continuously differentiable, (5.8.6) gives the compatibility relationship

$$k_t + \omega_x = 0 \quad (5.8.7)$$

Since secular terms appear first at $O(\epsilon)$ in the straightforward expansion, we assume that $a_x, a_t, \omega_x, \omega_t, k_x$, and k_t are $O(\epsilon)$. Thus

$$\begin{aligned} \phi_t &= a\omega \sin \theta + a_t \cos \theta + \epsilon \omega \sum_{n=2}^{\infty} n A_n \sin n\theta + O(\epsilon^2) \\ \phi_x &= -ak \sin \theta + a_x \cos \theta - \epsilon k \sum_{n=2}^{\infty} n A_n \sin n\theta + O(\epsilon^2) \\ \phi_{xx} &= -ak^2 \cos \theta - 2a_x k \sin \theta - \epsilon k^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 A_n \cos n\theta + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Substituting these expressions into (5.8.4), we find that the resulting Lagrangian depends implicitly on x and t through θ, a, ω, k , and A_i . Its variation with x and t through θ is much faster than that through the other parameters, because when θ varies over $[0, 2\pi]$, the period of

the θ terms in L , the other parameters hardly change. As in the other versions of the method of averaging, we average L over θ from 0 to 2π , keeping a, ω, k , and A_i constant. To do this we first average each term in L separately. Thus

$$\begin{aligned}\overline{\phi_t^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_t^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 + O(\epsilon^2) \\ \overline{\phi_x^2} &= \frac{1}{2} a^2 k^2 + O(\epsilon^2) \\ \overline{\phi_{xx}^2} &= \frac{1}{2} a^2 k^4 + O(\epsilon^2) \\ \overline{\phi^4} &= \frac{3}{8} a^4 + O(\epsilon)\end{aligned}$$

Hence

$$\mathcal{L} = \bar{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - k^4 + k^2 - 1) a^2 + \frac{3\epsilon}{32} a^4 + O(\epsilon^2) \quad (5.8.8)$$

The averaged Lagrangian $\mathcal{L}$ is an explicit function of a and an implicit function of θ through ω and k . Now we write the Euler-Lagrange equations with respect to the variables a and θ . The Euler-Lagrange equation with respect to a is $\partial \mathcal{L} / \partial a = 0$; it gives the dispersion relationship

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 + \frac{3}{4} \epsilon a^2 + O(\epsilon^2) \quad (5.8.9)$$

Note that this dispersion relationship can be obtained by using the principle of harmonic balance; that is, we let $\phi = a \cos \theta$ in (5.8.1) and equate the coefficients of $\cos \theta$ on both sides. Since $\omega = -\theta_t$ and $k = \theta_x$, the EulerLagrange equation with respect to θ is

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (5.8.10)$$

or

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0 \quad (5.8.11)$$

However,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \omega a^2 + O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = -\frac{1}{2} (2k^3 - k) a^2 + O(\epsilon^2)$$

Hence

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x} [(2k^3 - k) a^2] = 0 \quad (5.8.12)$$

To simplify (5.8.12), we differentiate (5.8.9) with respect to k to obtain

$$\omega \omega' = 2k^3 - k + O(\epsilon^2)$$

where $\omega' = d\omega/dk$ is the group velocity. Hence we rewrite (5.8.12) as

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\omega \omega' a^2) = 0$$

or

$$\omega \left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega' a^2) \right] + a^2 [\omega_t + \omega' \omega_x] = 0 \quad (5.8.13)$$

Since $\omega = \omega(k)$, $\omega_t = \omega' k_t$, and the second term in (5.8.13) vanishes according to (5.8.7). Hence (5.8.13) simplifies into

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega' a^2) = 0 \quad (5.8.14)$$

Moreover, since $\omega = \omega(k)$, (5.8.7) can be rewritten as

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (5.8.15)$$

Therefore the spatial and temporal variations of the amplitude a , frequency ω , and wave number k are given by (5.8.9), (5.8.14), and (5.8.15).

5.8.2. A Model for Wave-wave Interaction

Had we carried out the expansion of the previous section to second order, we would have obtained

$$\phi = a \cos \theta + \frac{\epsilon a^3}{32(9k^4 - 1)} \cos 3\theta + O(\epsilon^2) \quad (5.8.16)$$

Although valid for a wide range of values of k , this expansion breaks down near $k^2 = 1/3$. This case is referred to as the third-harmonic resonance case in which both $\cos \theta$ and $\cos 3\theta$ satisfy the same dispersion relationship; that is, both the fundamental and its third harmonic have the same phase speed ω/k .

To determine an expansion valid near $k^2 = 1/3$ for (5.8.1), we assume the expansion to be

$$\phi = a_1 \cos \theta_1 + a_3 \cos \theta_3 + \epsilon \sum_{n \neq 1,3}^{\infty} A_n \cos(\theta_n + v_n) + O(\epsilon^2) \quad (5.8.17)$$

where

$$\theta_n = k_n x - \omega_n t + \beta_n, \quad \omega_n^2 = k_n^4 - k_n^2 + 1 \quad (5.8.18)$$

with

$$k_3 \approx 3k_1 \text{ and } \omega_3 \approx 3\omega_1 \quad (5.8.19)$$

Note that the first-order term contains the fundamental $\cos \theta_1$ and its third harmonic θ_3 . Since we are interested in the case $k_1^2 \approx 1/3$, we take ω_i and k_i to be constants, whereas we take β_i, ν_i, a_i , and A_i to be slowly varying functions of x and t . We next substitute this expansion into (5.8.4) and average the resulting Lagrangian over θ_i , keeping β_i, ν_i, a_i , and A_i constants.

In performing the averaging we note that, although θ_i are fast varying, $\theta_3 - 3\theta_1$ is slowly varying. Thus

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi^4} &= \frac{3}{8} (a_1^4 + 4a_1^2 a_3^2 + a_3^4) + \frac{1}{2} a_1^3 a_3 \cos(\theta_3 - 3\theta_1) + O(\epsilon) \\
 \overline{\phi^2} &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_3^2) + O(\epsilon^2) \\
 \overline{\phi_t^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (\omega_i^2 - 2\omega_i \beta_{it}) a_i^2 + O(\epsilon^2) \\
 \overline{\phi_x^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (k_i^2 + 2k_i \beta_{ix}) a_i^2 + O(\epsilon^2) \\
 \overline{\phi_{xx}^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} (k_i^4 + 4k_i^3 \beta_{ix}) a_i^2 + O(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

With these expressions $\mathcal{L}$ becomes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,3} \omega_i (\beta_{it} + \omega'_i \beta_{ix}) a_i^2 \\
 + \frac{3\epsilon}{32} (a_1^4 + 4a_1^2 a_3^2 + a_3^4) + \frac{\epsilon}{8} a_1^3 a_3 \cos \delta
 \end{aligned} \tag{5.8.20}$$

where

$$\delta = \theta_3 - 3\theta_1 = (k_3 - 3k_1)x - (\omega_3 - 3\omega_1)t + \beta_3 - 3\beta_1 \tag{5.8.21}$$

In arriving at (5.8.20) we used the dispersion relationship (5.8.18) and the definition of the group velocity $\omega'_i = (2k_i^3 - k_i)/\omega_i$.

With ω_i and k_i constants, a_i and β_i are governed by the Euler-Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = 0 \tag{5.8.22}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{it}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{ix}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} \tag{5.8.23}$$

Substituting for $\mathcal{L}$ from (5.8.20) into these equations and using (5.8.21), we obtain

$$\beta_{1t} + \omega'_1 \beta_{1x} = \frac{3\epsilon}{8\omega_1} [a_1^2 + 2a_3^2 + a_1 a_3 \cos \delta] \tag{5.8.24}$$

$$\beta_{3t} + \omega'_3 \beta_{3x} = \frac{\epsilon}{8\omega_3} [6a_1^2 + 3a_3^2 + a_1^3 a_3^{-1} \cos \delta] \tag{5.8.25}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \omega'_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = -\frac{3\epsilon}{8\omega_1} a_1^2 a_3 \sin \delta \tag{5.8.26}$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + \omega'_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\epsilon}{8\omega_3} a_1^3 \sin \delta \tag{5.8.27}$$

These equations are in agreement with those obtained in Section 6.2.9 by using the method of multiple scales.

5.8.3. The Nonlinear Klein-gordon Equation

As a last example, we consider after Whitham (1965a) the nonlinear Klein-Gordon equation

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0 \quad (5.8.28)$$

where $V(u)$ is any nonlinear potential function which yields oscillatory solutions. Scott (1970) treated the special case $V(u) = -\cos u$, which represents the propagation of a magnetic flux on a long Josephson tunnel junction. The Lagrangian corresponding to this equation is

$$L = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - V(u) \quad (5.8.29)$$

For a uniform wave train solution $u(\theta)$, (5.8.28) becomes

$$(\omega^2 - k^2) u_{\theta\theta} + V'(u) = 0 \quad (5.8.30)$$

where

$$\omega = -\theta_t \quad \text{and} \quad k = \theta_x \quad (5.8.31)$$

A first integral of (5.8.30) is

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 + V(u) = E \quad (5.8.32)$$

Integrating this equation gives

$$\theta = \sqrt{\frac{\omega^2 - k^2}{2}} \int \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}} \quad (5.8.33)$$

We assume that u is periodic with a period that can be normalized to unity so that

$$\sqrt{\frac{\omega^2 - k^2}{2}} \oint \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}} = 1 \quad (5.8.34)$$

To determine approximate equations for slowly varying E, ω , and k , we substitute $u(\theta)$ for u in (5.8.29) and average the resulting Lagrangian over the interval $[0, 1]$. Thus

$$L = \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 - V(u) = (\omega^2 - k^2) u_\theta^2 - E \quad (5.8.35)$$

as a result of (5.8.32), hence

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^1 L[u(\theta)] d\theta = (\omega^2 - k^2) \int_0^1 u_\theta^2 d\theta - E \int_0^1 d\theta \\ &= (\omega^2 - k^2) \oint u_\theta du - E \\ &= \sqrt{2(\omega^2 - k^2)} \oint \sqrt{E - V(u)} du - E \end{aligned} \quad (5.8.36)$$

The variation of $\mathcal{L}$ with respect to E gives the dispersion relation (5.8.34). Since $\omega = -\theta_t$ and $k = \theta_x$, the Euler-Lagrange equation corresponding to the variable θ is

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0 \quad (5.8.37)$$

Substituting for $\mathcal{L}$ into (5.8.37), we obtain

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega W) + \frac{\partial}{\partial x}(kW) = 0 \quad (5.8.38)$$

where

$$W = \sqrt{\frac{2}{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{E - V(u)} du \quad (5.8.39)$$

The problem formulation is completed by augmenting (5.8.34) and (5.8.38) by the compatibility relation

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (5.8.40)$$

9.5.9 Exercises

5.1. Use the Stuart-Watson-Eckhaus technique to determine approximate solutions to

(a) $\ddot{u} + \lambda u = \epsilon u^3$

$u(0) = u(\pi) = 0$

(b) $u_{tt} - u_{xx} + u = \epsilon u^3$

$u(x, 0) = a \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0$

5.2. Use Struble's technique to determine uniform second-order expansions for (Struble, 1962)

(a) $\ddot{u} + u = \epsilon(1 - u^2)\dot{u}$

(b) $\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0$

5.3. Use the Krylov-Bogoliubov technique to determine approximate solutions for

(a) $\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\epsilon \dot{u}|\dot{u}|$

(b) $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon(1 - u^2)\dot{u} + \epsilon u^3$

(c) $\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0$

5.4. Consider Mathieu's equation

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0$$

Determine uniform second-order expansions using (a) the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique, (b) the generalized method of averaging, and (c) the Lie transforms.

5.5. Consider the equation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \epsilon q^3 + K \cos \omega t$$

(a) Show that it corresponds to the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{1}{4} \epsilon q^4 - K q \cos \omega t$$

(b) Determine a first-order expansion when

$K = O(1)$ and ω is away from $3\omega_0, \omega_0, \omega_0/3$.

(c) $K = O(1)$ and ω is near $3\omega_0$.

(d) $K = O(1)$ and ω is near $\omega_0/3$.

(e) $K = O(\epsilon)$ and ω is near ω_0 .

5.6. Consider the equation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \epsilon(1 - q^2)\dot{q} + K \cos \omega t$$

Use the Krylov-Bogoliubov method to determine first-order expansions for the cases enumerated in Exercise 5.5.

5.7. Use the generalized method of averaging, the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski method, and Kamel's method to determine second-order expansions for

$$\ddot{u} + u = \epsilon (1 - u^2) \dot{u} + \epsilon u^3$$

Compare the results of the three methods. Which of these techniques would you recommend for such problems?

5.8. Consider the problem

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + v^2u = -\epsilon f(u, \dot{u})$$

As $\epsilon \rightarrow 0$

$$u = a_0 e^{-\mu t} \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{v^2 - \mu^2}$$

(a) For $\epsilon \neq 0$ determine a uniform expansion following Mendelson (1970) by letting $u = u(a, \psi)$, where

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \cdots \\ \frac{da}{dt} &= -\mu a + \epsilon A_1(a) + \cdots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \epsilon B_1(a) + \cdots \end{aligned}$$

(b) Determine an expansion using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique.

(c) Which of these expansions is more accurate?

5.9. Consider the problem

$$\ddot{u} + \delta u + \epsilon b_1 u^m + \epsilon b_2 u^{n-1} - \epsilon b_3 u^{n-1} \cos \lambda t = 0$$

where δ, ϵ, b_i , and λ are constants and m is an odd while n is an even integer with $m > n$.

(a) For small ϵ find a solution of the form

$$u = a(t) \cos \theta, \quad \theta = \omega t - \phi(t), \quad \omega = \lambda/n$$

and use the method of averaging to determine equations for a and ϕ (Tso and Caughey, 1965).

(b) Determine a Hamiltonian corresponding to the above equation and then determine a first-order expansion using canonical variables for δ near ω^2 .

(c) Compare the results of the two techniques.

5.10. The problem of a spherical pendulum (i.e., a particle moving under the action of gravity on the surface of a smooth fixed sphere) is represented by the Hamiltonian (Johansen and Kane, 1969)

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - mg \sqrt{l^2 - q_1^2 - q_2^2} - \frac{(p_1 q_1 + p_2 q_2)^2}{2ml^2}$$

where q_i and p_i are the coordinates and momenta of the particle, m is its mass, g is the gravitational acceleration, and l is the radius of the sphere.

(a) Determine a first-order solution for small amplitudes using the method of averaging with canonical variables.

(b) Determine a second-order expansion using Lie transforms.

(c) Determine a second-order expansion using the generalized method of averaging.

(d) Compare the three resulting expansions.

5.11. Consider the problem of a swinging spring with damping

$$\ddot{x} + \delta_1 \dot{x} + \frac{k}{m}x + g(1 - \cos \theta) - (l + x)\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\ddot{\theta} + \delta_2 \dot{\theta} + \frac{g}{l+x} \sin \theta + \frac{2}{l+x} \dot{x} \dot{\theta} = 0$$

If $\omega_1^2 = k/m$ and $\omega_2^2 = g/l$, determine second-order uniform expansions using the generalized method of averaging, and the Lie transforms for the cases (a) $\omega_1 \approx 2\omega_2$ and (b) $\omega_1 \approx 3\omega_2$.

5.12. Consider (3.1.63) through (3.1.65). (a) Show that the corresponding Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{2} (h_1 q_2^2 + h_2 q_1^2) (1 + e \cos f)^{-1}$$

(b) Use the method of averaging with canonical variables to determine a first-order expansion near the transition curves starting at (μ_0, e) where $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2}/3)/2$.

(c) Use the Lie transforms to determine a second-order expansion near these transition curves.

5.13. Consider the motion of a particle described by the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_2 p_1 - q_1 p_2) + \frac{9}{8} q_1^2 + \left(\delta + \frac{1}{8} \right) q_2^2 + q_1^3 + 2q_1 q_2^2$$

where δ is a constant parameter. (a) Show that the circular frequencies of the linearized problem are 1 and 2 when $\delta = 1$, (b) use the method of averaging with canonical variables to determine a first-order expansion for small amplitudes when $\delta \approx 1$, (c) determine a first-order expansion using the method of averaging, and (d) which of these techniques would you recommend for such problems?

5.14. Consider the problem (Sethna, 1965)

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \epsilon (3b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2) - \epsilon \delta_1 \dot{x} + K_1 \cos \lambda t$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y = \epsilon (b_2 x^2 + 2b_3 xy + 3b_4 y^2) - \epsilon \delta_2 \dot{y} + K_2 \sin \lambda t$$

If internal resonance means $\omega_1 \approx 2\omega_2$ or $\omega_2 \approx 2\omega_1$, resonant excitation means $\lambda \approx \omega_1$ or ω_2 , soft excitation is denoted by $K_i = \epsilon k_i$ with $k_i = O(1)$, and hard excitation is denoted by $K_i = O(1)$, use the method of averaging to determine firstorder expansions for the following cases:

- (a) Hard nonresonant excitation in the absence of internal resonance.
- (b) hard nonresonant excitation in the presence of internal resonance.
- (c) soft resonant excitation in the absence of internal resonance.
- (d) soft resonant excitation in the presence of internal resonance.

5.15. Traveling waves in a cold plasma are governed by

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + E = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \omega_p^2 (1 - \rho)$$

Let $\rho = 1 + O(\epsilon)$, $u = O(\epsilon)$, and $E = O(\epsilon)$. Use the method of averaging to determine the temporal as well as the spatial variation of the amplitude and phase of a monochromatic traveling wave.

5.16. Consider the problem

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi = 0$$

- (a) Show that

$$\phi = a \cos \theta, \quad \theta = kx - \omega t$$

is a solution of this equation if $\omega^2 = k^2 + 1$.

(b) Show that the above equation can be written in the conservation forms (Whitham, 1965b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\phi_t^2 + \phi_x^2 + \phi^2) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (-\phi_x \phi_t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (-\phi_x \phi_t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (\phi_t^2 + \phi_x^2 - \phi^2) \right] &= 0 \end{aligned}$$

(c) Let $\phi = a \cos \theta$ with $a = a(x, t)$, $k = \theta_x$, and $\omega = -\theta_t$ in the conservation equations. Assume that a, ω , and k are slowly varying functions of x and t . Hence average these equations over $\theta = 0$ to 2π , keeping a, ω , and k constants, and obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega' a^2) &= 0 \end{aligned}$$

5.17. Consider the equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u = \epsilon u^3$$

(a) Write down the Lagrangian corresponding to this equation, (b) determine a first-order expansion for traveling waves with constant wave number and frequency but both spatially and temporally varying amplitude and phase.

5.18. The problem of nonlinear transverse oscillations in a homogeneous free-free beam with a nonlinear moment-curvature relationship is described by the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^4 \right]$$

where ρ, β , and ϵ are constants. Determine a first-order expansion for traveling waves with slowly varying amplitudes and phases using (a) the variational approach, and (b) writing down the governing equation and then using the method of averaging.

5.19. Consider Bretherton's (1964) model equation

$$\phi_{tt} + \phi_{xxxx} + \phi_{xx} + \phi = \phi^2$$

(a) Show that the linear problem has the dispersion relationship

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1$$

(b) Determine the wave number corresponding to n th-harmonic resonance.

(c) Use the method of averaging to determine a first-order expansion near the second-harmonic resonance condition (let the amplitudes and phases be functions of x and t).

(d) Write down the corresponding Lagrangian, and then use the variational approach to determine a first-order expansion near the second-harmonic resonance condition.

9.6 6 The Method of Multiple Scales

9.6.1 6.1. Description of the Method

There are three variants of the method of multiple scales. We describe them by discussing the linear damped oscillator

$$\ddot{x} + x = -2\epsilon\dot{x} \quad (6.1.1)$$

We chose this example because its exact solution is available for comparison with the approximate solution obtained, and because we will be able to display the different variants of the method more clearly without involving ourselves in algebra.

To start, let us determine a straightforward asymptotic expansion for small ϵ . Thus we assume that

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots \quad (6.1.2)$$

Substituting (6.1.2) into (6.1.1) and equating coefficients of equal powers of ϵ to zero lead to

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (6.1.3)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0 \quad (6.1.4)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\dot{x}_1 \quad (6.1.5)$$

The general solution of (6.1.3) is

$$x_0 = a \cos(t + \phi) \quad (6.1.6)$$

where a and ϕ are arbitrary constants. Substituting for x_0 into (6.1.4) and solving the resulting equation, we obtain

$$x_1 = -at \cos(t + \phi) \quad (6.1.7)$$

Substituting for x_1 in (6.1.5) and solving for x_2 , we obtain

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}at \sin(t + \phi) \quad (6.1.8)$$

Therefore

$$\begin{aligned} x = & a \cos(t + \phi) - \epsilon at \cos(t + \phi) \\ & + \frac{1}{2}\epsilon^2 a [t^2 \cos(t + \phi) + t \sin(t + \phi)] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

It is obvious that (6.1.9) is a poor approximation to x when t is as large as ϵ^{-1} , because then the second (ϵx_1) and the third ($\epsilon^2 x_2$) terms are not small compared to x_0 and ϵx_1 , respectively (x_1 and x_2 contain secular terms), as was assumed when we carried out the above expansion. Thus the straightforward expansion is not valid when t increases to $O(\epsilon^{-1})$, and the source of the difficulty is the infinite domain as discussed in Section 2.1.

The failure of the above straightforward expansion can be seen by investigating the exact solution of (6.1.1), which is given by

$$x = ae^{-\epsilon t} \cos \left[\sqrt{1 - \epsilon^2} t + \phi \right] \quad (6.1.10)$$

Equation (6.1.9) can be obtained by expanding (6.1.10) for small ϵ with t kept fixed. Thus the exponent and cosine factors are represented by

$$\exp(-\epsilon t) = 1 - \epsilon t + \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 + \dots \quad (6.1.11)$$

$$\cos(\sqrt{1 - \epsilon^2}t + \phi) = \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\epsilon^2 t \sin(t + \phi) + \dots \quad (6.1.12)$$

It is clear that $\exp(-\epsilon t)$ can be approximated by a finite number of terms only if the combination ϵt is small. Since ϵ is small, this means that $t = O(1)$. When t is as large as ϵ^{-1} , ϵt is not small and the truncated expansion breaks down. The above truncated series is satisfactory up to a certain value of t after which $\exp(-\epsilon t)$ and the truncated series differ from each other by a quantity that exceeds the prescribed limit of accuracy. Adding more terms to the truncated series increases the value of t to a new value t' for which this truncated series is satisfactory. However, for $t > t'$, the difference between $\exp(-\epsilon t)$ and the new truncated series again exceeds the prescribed limit of accuracy. All terms of the series are needed to give a satisfactory expansion for $\exp(-\epsilon t)$ for all t . Thus to determine an expansion valid for times as large as ϵ^{-1} , the combination ϵt should be considered a single variable $T_1 = O(1)$. Then any truncated expansion for $\exp(-\epsilon t)$ valid for times as large as ϵ^{-1} is of the form

$$\exp(-\epsilon t) = \exp(-T_1) \quad (6.1.13)$$

Similarly, the truncated expansion (6.1.12) is not satisfactory when t is as large as $O(\epsilon^{-2})$. To obtain a truncated asymptotic expansion for $\cos[\sqrt{1 - \epsilon^2}t + \phi]$ valid for $t = O(\epsilon^{-2})$, $\epsilon^2 t$ should be considered a single variable $T_2 = O(1)$. With this condition

$$\begin{aligned} \cos[\sqrt{1 - \epsilon^2}t + \phi] &= \cos\left[t - \frac{1}{2}T_2 + \phi - \frac{1}{8}\epsilon^4 t + \dots\right] \\ &= \cos\left(t - \frac{1}{2}T_2 + \phi\right) + \frac{1}{8}\epsilon^4 t \sin\left(t - \frac{1}{2}T_2 + \phi\right) + \dots \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Expansion (6.1.14) is valid when $t = O(\epsilon^{-2})$ because the correction term (second term) is $O(\epsilon^2)$ or less for all times up to $O(\epsilon^{-2})$. However, this expansion breaks down when $t = O(\epsilon^{-4})$ because the second term ceases to be small compared to the first. To obtain an expansion valid for times as large as $O(\epsilon^{-4})$, another variable, $T_4 = \epsilon^4 t = O(1)$, should be introduced.

The above discussion suggests that $x(t; \epsilon)$ depends explicitly on $t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \dots$, as well as ϵ itself. This can also be seen from the exact solution. Thus, in order to determine a truncated expansion valid for all t up to $O(\epsilon^{-M})$, where M is a positive integer, we must determine the dependence of x on the $M + 1$ different time scales $T_0, T_1, \dots, T_M$, where

$$T_m = \epsilon^m t \quad (6.1.15)$$

The time scale T_1 is slower than T_0 , while the time scale T_2 is slower than T_1 . In general, T_n is slower than T_{n-1} . Thus we assume that

$$\begin{aligned} x(t; \epsilon) &= \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_M; \epsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\epsilon T_M) \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

The error in (6.1.16) is stated $O(\epsilon T_M)$ to remind the reader that this expansion is valid for times up to $O(\epsilon^{-M})$. Beyond these times, we must use other time scales to keep the expansion uniformly valid. Equations (6.1.15) and (6.1.16) show that the problem has been transformed from an ordinary differential equation to a partial differential equation. If the original problem is a partial differential equation, then the introduction of different time scales increases the number of independent variables. By using the chain rule, the time derivative is transformed according to

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (6.1.17)$$

Equations (6.1.15) through (6.1.17) formulate one version of the method of multiple scales; namely, the many-variable version. This technique has been developed by Sturrock (1957, 1963), Frieman (1963), Nayfeh (1965c, d, 1968), and Sandri (1965, 1967). Equations (6.1.16) and (6.1.17) show that a uniformly valid expansion is obtained by expanding the derivatives as well as the dependent variables in powers of the small parameter. Hence Sturrock and Nayfeh called this technique the derivative-expansion method.

Substitution of (6.1.16) and (6.1.17) into (6.1.1) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations for determining $x_0, x_1, \dots, x_M$. The solutions of these equations contain arbitrary functions of the time scales $T_1, T_2, \dots, T_M$. In order to determine these functions, additional conditions need to be imposed. If (6.1.16) is to be valid for times as large as ϵ^{-M} , $\epsilon^m x_m$ should be a small correction to $\epsilon^{m-1} x_{m-1}$, which in turn should be a small correction to $\epsilon^{m-2} x_{m-2}$. Thus we require that

$$\frac{x_m}{x_{m-1}} < \infty \text{ for all } T_0, T_1, \dots, T_M$$

This condition does not mean that each x_m is bounded. In fact, each x_m may be unbounded. However, this condition requires, as in Lighthill's technique (Section 3.2), that higher approximations be no more singular than the first term. This condition is equivalent to the elimination of secular terms.

The second version of the method of multiple scales was introduced by Cole and Kevorkian (1963) and applied by Kevorkian (1966a) and Cole (1968) to several examples. Morrison (1966a) showed that this procedure is equivalent to the method of averaging to second order, while Perko (1969) established their equivalence to n th order. Kevorkian (1966b) showed the equivalence of this procedure and von Zeipel's method to first order. If we investigate the exact solution (6.1.10), we find that t appears in either of the combinations ϵt or $\sqrt{1 - \epsilon^2} t$. Hence to determine an expansion valid for large times, one introduces the two time scales

$$\xi = \epsilon t \quad \text{and} \quad \eta = \sqrt{1 - \epsilon^2} t = \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 + \dots\right) t \quad (6.1.18)$$

Therefore Cole and Kevorkian (1963) assumed that

$$\begin{aligned} x(t; \epsilon) &= \tilde{x}(\xi, \eta; \epsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon^m x_m(\xi; \eta) + O(\epsilon^M) \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

where

$$\xi = \epsilon t, \quad \eta = (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3 + \dots + \epsilon^M \omega_M) t \quad (6.1.20)$$

with constant ω_n . In this case ξ is slower than η , and the time derivative is transformed according to

$$\frac{d}{dt} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3 + \cdots + \epsilon^M \omega_M) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6.1.21)$$

These two versions can be generalized considerably. Thus the manyvariable version can be generalized (Nayfeh, 1967b) by using an asymptotic sequence $\delta_n(\epsilon)$ rather than powers of ϵ . Thus

$$T_n = \delta_n(\epsilon)t \quad (6.1.22)$$

$$\frac{d}{dt} = \sum_{n=0}^M \delta_n(\epsilon) \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (6.1.23)$$

Equations (6.1.22) and (6.1.23) can be generalized further by letting

$$T_n = \delta_n(\epsilon)g_n[\mu_n(\epsilon)t] \quad (6.1.24)$$

$$\frac{d}{dt} = \sum_{n=0}^M \delta_n(\epsilon)\mu_n(\epsilon)g'_n[\mu_n(\epsilon)t] \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (6.1.25)$$

where $\mu_n(\epsilon)$ is another asymptotic sequence. Thus (6.1.24) allows for linear as well as nonlinear time scales.

Similarly the two-variable expansion procedure can also be generalized. Thus (6.1.20) and (6.1.21) can be generalized to

$$\xi = \mu(\epsilon)t, \quad \eta = \sum_{n=0}^M \delta_n(\epsilon)g_n[\mu(\epsilon)t] \quad (6.1.26)$$

$$\frac{d}{dt} = \mu(\epsilon) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\sum_{n=0}^M \delta_n(\epsilon)\mu(\epsilon)g'_n[\mu(\epsilon)t] \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6.1.27)$$

This general form was developed by several investigators including Kuzmak (1959), Cochran (1962), Mahony (1962), and Nayfeh (1964, 1965b). Klimas, Ramnath, and Sandri (1970) investigated the role of gauge transformations for uniformization of asymptotic expansions.

The method of multiple scales is so popular that it is being rediscovered just about every 6 months. It has been applied to a wide variety of problems in physics, engineering, and applied mathematics.

Cole and Kevorkian (1963), Nayfeh (1965c, 1967b, 1968), Kevorkian (1966a), Davis and Alfriend (1967), Schwertassek (1969), and Musa (1967), Rasmussen (1970), and Reiss (1971) analyzed weakly linear and nonlinear vibrations governed by second- or third-order ordinary differential equations. Kuzmak (1959) studied nonlinear oscillations in second-order differential equations with slowly varying coefficients. Cochran (1962), Nayfeh (1964, 1965b), and Fowkes (1968I) used the generalized version to analyze turning point problems for second-order linear differential equations. Cochran (1962), Nayfeh (1964, 1965b), and Ramnath and Sandri (1969) used the generalized method to study linear equations with variable coefficients, while Cheng and Wu (1970) analyzed the effect of the scales on the problem of an aging spring. Noerdlinger and Petrosian (1971) discussed a linear inhomogeneous equation with slowly varying coefficients which describes the

effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles, while Kevorkian (1971) investigated the problem of passage through resonance for a one-dimensional oscillator with a slowly varying frequency. Cochran (1962), O'Malley (1968a, b), and Searl (1971) applied the generalized method to boundary value problems for certain nonlinear second-order differential equations, while Cochran (1962) and Ackerberg and O'Malley (1970) applied this method to second-order equations that exhibit turning points and boundary layers. Tam (1968) used the generalized version to solve the Orr-Sommerfeld equation.

In orbital mechanics, Nayfeh (1965a) used the generalized version to analyze the earth-moon-spaceship problem. Ting and Brofman (1964) and Nayfeh (1966) analyzed the problem of takeoff of a satellite from a circular orbit with a small thrust, Shi and Eckstein (1966) investigated takeoff from an elliptical orbit with a small thrust, Kevorkian (1966a) and Brofman (1967) studied the motion of a satellite subjected to a small thrust or drag, and Eckstein and Shi (1967) analyzed the motion of a satellite with variable mass and low thrust. Eckstein, Shi, and Kevorkian (1966a) determined the motion of a satellite around the primary in the restricted problem of three bodies, while Alfriend and Rand (1969) determined the stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. Eckstein, Shi, and Kevorkian (1966c) evaluated higher-order terms in the motion of a satellite using the energy integral and evaluated the effects of eccentricity and inclination (1966b). Shi and Eckstein (1968) analyzed the motion of an artificial satellite having a period commensurable with the rotation period of the primary. Alfriend (1970) and Nayfeh (1971b) studied the two-to-one resonances, while Nayfeh and Kamel (1970b) and Alfriend (1971b) studied the three-to-one resonances near the equilateral libration points. Alfriend (1971a) analyzed two-to-one resonances in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems.

In flight mechanics, Ashley (1967) discussed the role of different time scales in flight mechanics, while Nayfeh and Saric (1971b) analyzed nonlinear resonances in the motion of a missile with slight asymmetries. Nayfeh (1969a) used the generalized version to study the motion of a rolling missile with variable roll rate and dynamic pressure but linear aerodynamics, while Nayfeh and Saric (1972a) studied the motion of a missile with nonlinear aerodynamics and variable roll rate and dynamic pressure. Ramnath (1970b) studied the transition dynamics of VTOL aircraft.

In solid mechanics, Amazigo, Budiansky and Carrier (1970) analyzed the nonlinear buckling of imperfect columns, while Reiss and Matkowsky (1971) investigated the nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column. Mortell (1968) analyzed the problem of a traveling wave on a cylindrical shell and the propagation of waves on a spherical shell (1969). Kelly (1965)

and Morino (1969) studied nonlinear panel flutter, while Spriggs, Messiter, and Anderson (1969) discussed membrane flutter.

In partial differential equations, Cochran (1962), Nayfeh (1965b), and Comstock (1971) treated elliptic equations. Fowkes (1968, Part II) obtained uniformly valid expansions for caustic problems. Neubert (1970) obtained solutions for the Helmholtz equation for turbulent water. Wingate and Davis (1970) discussed the propagation of waves in an inhomogeneous rod. Keller and Kogelman (1970) treated a nonlinear initial boundary value problem for a partial differential equation.

Luke (1966) studied the Klein-Gordon equation and general variational equations of second order, while Emery (1970) treated the case of several dependent variables and several rapidly rotating phases. Ablowitz and Benney (1970) investigated the evolution of multiphase modes for the Klein-Gordon equation. Nayfeh and Hassan (1971) and Nayfeh and Saric (1972b) discussed nonlinear dispersive waves on the interface of two fluids and in a hot electron plasma. Parker (1969) analyzed the effects of relaxation and diffusive damping on dispersive waves.

In wave interactions, Benney and Saffman (1966), Benney (1967), Davidson (1967), Benney

and Newell (1967), Hoult (1968), Newell (1968), and Benney and Newell (1969) investigated the nonlinear interaction of random waves in a dispersive medium. Davidson (1969) studied the time evolution of wave correlations in a uniformly turbulent ensemble of weakly nonlinear dispersive systems.

In water waves, Carrier (1966) analyzed gravity waves in water of variable depth, while Hoogstraten (1968) and Freeman and Johnson (1970) studied shallow water waves in shear flows. Jacobs (1967) solved the tidal equations. Murray (1968) treated free surface oscillations in a tank resulting from drainage. Chu and Mei (1970) studied slowly varying Stokes' waves. McGoldrick (1970) and Nayfeh (1970b) treated the second-harmonic resonance case, while Nayfeh (1970d, 1971a) investigated the third-harmonic resonance case in the interaction of capillary and gravity waves.

In atmospheric science, Newell (1969) treated the resonant interaction of Rossby wave packets, while Stone (1969) analyzed the problem of baroclinic waves. Shabbar (1971) discussed the side-band resonance mechanism in the atmosphere supporting Rossby waves, while Lindzen (1971) studied the propagation of equatorial Tanai and Kelvin waves through shear.

In plasma physics, Ball (1964), Taussig (1969), and Tam (1969, 1970) analyzed the propagation of nonlinear waves in a cold plasma, while Nayfeh (1965d) and Das (1971) investigated nonlinear oscillations in a hot electron plasma. Davidson (1968) treated nonlinear oscillations in a Vlasov-Maxwell plasma. Peyret (1966) analyzed plasma waves in an accelerator, while Butler and Gribben (1968) discussed nonlinear waves in a nonuniform plasma.

Maroli and Pozzoli (1969) studied the penetration of high-frequency electromagnetic waves into a slightly ionized plasma. Abraham-Shrauner (1970a, b) investigated the suppression of runaway of electrons in a Lorentz gas. Chen and Lewak (1970), Chen (1971), and Prasad (1971) studied parametric excitation in a plasma, while Lewak (1971) discussed the interaction of electrostatic waves in a plasma. Dobrowolny and Rogister (1971) and Rogister (1971) analyzed the propagation of hydromagnetic waves in a high-beta plasma.

In hydrodynamic and plasma stability, Frieman and Rutherford (1964) developed a kinetic theory for weakly unstable plasmas, while Albright (1970) analyzed the stabilization of transverse plasma instability. Kelly (1967) investigated the stability of an inviscid shear layer. Benney and Roskes (1969) analyzed the instability of gravity waves. Kiang (1969) and Nayfeh (1969b) studied Rayleigh-Taylor instability, while Newell and Whitehead (1969) analyzed post-critical Rayleigh-Bénard convection. Nayfeh (1970c) investigated the nonlinear stability of a liquid jet. Nayfeh and Saric (1971a) studied nonlinear Kelvin-Helmholtz instability, while Puri (1971) analyzed the effects of viscosity and membrane on the oscillation of two superposed fluids. Stewartson and Stuart (1971) treated the nonlinear stability of plane Poiseuille flow. Mitchell (1971) applied this technique to combustion instability.

In fluid mechanics, Germain (1967) and Lick (1970) reviewed recent developments in aerodynamics and nonlinear wave propagation in fluids including the methods of matched asymptotic expansions, strained coordinates, and multiple scales. Benney (1965) analyzed the flow field produced by finite-amplitude oscillation of a disk about a steady state of rotation, while Barcilon (1970) studied the linear viscous theory of steady rotating fluid flows. Rubbert and Landahl (1967) discussed the transonic airfoil problem. Peyret (1970) treated the problem of steady flow of a conducting perfectly compressible fluid in a channel. Chong and Sirovich (1971) studied the problem of steady supersonic dissipative gas dynamics. Cheng, Kirsch, and Lee (1971) analyzed the behavior of a strong shock wave initiated by a point explosion and driven continuously outward by an inner contact surface.

In general physics, Caughey and Payne (1967) used a combination of the method of multiple scales and the method of matched asymptotic expansions to solve the Fokker-Planck equation arising from the response of self-excited oscillators to random excitations. Brau (1967) obtained a stochastic theory for the dissociation and recombination of diatomic molecules. Ram-

nath (1970a) obtained an approximation for the Thomas-Fermi model in atomic physics and treated a class of nonlinear differential equations arising in astrophysics (1971). Meyer (1971) investigated Rayleigh scattering of a laser beam from a massive relativistic two-level atom, while Nienhuis (1970) studied Brownian motion with a rotational degree of freedom.

In statistical mechanics, Maroli (1966) solved Boltzmann's equation to obtain a kinetic theory of high-frequency resonance gas discharge breakdown, while Caldirola, De Barbieri, and Maroli (1966) solved Boltzmann's equation for the electronic distribution function. De Barbieri and Maroli (1967) solved the Liouville equation to analyze the dynamics of weakly ionized gases, while Goldberg and Sandri (1967) and Ramanathan and Sandri (1969) derived sets of hierarchical equations.

In the remainder of this section, we describe the three versions of the method of multiple scales and their application to the simple linear damped oscillator given by (6.1.1). In the following sections we apply these techniques to different problems in mathematical physics.

6.1.1. Many-variable Version (the Derivativeexpansion Procedure)

Substituting (6.1.16) and (6.1.17) into (6.1.1) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain the following equations for x_0, x_1 , and x_2

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \quad (6.1.28)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (6.1.29)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \quad (6.1.30)$$

The general solution of (6.1.28) is

$$x_0 = A_0(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_0(T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.1.31)$$

where $\bar{A}_0$ is the complex conjugate of A_0 . This solution is simply equivalent to (6.1.6) where a and ϕ are taken to be functions of the slow time scales T_1 and T_2 rather than being constants. Substituting for x_0 from (6.1.31) into (6.1.29), we obtain

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2i \left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + 2i \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0} \quad (6.1.32a)$$

The general solution of (6.1.32a) is

$$\begin{aligned} x_1 = & A_1(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{-iT_0} \\ & - \left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{iT_0} - \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{-iT_0} \end{aligned} \quad (6.1.32b)$$

Comparing (6.1.32b) with (6.1.31) shows that ϵx_1 is a small correction to x only when $\epsilon T_0 = \epsilon t$ is small. In order to obtain an expansion valid for times as large as $O(\epsilon^{-1})$, the secular terms, $T_0 \exp(\pm iT_0)$, in (6.1.32b) must vanish; that is

$$A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} = 0 \quad (6.1.33)$$

or

$$A_0 = a_0 (T_2) e^{-T_1} \quad (6.1.34)$$

Then (6.1.32b) becomes

$$x_1 = A_1 (T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}_1 (T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.1.35)$$

Using x_0 and x_1 in (6.1.30), we obtain

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -Q (T_1, T_2) e^{iT_0} - \bar{Q} (T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.1.36)$$

where

$$Q (T_1, T_2) = 2iA_1 + 2i\frac{\partial A_1}{\partial T_1} - a_0 e^{-T_1} + 2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2} e^{-T_1} \quad (6.1.37)$$

The terms on the right-hand side of (6.1.36) produce secular terms because the particular solution is

$$x_2 = \frac{1}{2}iQ (T_1, T_2) T_0 e^{iT_0} - \frac{1}{2}i\bar{Q} (T_1, T_2) T_0 e^{-iT_0} \quad (6.1.38)$$

These secular terms make $\epsilon^2 x_2$ the same order as ϵx_1 when t is as large as $O(\epsilon^{-1})$. In order to eliminate these secular terms, Q must vanish; that is

$$\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 = \frac{1}{2}i \left(-a_0 + 2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) e^{-T_1} \quad (6.1.39)$$

In general, one does not need to solve for x_2 in order to arrive at (6.1.39). One needs only to inspect (6.1.36) and eliminate terms that produce secular terms. The general solution of (6.1.39) is

$$A_1 = \left[a_1 (T_2) + \frac{1}{2}i \left(-a_0 + 2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1} \quad (6.1.40)$$

Substituting for A_1 into (6.1.35), we obtain

$$x_1 = \left[a_1 (T_2) + \frac{1}{2}i \left(-a_0 + 2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1} e^{iT_0} + CC \quad (6.1.41)$$

where CC stands for the complex conjugate of the preceding expression. However

$$x_0 = [a_0 e^{iT_0} + \bar{a}_0 e^{-iT_0}] e^{-T_1} \quad (6.1.42)$$

Therefore, as $T_1 \rightarrow \infty$, although x_0 and $x_1 \rightarrow 0$, ϵx_1 becomes $O(x_0)$ as t increases to $O(\epsilon^{-2})$. Thus the expansion $x_0 + \epsilon x_1$ breaks down for t as large as $O(\epsilon^{-2})$ unless the coefficients of T_1 in the brackets in (6.1.41) vanish; that is, unless

$$-a_0 + 2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2} = 0 \quad (6.1.43)$$

or

$$a_0 = a_{00} e^{-iT_2/2} \quad (6.1.44)$$

where a_{00} is a constant. Then (6.1.40) becomes

$$A_1 = a_1 (T_2) e^{-T_1} \quad (6.1.45)$$

Therefore

$$x = e^{-T_1} \{ a_{00} e^{i(T_0 - T_2/2)} + \bar{a}_{00} e^{-i(T_0 - T_2/2)} + \epsilon [a_1(T_2) e^{iT_0} + \bar{a}_1(T_2) e^{-iT_0}] \} + O(\epsilon^2) \quad (6.1.46)$$

The function $a_1(T_2)$ can be determined by carrying out the expansion to third order

$$a_1(T_2) = a_{11} e^{-iT_2/2} \quad (6.1.47)$$

where a_{11} is a constant. If we assume that the initial conditions are such that $x(0) = a \cos \phi$ and $\dot{x}(0) = -a(\sin \phi \sqrt{1 - \epsilon^2} + \epsilon \cos \phi)$ and replace T_n by $\epsilon^n t$, we obtain

$$x = a e^{-\epsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t + \phi \right) + R \quad (6.1.48)$$

where R is the remainder. From (6.1.10) and (6.1.48), we find that

$$\begin{aligned} R &= a e^{-\epsilon t} \left[\cos \left(t \sqrt{1 - \epsilon^2} + \phi \right) - \cos \left(t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t + \phi \right) \right] \\ &= -2a e^{-\epsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \epsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) t + \phi \right] \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \epsilon^2} - 1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) t \right] \\ &= -2a e^{-\epsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \epsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) t + \phi \right] \sin \left[\left(-\frac{1}{16} \epsilon^4 + \dots \right) t \right] \\ &= O(\epsilon^4 t) \end{aligned} \quad (6.1.49)$$

For linear equations such as (6.1.1), we may introduce the different time scales without expanding x . Thus using (6.1.17) in (6.1.1), we obtain

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \dots \right] x + x \\ = -2\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right) x \end{aligned} \quad (6.1.50)$$

Equating the coefficients of like powers of ϵ to zero yields

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_0^2} + x = 0 \quad (6.1.51)$$

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_1} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_0} \quad (6.1.52)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_2} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_1} \quad (6.1.53)$$

The general solution of (6.1.51) is

$$x = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.1.54)$$

Substituting into (6.1.52), we obtain

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + A \right) e^{iT_0} - \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} + \bar{A} \right) e^{-iT_0} = 0 \quad (6.1.55)$$

Since (6.1.55) is valid for all T_0 , the coefficients of $\exp(iT_0)$ and $\exp(-iT_0)$ must vanish; that is

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + A = 0 \quad (6.1.56)$$

or

$$A = a(T_2) e^{-T_1} \quad (6.1.57)$$

Substituting (6.1.54) into (6.1.53) yields

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + CC = 0 \quad (6.1.58)$$

Thus

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} = 0 \quad (6.1.59)$$

Substituting for A from (6.1.57) into (6.1.59) gives

$$2i \frac{\partial a}{\partial T_2} - a = 0 \quad (6.1.60)$$

Hence

$$a = a_0 e^{-iT_2/2} \quad (6.1.61)$$

where a_0 is a constant.

Therefore (6.1.54) becomes

$$x = a_0 e^{-T_1} e^{i(T_0 - T_2/2)} + CC \quad (6.1.62)$$

Expressing (6.1.62) in terms of t yields

$$x = a e^{-\epsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t + \phi \right) \quad (6.1.63)$$

where $a_0 = (1/2)a \exp(i\phi)$. This result is in full agreement with (6.1.48).

6.1.2. The Two-variable Expansion Procedure

Changing the independent variable from t to ξ and η as defined by (6.1.21), we transform (6.1.1) into

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + 2\epsilon (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + x \\ = -2\epsilon (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial x}{\partial \eta} - 2\epsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (6.1.64)$$

We assume that

$$x = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (6.1.65)$$

Substituting (6.1.65) into (6.1.64) and equating coefficients of equal powers of ϵ on both sides, we obtain

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0 \quad (6.1.66)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} = -2 \frac{\partial x_0}{\partial \eta} \quad (6.1.67)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 + 2\omega_2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} = -2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi} \quad (6.1.68)$$

The general solution of (6.1.66) is

$$x_0 = A_0(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_0(\xi)e^{-i\eta} \quad (6.1.69)$$

With this solution, (6.1.67) becomes

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = -2i \left(\frac{dA_0}{d\xi} + A_0 \right) e^{i\eta} + CC \quad (6.1.70)$$

Eliminating the terms that produce secular terms in (6.1.70) gives

$$\frac{dA_0}{d\xi} + A_0 = 0 \quad (6.1.71)$$

Hence

$$x_1 = A_1(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi)e^{-i\eta} \quad (6.1.72)$$

The solution of (6.1.71) is

$$A_0 = a_0 e^{-\xi} \quad (6.1.73)$$

where a_0 is a constant.

Substituting the above solutions for x_0 and x_1 into (6.1.68) gives

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = \left[-2i \left(\frac{dA_1}{d\xi} + A_1 \right) + (2\omega_2 + 1) a_0 e^{-\xi} \right] e^{i\eta} + CC \quad (6.1.74)$$

Eliminating the terms that produce secular terms in (6.1.74) yields

$$\frac{dA_1}{d\xi} + A_1 = -\frac{1}{2}i (2\omega_2 + 1) a_0 e^{-\xi} \quad (6.1.75)$$

whose solution is

$$A_1 = a_1 e^{-\xi} - \frac{1}{2}i (2\omega_2 + 1) a_0 \xi e^{-\xi} \quad (6.1.76)$$

Substituting for A_1 into (6.1.72) and comparing the result with (6.1.69) show that x_1/x_0 is unbounded as $\xi \rightarrow \infty$ unless

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \quad (6.1.77)$$

Therefore in terms of t (6.1.65) becomes

$$x = a e^{-\epsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t + \phi \right) + O(\epsilon^2) \quad (6.1.78)$$

where $a_0 + \epsilon a_1 = (1/2)a \exp(i\phi)$. This expression is in full agreement with that obtained using the many-variable version (derivative-expansion method).

6.1.3. Generalized Method-nonlinear Scales

We first introduce a new variable $\tau = \epsilon t$ to transform (6.1.1) into

$$\epsilon^2 \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} \right) + x = 0 \quad (6.1.79)$$

In order to determine a uniformly valid expansion, we let

$$\xi = \tau, \quad \eta = \frac{g_{-1}(\tau)}{\epsilon} + g_0(\tau) + \epsilon g_1(\tau) + \cdots, \quad g_i(0) = 0 \quad (6.1.80)$$

where g_i is determined in the course of analysis. The derivatives with respect to τ are then transformed according to

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\epsilon} + g'_0(\xi) + \epsilon g'_1(\xi) + \cdots \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6.1.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\epsilon} + g'_0(\xi) + \epsilon g'_1(\xi) + \cdots \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ + \left[\frac{g''_{-1}(\xi)}{\epsilon} + g''_0(\xi) + \epsilon g''_1(\xi) + \cdots \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \\ + \left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\epsilon} + g'_0(\xi) + \epsilon g'_1(\xi) + \cdots \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (6.1.82)$$

We assume that x possesses a uniformly valid expansion of the form

$$x = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.1.83)$$

Substituting (6.1.81) through (6.1.83) into (6.1.79) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$g_{-1}^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0 \quad (6.1.84)$$

$$g_{-1}^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 + 2g'_{-1}g'_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + g''_{-1} \frac{\partial x_0}{\partial \eta} + 2g'_{-1} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} + 2g'_{-1} \frac{\partial x_0}{\partial \eta} = 0 \quad (6.1.85)$$

The general solution of (6.1.84) is

$$x_0 = A_0(\xi) \exp \left(i \frac{\eta}{g'_{-1}} \right) + \bar{A}_0(\xi) \exp \left(-i \frac{\eta}{g'_{-1}} \right) \quad (6.1.86)$$

Substituting for x_0 into (6.1.85) gives

$$\begin{aligned} g_{-1}^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = - \left[\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} + i \frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i \right) A_0 \right. \\ \left. + 2ig'_{-1} \left(\frac{A_0}{g'_{-1}} \right)' + 2 \frac{g''_{-1}}{g_{-1}^2} A_0 \eta \right] \exp \left(i \frac{\eta}{g'_{-1}} \right) + CC \end{aligned} \quad (6.1.87)$$

The terms on the right-hand side of (6.1.87) produce secular terms. In order to eliminate secular terms

$$\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} + i \frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i \right) A_0 + 2ig'_{-1} \left(\frac{A_0}{g'_{-1}} \right)' + 2 \frac{g''_{-1}}{g_{-1}^2} \eta A_0 = 0 \quad (6.1.88)$$

Since (6.1.88) must be valid for all η , and $A_0 \neq 0$ for a nontrivial solution, we require that

$$g''_{-1} = 0 \text{ or } g_{-1} = c\xi \text{ since } \eta(0) = 0 \quad (6.1.89)$$

where c is an arbitrary constant which can be taken to be unity without loss of generality. Then (6.1.88) becomes whose solution is

$$A'_0 + (1 + ig'_0) A_0 = 0 \quad (6.1.90)$$

$$A_0 = a_0 e^{-\xi - ig_0(\xi)} \quad (6.1.91)$$

where a_0 is a constant. With A_0 and g_{-1} known

$$x_0 = a_0 e^{-\tau} e^{i(\tau/\epsilon)} + \bar{a}_0 e^{-\tau} e^{-i(\tau/\epsilon)} \quad (6.1.92)$$

Equation (6.1.92) shows that g_0 cancels out, hence the solution is independent of the value of g_0 . Therefore we might as well set it equal to zero without loss of generality. Hence A_0 becomes

$$A_0 = a_0 e^{-\xi} \quad (6.1.93)$$

As a result of (6.1.88), the solution for x_1 is

$$x_1 = A_1(\xi) e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi) e^{-i\eta} \quad (6.1.94)$$

With $g_{-1} = \xi$ and $g_0 = 0$, the equation for x_2 can be determined by substituting (6.1.81) through (6.1.83) into (6.1.79) and equating the coefficient of ϵ^2 to zero. Thus

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + 2g'_1 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi} = 0 \quad (6.1.95)$$

Substituting for x_0 and x_1 into (6.1.95) yields

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = -[2i(A'_1 + A_1) - (2g'_1 + 1)a_0 e^{-\xi}] e^{i\eta} + CC \quad (6.1.96)$$

Eliminating the terms that produce secular terms in (6.1.96), we obtain

$$A'_1 + A_1 = -\frac{1}{2}i(2g'_1 + 1)a_0 e^{-\xi} \quad (6.1.97)$$

The solution of (6.1.97) is

$$A_1 = a_1 e^{-\xi} - \frac{1}{2}ia_0(2g_1 + \xi)e^{-\xi} \quad (6.1.98)$$

where a_1 is a constant. Equation (6.1.98) shows that x_1/x_0 is unbounded as $\xi \rightarrow \infty$ unless

$$g_1 = -\frac{1}{2}\xi \quad (6.1.99)$$

In terms of $t = \tau/\epsilon$, the expansion becomes

$$x = ae^{-\epsilon t} \cos\left(t - \frac{1}{2}\epsilon^2 t + \phi\right) + O(\epsilon^2) \quad (6.1.100)$$

where $a_0 + \epsilon a_1 = (1/2)a \exp(i\phi)$. This expansion is again in agreement with those obtained using the derivative-expansion and the two-variable expansion versions of the method of multiple scales.

9.6.2 6.2. Applications of the Derivative-expansion Method

6.2.1. The Duffing Equation

The second example to which we apply the derivative-expansion method is the Duffing equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \epsilon u^3 = 0 \quad (6.2.1)$$

We assume that

$$u = \sum_{n=0}^2 \epsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2) + O(\epsilon^3) \quad (6.2.2)$$

Then

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (6.2.3)$$

Substituting (6.2.2) and (6.2.3) into (6.2.1) and equating coefficients of each power of ϵ to zero, we have

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (6.2.4)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad (6.2.5)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - 3u_0^2 u_1 \quad (6.2.6)$$

The solution of (6.2.4) is

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (6.2.7)$$

Equation (6.2.5) then becomes

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -[2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.8)$$

In order that u_1/u_0 be bounded for all T_0 , terms that produce secular terms must be eliminated. Hence

$$2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (6.2.9)$$

and the solution for u_1 becomes

$$u_1 = B(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.10)$$

To solve (6.2.9), we let $A = (1/2)ae^{i\phi}$ with real a and ϕ , separate real and imaginary parts, and obtain

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + \frac{3}{8}a^2 = 0 \quad (6.2.11)$$

Hence

$$a = a(T_2), \quad \phi = \frac{3}{8\omega_0} a^2 T_1 + \phi_0(T_2) \quad (6.2.12)$$

Substituting for u_0 and u_1 into (6.2.6) yields

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -\frac{3}{8\omega_0^2} A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + \left[\frac{21}{8\omega_0^2} A^4 \bar{A} - 3BA^2 \right] e^{3i\omega_0 T_0} - Q(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.13)$$

where

$$Q = 2i\omega_0 D_1 B + 3A^2 \bar{B} + 6A\bar{A}B + 2i\omega_0 D_2 A - \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} \quad (6.2.14)$$

Secular terms are eliminated if

$$B = 0 \quad (6.2.15)$$

and

$$2i\omega_0 D_2 A = \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} \quad (6.2.16)$$

With $Q = 0$, the solution of u_2 , disregarding the homogeneous solution, is

$$u_2 = \frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5i\omega_0 T_0} - \frac{21A^4 \bar{A}}{64\omega_0^4} e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.17)$$

Letting $A = (1/2)ae^{i\phi}$ in (6.2.16) and separating real and imaginary parts, we obtain

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \phi}{\partial T_2} = \frac{15}{256\omega_0^2} a^4 \quad (6.2.18)$$

Equations (6.2.12) and (6.2.18) lead to $a = \text{a constant}$, hence

$$\phi_0 = -\frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \chi \quad (6.2.19a)$$

where χ is a constant. Therefore

$$\phi = \frac{3}{8\omega_0} a^2 T_1 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \chi \quad (6.2.19b)$$

Substituting for u_0, u_1 , and u_2 into (6.2.2), keeping in mind that $A = (1/2)a \exp(i\phi)$ and expressing the result in terms of t , we obtain

$$u = a \cos(\omega t + \chi) + \frac{\epsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \epsilon \frac{21a^2}{32\omega_0^2} \right) \cos 3(\omega t + \chi) + \frac{\epsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t + \chi) + O(\epsilon^3) \quad (6.2.20a)$$

where

$$\omega = \omega_0 + \frac{3a^2}{8\omega_0} \epsilon - \frac{15a^4}{256\omega_0^3} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (6.2.20b)$$

In the last two terms of (6.2.20a), ω_0 is replaced by ω with an error $O(\epsilon^3)$.

6.2.2. The Van Der Pol Oscillator

As a second example, we consider the van der Pol oscillator

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (6.2.21)$$

Substituting (6.2.2) and (6.2.3) into (6.2.21) and equating the coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (6.2.22)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 \quad (6.2.23)$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - D_1^2 u_0 - 2D_0 D_2 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_1 + (1 - u_0^2) D_1 u_0 - 2u_0 u_1 D_0 u_0 \quad (6.2.24)$$

The solution of (6.2.22) is

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.2.25)$$

Substituting for u_0 into (6.2.23) gives

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -i(2D_1 A - A + A^2 \bar{A}) e^{iT_0} - iA^3 e^{3iT_0} + CC \quad (6.2.26)$$

To eliminate terms that produce secular terms, we require the vanishing of the coefficients of $\exp(\pm iT_0)$; that is

$$2D_1 A = A - A^2 \bar{A} \quad (6.2.27)$$

Then the solution of (6.2.26) is

$$u_1 = B(T_1, T_2) e^{iT_0} + \frac{1}{8} i A^3 e^{3iT_0} + CC \quad (6.2.28)$$

In order to solve (6.2.27), we let

$$A = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) \exp i\phi(T_1, T_2) \quad (6.2.29)$$

Separating real and imaginary parts in (6.2.27), we obtain

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a \quad (6.2.30)$$

Hence

$$\phi = \phi(T_2), \quad a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2) e^{-T_1}} \quad (6.2.31)$$

If we are interested in the first approximation to u , then we consider B , ϕ , and c as constants. Moreover, if $u(0) = a_0$ and $du(0)/dt = 0$, then

$$u = a \cos t + O(\epsilon) \quad (6.2.32)$$

where

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\epsilon t}} \quad (6.2.33)$$

which is in agreement with the expansion obtained in Section 5.4.2 using the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique.

To determine the second approximation, we need to determine the functions B , ϕ , and c . Thus we substitute for u_0 and u_1 into (6.2.24) and obtain

$$D_0^2 u_2 + u_2 = Q(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{Q}(T_1, T_2) e^{-iT_0} + \text{NST} \quad (6.2.34a)$$

where

$$\begin{aligned} Q = & -2iD_1 B + i(1 - 2A\bar{A})B - iA^2\bar{B} - 2iD_2 A - D_1^2 A \\ & + (1 - 2A\bar{A})D_1 A - A^2 D_1 \bar{A} + \frac{1}{8} A^3 \bar{A}^2 \end{aligned} \quad (6.2.34b)$$

Secular terms will be eliminated if $Q = 0$. To solve (6.2.34b) with $Q = 0$, we let $B = (1/2)ib \exp i\phi$ with b real and ϕ defined in (6.2.29). We substitute for A and B into (6.2.34b) with $Q = 0$, separate real and imaginary parts, and obtain

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad \text{or} \quad a = a(T_1) \quad (6.2.35a)$$

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)b = -2a \frac{d\phi}{dT_2} + \frac{d^2 a}{dT_1^2} - \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) \frac{da}{dT_1} - \frac{1}{128}a^5 \quad (6.2.35b)$$

With the help of (6.2.30), (6.2.35b) can be expressed in the form

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \frac{2}{a} \frac{da}{dT_1} b = -2a \left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{7}{18}a^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{da}{dT_1} \quad (6.2.36a)$$

Thus

$$d \left(\frac{b}{a} \right) = - \left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) dT_1 + \left(\frac{7}{32}a - \frac{1}{8a} \right) da \quad (6.2.36b)$$

Integrating, we obtain

$$b = -a \left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) T_1 + \frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a \ln a + ab_0(T_2) \quad (6.2.36c)$$

In order that u_1/u_0 be bounded for all T_1 , the coefficient of T_1 in the above expression for b must vanish. This condition gives

$$\phi = -\frac{1}{16}T_2 + \phi_0 \quad (6.2.37)$$

where ϕ_0 is a constant. The expansion of u to second approximation is then

$$\begin{aligned} u = & a \cos \left[\left(1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \\ & - \epsilon \left\{ \left(\frac{7}{6}a^3 - \frac{1}{8}a \ln a + ab_0 \right) \sin \left[\left(1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{32}a^3 \sin 3 \left[\left(1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

where a is defined by (6.2.33) and b_0 is considered a constant to within the order of error indicated. To an error of $O(\epsilon^2)$, this expression can be written as

$$u = a \cos(t - \theta) - \frac{1}{32} \epsilon a^3 \sin 3(t - \theta) + O(\epsilon^2) \quad (6.2.39a)$$

where

$$\theta = \frac{1}{16} \epsilon^2 t + \frac{1}{8} \epsilon \ln a - \frac{7}{64} \epsilon a^2 + \theta_0 \quad (6.2.39b)$$

and $\theta_0 = -\phi_0 - \epsilon b_0 = a$ constant. This last form of the solution is in full agreement with that obtained in Section 5.4.2 using the Krylov-BogoliubovMitropolski method.

6.2.3. Forced Oscillations of the Van Der Pol Equation

We consider next the response of the van der Pol oscillator, discussed in the previous section, to a periodic external force; that is, the oscillations of the equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} + K \cos \lambda t \quad (6.2.40)$$

where K and λ are real constants. Four cases arise depending on whether the excitation (external force) is "soft" [i.e., $K = O(\epsilon)$] or "hard" [i.e., $K = O(1)$], and whether the excitation is resonant [i.e., $\lambda - \omega_0 = O(\epsilon)$] or nonresonant [i.e., $\lambda - \omega_0 = O(1)$].

Soft Nonresonant Excitation. In this case $K = \epsilon k$, where $k = O(1)$, and we express $\cos \lambda t$ in the form $\cos \lambda T_0$. To determine a first approximation to u , we let

$$u = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (6.2.41)$$

with $T_0 = t$ and $T_1 = \epsilon t$. Substituting (6.2.41) into (6.2.40) and equating the coefficients of ϵ^0 and ϵ on both sides, we obtain

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (6.2.42)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 + k \cos \lambda T_0 \quad (6.2.43)$$

The solution of (6.2.42) is

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (6.2.44)$$

Substituting for u_0 into (6.2.43) gives

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & i\omega_0 (-2A' + A - A^2 \bar{A}) e^{i\omega_0 T_0} \\ & + \frac{1}{2} k e^{i\lambda T_0} - i\omega_0 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

For there to be no secular terms, we require that

$$2A' = A - A^2 \bar{A} \quad (6.2.46)$$

9.6.3 6.2. Applications of the Derivative-expansion Method 249

where the prime denotes differentiation with respect to T_1 . Then the solution of (6.2.45) is

$$u_1 = B(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0^2 - \lambda^2} e^{i\lambda T_0} + \frac{iA^3}{8\omega_0} e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.47)$$

Letting $A = (1/2)a \exp i\phi$ in (6.2.46), separating real and imaginary parts, and solving the resulting equations, we find that ϕ is a constant, while a is given by (6.2.33).

Therefore, to first approximation

$$u = a \cos \omega_0 t + O(\epsilon) \quad (6.2.48)$$

where a is given by (6.2.33).

Equations (6.2.33) and (6.2.48) show that, to first approximation, neither the phase nor the amplitude is affected by the presence of a soft nonresonant excitation. Moreover, the natural response (i.e., the case with $k = 0$) dominates the forced response, as expected, since the forcing function is soft. However, as the forcing frequency λ approaches the natural frequency ω_0 , the forced response becomes more significant and approaches infinity as can be seen from (6.2.47), and the above expansion is no longer valid.

Hard Nonresonant Excitation. In this case $K = O(1)$ and (6.2.42) and (6.2.43) are modified to

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = K \cos \lambda T_0 \quad (6.2.49)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 \quad (6.2.50)$$

The solution of (6.2.49) is

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda T_0 \quad (6.2.51)$$

Substituting for u_0 into (6.2.50) gives

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = i\omega_0 [-2A' + A\eta - A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} + CC + \text{NST} \quad (6.2.52)$$

where $\eta = 1 - K^2/2(\omega_0^2 - \lambda^2)^2$. In order to eliminate the secular terms, we require that

$$2A' = A\eta - A^2 \bar{A} \quad (6.2.53)$$

To solve (6.2.53), we let $A = (1/2)a \exp i\phi$, separate real and imaginary parts, and obtain $\phi = \text{a constant}$ and

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2}a \left(\eta - \frac{1}{4}a^2 \right) \quad (6.2.54)$$

The solution of (6.2.54) can be obtained by separation of variables to be

$$\ln a^2 - \ln \left(\eta - \frac{1}{4}a^2 \right) = \eta T_1 + \text{a constant}$$

If $u(0) = a_0 + [K/(\omega_0^2 - \lambda^2)]$ and $du(0)/dt = 0$, the first approximation to u is given by

$$u = a \cos \omega_0 t + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\epsilon) \quad (6.2.55)$$

where

$$a^2 = \frac{4\eta}{1 + \left(\frac{4\eta}{a_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon\eta t}} \quad (6.2.56)$$

The steady-state solution (i.e., $t \rightarrow \infty$) depends on whether η is positive or negative [i.e., K^2 is less than or greater than $2(\omega_0^2 - \lambda^2)^2$]. For negative η , $\exp(-\epsilon\eta t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, hence $a \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, and the steady-state solution is

$$u_s = \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\epsilon) \quad (6.2.57)$$

However, for positive η , $\exp(-\epsilon\eta t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, and $a \rightarrow 2\sqrt{\eta}$ as $t \rightarrow \infty$. Consequently, the steady-state solution is

$$u_s = 2\sqrt{\eta} \cos \omega_0 t + \frac{K}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \lambda t + O(\epsilon) \quad (6.2.58)$$

Therefore, if η is negative, the natural response fades away and the steady-state solution consists of the forced response only. However, if η is positive, the steady-state solution is a combination of the natural and forced responses, with the amplitude of the natural response modified by the presence of the hard excitation.

Soft Resonant Excitation. In this case $K = \epsilon k$ with $k = O(1)$, and $\lambda - \omega_0 = \sigma\epsilon$ with the detuning $\sigma = O(1)$. In order to determine a valid asymptotic expansion in this case, we express the excitation in terms of T_0 and T_1 according to

$$K \cos \lambda t = \epsilon k \cos(\omega_0 t + \sigma\epsilon t) = \epsilon k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (6.2.59)$$

With this expression for the excitation, the equations for u_0 and u_1 of (6.2.41) are

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (6.2.60)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (6.2.61)$$

The general solution of (6.2.60) is

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (6.2.62)$$

Hence (6.2.61) becomes

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = \left[i\omega_0 (-2A' + A - A^2 \bar{A}) + \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1} \right] e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.63)$$

The terms proportional to $\exp(\pm i\omega_0 T_0)$ in (6.2.63) produce secular terms with respect to the time scale T_0 because the terms in the brackets are functions of T_1 only. In order that u_1/u_0 be bounded for all T_0

$$2A' = A - A^2 \bar{A} - \frac{1}{2\omega_0} i k e^{i\sigma T_1} \quad (6.2.64)$$

To solve (6.2.64), we let $A = (1/2)a \exp i\phi$, separate real and imaginary parts, and obtain

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2}a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \phi) \quad (6.2.65)$$

$$\frac{d\phi}{dT_1} = -\frac{k}{2\omega_0 a} \cos(\sigma T_1 - \phi) \quad (6.2.66)$$

To eliminate the explicit time dependence of the right-hand sides of (6.2.65) and (6.2.66), we let

$$\psi = \sigma T_1 - \phi \quad \text{or} \quad \frac{d\psi}{dT_1} = \sigma - \frac{d\phi}{dT_1} \quad (6.2.67)$$

Hence (6.2.65) and (6.2.66) become

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2}a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin \psi \quad (6.2.68)$$

$$\frac{d\psi}{dT_1} = \sigma + \frac{k}{2\omega_0 a} \cos \psi \quad (6.2.69)$$

Periodic solutions of the externally excited oscillator (6.2.40) correspond to the stationary solutions of (6.2.68) and (6.2.69); that is, $da/dT_1 = d\psi/dT_1 = 0$, or

$$\frac{1}{2}\tilde{a} \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{a}^2\right) + \frac{k}{2\omega_0} \sin \tilde{\psi} = 0 \quad (6.2.70)$$

$$\sigma + \frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}} \cos \tilde{\psi} = 0 \quad (6.2.71)$$

where the tilde refers to the stationary solution. Elimination of $\tilde{\psi}$ from these equations leads to the following frequency response equation

$$\rho(1 - \rho)^2 + 4\sigma^2\rho = \frac{k^2}{4\omega_0^2} = F^2, \quad \rho = \frac{\tilde{a}^2}{4} \quad (6.2.72)$$

For a given excitation amplitude ϵk and frequency $\lambda = \omega_0 + \epsilon\sigma$, (6.2.72) furnishes ρ , hence the amplitude of harmonic oscillations. To first approximation the harmonic oscillation is given by

$$u = \tilde{a} \cos(\omega_0 t + \tilde{\phi}) + O(\epsilon) \quad (6.2.73)$$

while the frequency of oscillation is

$$\omega = \frac{d}{dt}(\omega_0 t + \tilde{\phi}) = \omega_0 + \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = \omega_0 + \epsilon\sigma = \lambda \quad (6.2.74)$$

Therefore, as λ approaches ω_0 , the natural response is entrained by the forced response. The result is a synchronization of the output at the excitation frequency.

The stability of these harmonic oscillations can be obtained by letting

$$a = \tilde{a} + \Delta a, \quad \psi = \tilde{\psi} + \Delta \psi \quad (6.2.75)$$

Developing the right-hand sides of (6.2.68) and (6.2.69) in powers of Δa and $\Delta \psi$ and keeping only linear terms, we have

$$\frac{d(\Delta a)}{dT_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \tilde{a}^2 \right) \Delta a + \frac{k}{2\omega_0} \cos \tilde{\psi} \Delta \psi \quad (6.2.76)$$

$$\frac{d(\Delta \psi)}{dT_1} = -\frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}^2} \cos \tilde{\psi} \Delta a - \frac{k}{2\omega_0 \tilde{a}} \sin \tilde{\psi} \Delta \psi \quad (6.2.77)$$

If we let $\Delta a \propto \exp mT_1$ and $\Delta \psi \propto \exp mT_1$, then m must satisfy the equation

$$m^2 - \Omega m + \Delta = 0 \quad (6.2.78)$$

where

$$\Omega = 1 - 2\rho, \quad \Delta = \frac{1}{4} (1 - 4\rho + 3\rho^2) + \sigma^2 \quad (6.2.79)$$

where use has been made of (6.2.70) and (6.2.71). The discriminant of (6.2.78) is

$$D = \rho^2 - 4\sigma^2 \quad (6.2.80)$$

The loci $\Omega = \Delta = D = 0$ are called separatrices and shown in Figure 6-1. The locus $\Delta = 0$ is an ellipse whose center is $\rho = 2/3, \sigma = 0$, while the locus $D = 0$ is the two straight lines $\rho = \pm 2\sigma$. The interior points of the ellipse correspond to saddle points, hence the corresponding harmonic oscillations are unstable. The points exterior to the ellipse are nodes if

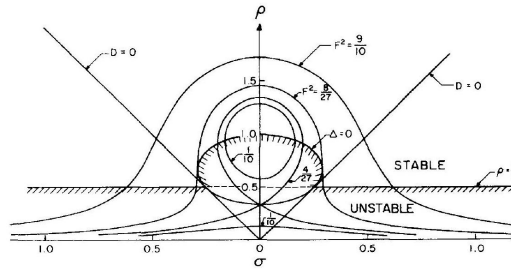


Figure 6-1

$D \geq 0$ and foci if $D < 0$. The harmonic oscillations corresponding to these points are stable or unstable according to whether ρ is greater or less than $1/2$.

Hard Resonant Excitation. The analysis for this case can be obtained as a special case of the previous case, with $k = K/\epsilon$, where the amplitude of excitation $K = O(1)$. Hence k is very large because ϵ is small. Thus, for σ near zero, (6.2.72) shows that there exists only one amplitude ρ for harmonic oscillation and it is stable. As k increases without bound the amplitude increases without bound also.

6.2.4. Parametric Resonance-mathieu Equation

Let us return to the Mathieu equation discussed in Section 3.1.2, namely

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0 \quad (6.2.81)$$

According to the Floquet theory of linear differential equations with periodic coefficients, the $\delta - \epsilon$ plane is divided into regions of stability and instability which are separated by transition curves along which u is periodic with a period of either π or 2π . In Section 3.1.2, we determined approximations to the transition curves using the Lindstedt-Poincaré method. In this section

we find not only the transition curves but also the solutions, hence the degree of stability or instability, as we found in Section 3.1.3 using Whittaker's method. To this end we let

$$\delta = \omega_0^2 \quad \text{with positive } \omega_0 \quad (6.2.82)$$

and assume that

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \cdots \quad (6.2.83)$$

Different cases have to be distinguished depending on whether ω_0 is near or far away from an integer n .

Solution for ω_0 Far Away from an Integer. We express $\cos 2t$ in terms of the time scale T_0 as $\cos 2T_0$. Substituting (6.2.83) into (6.2.81) and equating the coefficients of ϵ^0, ϵ , and ϵ^2 to zero, we obtain

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (6.2.84)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0 \cos 2T_0 \quad (6.2.85)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - u_1 \cos 2T_0 \quad (6.2.86)$$

The solution of (6.2.84) is

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (6.2.87)$$

Substituting for u_0 into (6.2.85) yields

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 T_0} - \frac{1}{2} A e^{i(\omega_0+2)T_0} - \frac{1}{2} A e^{i(\omega_0-2)T_0} + CC \quad (6.2.88)$$

Since ω_0 is far away from 1, secular terms will be eliminated if $D_1 A = 0$ or $A = A(T_2)$. Then the solution of u_1 is

$$u_1 = \frac{1}{8(\omega_0 + 1)} A e^{i(\omega_0+2)T_0} - \frac{1}{8(\omega_0 - 1)} A e^{i(\omega_0-2)T_0} + CC \quad (6.2.89)$$

Substituting for u_0 and u_1 into (6.2.86) yields

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = & -2 \left[i\omega_0 D_2 A - \frac{A}{16(\omega_0^2 - 1)} \right] e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \frac{1}{16(\omega_0 + 1)} A e^{i(\omega_0+4)T_0} + \frac{1}{16(\omega_0 - 1)} A e^{i(\omega_0-4)T_0} + CC \end{aligned} \quad (6.2.90)$$

Since ω_0 is far away from 1 or 2, secular terms will be eliminated if

$$D_2 A = -\frac{i}{16\omega_0(\omega_0^2 - 1)} A \quad (6.2.91)$$

If we let $A = (1/2)a \exp i\phi$ and separate real and imaginary parts, we obtain

$$\frac{da}{dT_2} = 0, \quad \frac{d\phi}{dT_2} = -\frac{1}{16\omega_0(\omega_0^2 - 1)} \quad (6.2.92)$$

Therefore

$$a = \text{a constant, and } \phi = -\frac{1}{16\omega_0(\omega_0^2 - 1)} T_2 + \phi_0 \quad (6.2.93)$$

where ϕ_0 is a constant. With (6.2.91) the solution of (6.2.90) is

$$u_2 = \frac{1}{128(\omega_0 + 1)(\omega_0 + 2)} A e^{i(\omega_0 + 4)T_0} + \frac{1}{128(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 2)} A e^{i(\omega_0 - 4)T_0} + CC \quad (6.2.94)$$

Summarizing, to $O(\epsilon^2)$, the solution for u is

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\omega t + \phi_0) \\ & + \frac{\epsilon a}{8} \left\{ \frac{1}{\omega_0 + 1} \cos[(\omega + 2)t + \phi_0] - \frac{1}{\omega_0 - 1} \cos[(\omega - 2)t + \phi_0] \right\} \\ & + \frac{\epsilon^2 a}{128} \left\{ \frac{1}{(\omega_0 + 1)(\omega_0 + 2)} \cos[(\omega + 4)t + \phi_0] \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 2)} \cos[(\omega - 4)t + \phi_0] \right\} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (6.2.95)$$

where

$$\omega = \omega_0 - \frac{\epsilon^2}{16\omega_0(\omega_0^2 - 1)} + O(\epsilon^3) \quad (6.2.96)$$

We emphasize again that this expansion is valid only when ω_0 is away from 1 and 2. As $\omega_0 \rightarrow 1$ or 2, $u \rightarrow \infty$. An expansion valid near $\omega_0 = 1$ is obtained next.

Solution for ω_0 Near 1. In this case we let

$$\delta = 1 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots \quad (6.2.97)$$

with δ_1 and $\delta_2 = O(1)$. Equation (6.2.97) modifies (6.2.84) through (6.2.86) into

$$(6.2.98)$$

The solution of (6.2.98) is

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0} \quad (6.2.101)$$

Substituting for u_0 into (6.2.99) gives

$$D_0^2 u_1 + u_1 = \left(-2iD_1 A - \delta_1 A - \frac{1}{2}\bar{A} \right) e^{iT_0} - \frac{1}{2} A e^{3iT_0} + CC \quad (6.2.102)$$

Secular terms with respect to the time scale T_0 will be eliminated if

$$D_1 A = \frac{1}{2}i \left(\delta_1 A + \frac{1}{2}\bar{A} \right) \quad (6.2.103)$$

Then the solution of (6.2.102) is

$$u_1 = \frac{1}{16} (A e^{3iT_0} + \bar{A} e^{-3iT_0}) \quad (6.2.104)$$

To solve (6.2.103), we assume that

$$A = A_r + iA_i \quad (6.2.105)$$

where A_r and A_i are real, and separate real and imaginary parts to obtain

$$\frac{\partial A_r}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) A_i \quad (6.2.106)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \delta_1 \right) A_r \quad (6.2.107)$$

The solution of these equations is

$$A_r = a_1(T_2) e^{\gamma_1 T_1} + a_2(T_2) e^{-\gamma_1 T_1} \quad (6.2.108)$$

$$A_i = \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2} - \delta_1} [a_1(T_2) e^{\gamma_1 T_1} - a_2(T_2) e^{-\gamma_1 T_1}] \quad (6.2.109)$$

where

$$\gamma_1^2 = 1 \left(\frac{1}{4} - \delta_1^2 \right) \quad (6.2.110)$$

Here a_1 and a_2 are real valued functions of the time scale T_2 ; however, to first approximation, a_1 and a_2 are constant.

Equations (6.2.108) through (6.2.110) show that A grows exponentially with T_1 (i.e., with t) if γ_1 is real or $|\delta_1| \leq 1/2$, and A oscillates with T_1 if γ_1 is imaginary or $|\delta_1| \geq 1/2$ (in this case the solution is written in terms of $\cos \gamma_1 T_1$ and $\sin \gamma_1 T_1$ to keep A_r and A_i real). Hence the boundaries (transition curves) that separate the stable from the unstable domains emanating from $\delta = 1, \epsilon = 0$ are given to a first approximation by $\delta_1 = \pm 1/2$ or

$$\delta = 1 \pm \frac{1}{2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (6.2.111)$$

To determine a second approximation to u and the transition curves, we substitute for u_0 and u_1 into (6.2.100) and obtain

$$D_0^2 u_2 + u_2 = - \left[2i D_2 A + D_1^2 A + \left(\delta_2 + \frac{1}{32} \right) A \right] e^{iT_0} + CC + NST \quad (6.2.112)$$

The condition that must be satisfied for there to be no secular terms is

$$2i D_2 A + D_1^2 A + \left(\delta_2 + \frac{1}{32} \right) A = 0 \quad (6.2.113)$$

Since $A = A_r + iA_i$, (6.2.113) gives the following equations for A_r and A_i upon separation of real and imaginary parts

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial A_r}{\partial T_2} + \alpha A_i &= 0 \\ -2 \frac{\partial A_i}{\partial T_2} + \alpha A_r &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.115)$$

where

$$\alpha = \gamma_1^2 + \delta_2 + \frac{1}{32} \quad (6.2.116)$$

Replacing A_r and A_i by their expressions from (6.2.108) and (6.2.109) and equating the coefficients of $\exp(\pm \gamma_1 T_1)$ to zero because they are functions of T_2 , we obtain

$$\begin{aligned} 2\frac{da_1}{dT_2} + \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2}-\delta_1}\alpha a_1 &= 0, & -\frac{4\gamma_1}{\frac{1}{2}-\delta_1}\frac{da_1}{dT_2} + \alpha a_1 &= 0 \\ 2\frac{da_2}{dT_2} - \frac{2\gamma_1}{\frac{1}{2}-\delta_1}\alpha a_2 &= 0, & \frac{4\gamma_1}{\frac{1}{2}-\delta_1}\frac{da_2}{dT_2} + \alpha a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.118)$$

These equations lead to

$$\frac{da_1}{dT_2} = \frac{da_2}{dT_2} = 0 \quad \text{or} \quad a_1 = \text{a constant} \quad \text{and} \quad a_2 = \text{a constant} \quad (6.2.119)$$

and

$$\alpha = 0 \quad \text{or} \quad \delta_2 = -\gamma_1^2 - \frac{1}{32} \quad (6.2.120)$$

Therefore, to second approximation, the solution is given by (3.1.57) through (3.1.62) which were obtained by Whittaker's method.

6.2.5. The Van Der Pol Oscillator with Delayed Amplitude Limiting

The next example is a third-order problem as opposed to the previous examples which are of the second order. It is given in dimensionless quantities by

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 2\mu \frac{d}{dt}[(1-Z)v] + 2\frac{de}{dt} \quad (6.2.121)$$

$$\tau \frac{dZ}{dt} + Z = v^2 \quad (6.2.122)$$

where v is voltage, t is time, e is excitation, ω_0 is natural frequency, τ is delay time, Z is output of the low-pass filter, and μ is a measure of the servo-loop gain. This oscillator was first studied by Golay (1964) and then by Scott (1966) and Nayfeh (1967b, 1968). We consider here free oscillations (i.e., $e \equiv 0$) and refer the reader to Nayfeh (1968) for the forced oscillation case.

To determine a first approximation to the above equations, we assume that

$$v = v_0(T_0, T_1) + \mu v_1(T_0, T_1) + \dots \quad (6.2.123)$$

$$Z = Z_0(T_0, T_1) + \mu Z_1(T_0, T_1) + \dots \quad (6.2.124)$$

with

$$T_0 = t, \quad T_1 = \mu t \quad (6.2.125)$$

Substituting (6.2.123) through (6.2.125) into (6.2.121) and (6.2.122) and equating coefficients of like powers of μ , we obtain

$$D_0^2 v_0 + \omega_0^2 v_0 = 0 \quad (6.2.126)$$

$$\tau D_0 Z_0 + Z_0 = v_0^2 \quad (6.2.127)$$

$$D_0^2 v_1 + \omega_0^2 v_1 = 2D_0[(1-Z_0)v_0 - D_1 v_0] \quad (6.2.128)$$

$$\tau D_0 Z_1 + Z_1 = -\tau D_1 Z_0 + 2v_0 v_1 \quad (6.2.129)$$

The solution of (6.2.126) is

$$v_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (6.2.130)$$

Substituting for v_0 into (6.2.127) gives

$$\tau D_0 Z_0 + Z_0 = A\bar{A} + A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + CC \quad (6.2.131)$$

Its solution is

$$Z_0 = B(T_1) e^{-T_0/\tau} + 2A\bar{A} + \frac{A^2 e^{2i\omega_0 T_0}}{1 + 2i\omega_0 \tau} + \frac{\bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}}{1 - 2i\omega_0 \tau} \quad (6.2.132)$$

With v_0 and Z_0 known (6.2.128) becomes

$$D_0^2 v_1 + \omega_0^2 v_1 = 2i\omega_0 Q(T_1) e^{i\omega_0 T_0} - 2AB \left(i\omega_0 - \frac{1}{\tau} \right) e^{[i\omega_0 - (1/\tau)]T_0} - 6i\omega_0 \frac{A^3 e^{3i\omega_0 T_0}}{1 + 2i\omega_0 \tau} + CC \quad (6.2.133)$$

where

$$Q = A - 2A^2 \bar{A} - \frac{A^2 \bar{A}}{1 + 2i\omega_0 \tau} - D_1 A \quad (6.2.134)$$

Secular terms will be eliminated if $Q = 0$. Then the solution for v_1 is

$$v_1 = 2AB\tau \frac{1 - i\omega_0 \tau}{1 - 2i\omega_0 \tau} e^{[i\omega_0 - (1/\tau)]T_0} + \frac{3i}{4\omega_0} \frac{A^3 e^{3i\omega_0 T_0}}{1 + 2i\omega_0 \tau} + CC \quad (6.2.135)$$

To solve the equation $Q = 0$, we let $A = (1/2)ae^{i\phi}$ with real a and ϕ , separate real and imaginary parts in (6.2.134), and obtain

$$\frac{da}{dT_1} = a \left(1 - \frac{1}{4}\alpha_r a^2 \right) \quad (6.2.136)$$

$$\frac{d\phi}{dT_1} = -\frac{1}{4}\alpha_i a^2 \quad (6.2.137)$$

where

$$\alpha_r = \frac{3 + 8\omega_0^2 \tau^2}{1 + 4\omega_0^2 \tau^2}, \quad \alpha_i = -\frac{2\omega_0 \tau}{1 + 4\omega_0^2 \tau^2} \quad (6.2.138)$$

The solutions of (6.2.136) and (6.2.137) are

$$a^2 = \frac{4}{\alpha_r + \left(\frac{4}{a_0^2} - \alpha_r \right) e^{-2\mu t}} \quad (6.2.139)$$

$$\phi = \frac{\tau\omega_0}{3 + 8\omega_0^2 \tau^2} \ln \left[\frac{4}{a_0^2} + \alpha_r (e^{2\mu t} - 1) \right] + \phi_0 \quad (6.2.140)$$

where a_0 is the initial amplitude and ϕ_0 is a constant.

To determine B , we substitute for v_0 , Z_0 , and v_1 into (6.2.129); that is

$$\tau D_0 Z_1 + Z_1 = \left[-\tau D_1 B + 8\tau \frac{1 + 2\omega_0^2 \tau^2}{1 + 4\omega_0^2 \tau^2} AAB \right] e^{-T_0/\tau} + NST \quad (6.2.141)$$

In order that Z_1/Z_0 be bounded for all T_0 , the coefficient of $\exp(-T_0/\tau)$ must vanish; hence

$$D_1 B = 2 \frac{1 + 2\omega_0^2 \tau^2}{1 + 4\omega_0^2 \tau^2} a^2 B \quad (6.2.142)$$

where we made use of $A = (1/2)a \exp i\phi$. Substituting for a^2 from (6.2.139) into (6.2.142) and solving the resulting equation, we obtain

$$B = b \left[\frac{4}{a_0^2} + \alpha_r (e^{2\mu t} - 1) \right]^\zeta \quad (6.2.143)$$

where

$$\zeta = \frac{4(1 + 2\omega_0^2 \tau^2)}{3 + 8\omega_0^2 \tau^2}$$

Therefore, to first approximation

$$v = a \cos(\omega_0 t + \phi) + O(\mu) \quad (6.2.144)$$

$$Z = B e^{-t/\tau} + \frac{a^2}{2\sqrt{1 + 4\omega_0^2 \tau^2}} \cos[2\omega_0 t + 2\phi - \tan^{-1} 2\omega_0 \tau] + \frac{1}{2}a^2 + O(\mu) \quad (6.2.145)$$

with a , ϕ , and B given, respectively, by (6.2.139), (6.2.140), and (6.2.143).

6.2.6. The Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies

The next two examples are fourth-order problems—one is linear and the second is nonlinear. Consider first the stability of the triangular points in the restricted problem of three bodies treated in Sections 3.1.4 and 3.1.5 using the Lindstedt-Poincaré and Whittaker techniques. This problem was

treated first using the method of multiple scales by Alfried and Rand (1969). The problem reduces mathematically to the stability of solutions of (3.1.63) through (3.1.65). In this section we use the method of multiple scales to determine the transition curves intersecting the μ axis at $\mu_0 = (1 - 2\sqrt{2}/3)/2$ and determine the behavior of x and y near these transition curves.

We set $\cos f = \cos T_0$ and assume that

$$x = x_0(T_0, T_1) + e x_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (6.2.146)$$

$$y = y_0(T_0, T_1) + e y_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (6.2.147)$$

$$\mu = \mu_0 + e \mu_1 + \cdots \quad (6.2.148)$$

where

$$T_0 = f \quad \text{and} \quad T_1 = e f \quad (6.2.149)$$

Hence

$$\frac{d}{df} = D_0 + e D_1 + \cdots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (6.2.150)$$

Substituting (6.2.146) through (6.2.150) into (3.1.63) through (3.1.65) and equating coefficients of e^0 and e to zero, we obtain

Order e^0

$$D_0^2 x_0 - 2D_0 y_0 - b_0 x_0 = 0 \quad (6.2.151)$$

$$D_0^2 y_0 + 2D_0 x_0 - a_0 y_0 = 0 \quad (6.2.152)$$

Order ϵ

$$D_0^2 x_1 - 2D_0 y_1 - b_0 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + 2D_1 y_0 + b_1 x_0 - b_0 x_0 \cos T_0 \quad (6.2.153)$$

$$D_0^2 y_1 + 2D_0 x_1 - a_0 y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2D_1 x_0 - b_1 y_0 - a_0 y_0 \cos T_0 \quad (6.2.154)$$

where a_i and b_i are given by (3.1.71) and (3.1.72).

The solution of (6.2.151) and (6.2.152) is

$$x_0 = A(T_1) \cos \frac{1}{2} T_0 + B(T_1) \sin \frac{1}{2} T_0 \quad (6.2.155)$$

$$y_0 = \alpha B(T_1) \cos \frac{1}{2} T_0 - \alpha A(T_1) \sin \frac{1}{2} T_0 \quad (6.2.156)$$

where

$$\alpha = \left(a_0 + \frac{1}{4} \right)^{-1} = b_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{33}) \quad (6.2.157)$$

The zeroth-order solution determines the right-hand sides of (6.2.153) and (6.2.154). Thus they become

$$D_0^2 x_1 - 2D_0 y_1 - b_0 x_1 = P_1 \cos \frac{1}{2} T_0 + Q_1 \sin \frac{1}{2} T_0 + \text{NST} \quad (6.2.158)$$

$$D_0^2 y_1 + 2D_0 x_1 - a_0 y_1 = P_2 \cos \frac{1}{2} T_0 + Q_2 \sin \frac{1}{2} T_0 + \text{NST} \quad (6.2.159)$$

where

$$P_1 = (2\alpha - 1)B' + \left(b_1 - \frac{1}{2}b_0 \right) A \quad (6.2.160)$$

$$P_2 = (\alpha - 2)A' - \alpha \left(b_1 + \frac{1}{2}a_0 \right) B \quad (6.2.161)$$

$$Q_1 = -(2\alpha - 1)A' + \left(b_1 + \frac{1}{2}b_0 \right) B \quad (6.2.162)$$

$$Q_2 = (\alpha - 2)B' + \alpha \left(b_1 - \frac{1}{2}a_0 \right) A \quad (6.2.163)$$

To determine a first approximation, we need not solve for x_1 and y_1 but only insure that x_1/x_0 and y_1/y_0 are bounded for all T_0 . This is the reason why we spelled out the terms that produce secular terms. To eliminate the secular terms, we can find the particular secular solution and then determine the condition for its vanishing. The resulting particular solution is of the form

$$x = 0, \quad y = R_1 \cos \frac{1}{2} T_0 + S_1 \sin \frac{1}{2} T_0 \quad (6.2.164)$$

or

$$y = 0, \quad x = R_2 \cos \frac{1}{2} T_0 + S_2 \sin \frac{1}{2} T_0 \quad (6.2.165)$$

Thus we can determine the conditions for the elimination of the secular terms by assuming a particular solution of the form (6.2.164) or (6.2.165). The results of using either form are

the same. Substituting (6.2.164) into (6.2.158) and (6.2.159) and equating the coefficients of $\cos(T_0/2)$ and $\sin(T_0/2)$ on both sides, we obtain

$$\begin{aligned} R_1 &= Q_1, & S_1 &= -P_1 \\ R_1 &= -\alpha P_2, & S_1 &= -\alpha Q_2 \end{aligned} \quad (6.2.167)$$

Elimination of R_1 and S_1 from (6.2.166) and (6.2.167) leads to the required conditions; that is

$$P_1 = \alpha Q_2, \quad Q_1 = -\alpha P_2 \quad (6.2.168)$$

Substituting for P_1, P_2, Q_1 , and Q_2 from (6.2.160) through (6.2.163) into (6.2.168) leads to the following two equations for A and B

$$(1 - 4\alpha + \alpha^2) A' + \left[(1 - \alpha^2) b_1 + \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] B = 0 \quad (6.2.169)$$

$$(1 - 4\alpha + \alpha^2) B' - \left[(1 - \alpha^2) b_1 - \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] A = 0 \quad (6.2.170)$$

To solve these equations, we let

$$A = a \exp \gamma_1 T_1 \quad B = b \exp \gamma_1 T_1 \quad (6.2.171)$$

and obtain

$$\begin{aligned} (1 - 4\alpha + \alpha^2) \gamma_1 a + \left[(1 - \alpha^2) b_1 + \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] b &= 0 \\ - \left[(1 - \alpha^2) b_1 - \frac{1}{2} (b_0 - \alpha^2 a_0) \right] a + (1 - 4\alpha + \alpha^2) b \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.173)$$

These equations are the same as (3.1.105) and (3.1.106) obtained using Whittaker's method. Hence γ_1 and b/a are given by (3.1.107) and (3.1.108), while x and y are given by (3.1.109). This expansion was continued to second order by Alfrend and Rand (1969).

6.2.7. A Swinging Spring

We consider next the nonlinear swinging spring discussed in Sections 5.5.3 and 5.7.5 and described by the Lagrangian (5.5.54). The equations of motion corresponding to (5.5.54) are

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m} x + g(1 - \cos \theta) - (l + x)\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l+x} \sin \theta + \frac{2}{l+x} \dot{x}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.175)$$

We seek an asymptotic solution of these equations for small but finite x and θ of the form

$$x(t) = \epsilon x_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1) + \cdots \quad (6.2.176)$$

$$\theta(t) = \epsilon \theta_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 \theta_2(T_0, T_1) + \cdots \quad (6.2.177)$$

where $T_n = \epsilon^n t$ and ϵ is of the order of the amplitudes of oscillation.

Substituting (6.2.176) and (6.2.177) into (6.2.174) and (6.2.175) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

Order ϵ

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 &= 0, & \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ D_0^2 \theta_1 + \omega_2^2 \theta_1 &= 0, & \omega_2^2 &= \frac{g}{l} \end{aligned} \quad (6.2.179)$$

Order ϵ^2

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - \frac{1}{2} g \theta_1^2 + l (D_0 \theta_1)^2 \quad (6.2.180)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -2D_0 D_1 \theta_1 + \frac{\omega_2^2}{l} x_1 \theta_1 - \frac{2}{l} (D_0 x_1) (D_0 \theta_1) \quad (6.2.181)$$

The solution of the first-order equations is

$$x_1 = A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} \quad (6.2.182)$$

$$\theta_1 = B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_2 T_0} \quad (6.2.183)$$

Then (6.2.180) and (6.2.181) become

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 &= -2i\omega_1 D_1 A e^{i\omega_1 T_0} - \frac{3}{2} g B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + \frac{1}{2} g B \bar{B} + CC \\ D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 &= -2i\omega_2 D_1 B e^{i\omega_2 T_0} + \frac{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)}{l} A B e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} \\ &\quad + \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \bar{B} e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + CC \end{aligned} \quad (6.2.185)$$

If A and B are constants, the particular solutions of (6.2.184) and (6.2.185) are

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega_1^2} B \bar{B} - \frac{3}{2} \frac{g}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + CC \quad (6.2.186)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= -\frac{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)}{l\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} A B e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} \\ &\quad - \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l\omega_1(\omega_1 - 2\omega_2)} A \bar{B} e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + CC \end{aligned} \quad (6.2.187)$$

which tend to ∞ as $\omega_1 \rightarrow 2\omega_2$. Consequently, the expansions (6.2.176) and (6.2.177) break down when $\omega_1 \approx 2\omega_2$.

To obtain an expansion valid when $\omega_1 \approx 2\omega_2$, we let

$$\omega_1 - 2\omega_2 = \epsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (6.2.188)$$

and let A and B be functions of T_1 rather than being constants. Moreover, using (6.2.188) we express $\exp(2i\omega_2 T_0)$ and $\exp[i(\omega_1 - \omega_2) T_0]$ in (6.2.184) and (6.2.185) as

$$\begin{aligned} \exp(2i\omega_2 T_0) &= \exp(i\omega_1 T_0 - i\sigma T_1) \\ \exp[i(\omega_1 - \omega_2) T_0] &= \exp(i\omega_2 T_0 + i\sigma T_1) \end{aligned}$$

to obtain

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -\left(2i\omega_1 D_1 A + \frac{3}{2} g B^2 e^{-i\sigma T_1}\right) e^{i\omega_1 T_0} + CC + \text{NST} \quad (6.2.189)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -\left[2i\omega_2 D_1 B - \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \tilde{B} e^{i\sigma T_1}\right] e^{i\omega_2 T_0} + CC + \text{NST} \quad (6.2.190)$$

Eliminating secular terms, we have

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A &= -\frac{3}{2} g B^2 \exp(-i\sigma T_1) \\ 2i\omega_2 D_1 B &= \frac{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}{l} A \tilde{B} \exp(i\sigma T_1) \end{aligned} \quad (6.2.191)$$

Letting $A = -(1/2)ia_1 \exp(i\omega_1\beta_1)$ and $B = -(1/2)ia_2 \exp(i\omega_2\beta_2)$, with real a_i and β_i , and separating real and imaginary parts, we obtain

$$\dot{a}_1 = \frac{3\epsilon g}{8\omega_1} a_2^2 \cos \gamma \quad (6.2.192)$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{3\epsilon\omega_2}{4l} a_1 a_2 \cos \gamma \quad (6.2.193)$$

$$a_1 \dot{\beta}_1 = -\frac{3\epsilon g}{8\omega_1^2} a_2^2 \sin \gamma \quad (6.2.194)$$

$$\dot{\beta}_2 = -\frac{3\epsilon}{4l} a_1 \sin \gamma \quad (6.2.195)$$

where

$$\gamma = \omega_1\beta_1 - 2\omega_2\beta_2 + (\omega_1 - 2\omega_2)t \quad (6.2.196)$$

If we let $a_1^2 = \omega_1\alpha_1^*/\omega_2k$ and $a_2^2 = 2\alpha_2/mgl$, (6.2.192) through (6.2.196) go over into (5.5.76) through (5.5.80) which were obtained using the method of averaging in conjunction with canonical variables.

6.2.8. A Model for Weak Nonlinear Instability

We next consider the model problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u &= u^3 \\ u(x, 0) &= \epsilon \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.197)$$

for weak nonlinear instability of standing waves, which was discussed in Sections 2.1.2, 3.4.2, and 3.5.1. Away from $k = 1$, a uniformly valid solution for standing waves is (Section 3.4.2)

$$u = \epsilon \cos \sigma t \cos kx + O(\epsilon^3) \quad (6.2.198)$$

where

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1} \left[1 - \frac{9\epsilon^2}{32(k^2 - 1)} \right] + \dots$$

It is clear that this expansion breaks down when $k - 1 = O(\epsilon^2)$. To determine an expansion valid near $k = 1$, we introduce the new variable $\xi = kx$ in (6.2.197) to obtain

$$\begin{aligned} u_{tt} - k^2 u_{\xi\xi} - u &= u^3 \\ u(\xi, 0) &= \epsilon \cos \xi, \quad u_t(\xi, 0) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.199)$$

Moreover, we let

$$k = 1 + \epsilon^2 k_2 \text{ with } k_2 = O(1) \quad (6.2.200)$$

and assume that

$$u(\xi, t; \epsilon) = u(\xi, T_0, T_1, T_2; \epsilon) = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots \quad (6.2.201)$$

where $T_n = \epsilon^n t$.

Substituting (6.2.200) and (6.2.201) into (6.2.199) and equating coefficients of equal powers of ϵ , we obtain

Order ϵ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - u_1 &= 0 \\ u_1 = \cos \xi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial T_0} &= 0 \quad \text{at} \quad T_n = 0 \end{aligned} \quad (6.2.202)$$

Order ϵ^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 &= -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \\ u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial T_0} &= -\frac{\partial u_1}{\partial T_1} \quad \text{at} \quad T_n = 0 \end{aligned} \quad (6.2.203)$$

Order ϵ^3

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - u_3 &= u_1^3 + 2k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} \\ u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial T_0} &= -\frac{\partial u_1}{\partial T_2} - \frac{\partial u_2}{\partial T_1} \quad \text{at} \quad T_n = 0 \end{aligned} \quad (6.2.204)$$

The solution of the first-order problem is

$$u_1 = a(T_1, T_2) \cos \xi, \quad a(0, 0) = 1 \quad (6.2.205)$$

Then (6.2.203) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 &= 0 \\ u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial T_0} &= -\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}\right) \cos \xi \quad \text{at} \quad T_n = 0 \end{aligned} \quad (6.2.206)$$

The solution of (6.2.206) will contain a term proportional to T_0 making u_2/u_1 unbounded as $T_0 \rightarrow \infty$ unless $\partial a / \partial T_1 = 0$ at $T_1 = T_2 = 0$. Then

$$u_2 = b(T_1, T_2) \cos \xi, \quad b(0, 0) = 0 \quad (6.2.207)$$

With the first- and second-order solutions known, the equation for u_3 becomes

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - u_3 = \left(\frac{3}{4}a^3 - 2k_2 a - \frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2}\right) \cos \xi + \frac{1}{4}a^3 \cos 3\xi \quad (6.2.208)$$

Secular terms will be eliminated if

$$\frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2} + \left(2k_2 - \frac{3}{4}a^2\right) a = 0 \quad (6.2.209)$$

The initial conditions for a were obtained above as

$$a = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \quad \text{at} \quad T_n = 0 \quad (6.2.210)$$

To determine $b(T_1, T_2)$ and the dependence of a on T_2 , we need to carry out the expansion to higher order. If we limit the analysis to $O(\epsilon^3)$, we can regard a as a function of T_1 within an error of $O(\epsilon^2 t)$.

A first integral for (6.2.209) and (6.2.210) is

$$\left(\frac{\partial a}{\partial T_1} \right)^2 = \frac{3}{8} (a^2 - 1) (a^2 - \beta), \quad \beta = \frac{16k_2}{3} - 1 \quad (6.2.211)$$

Since $a(T_1)$ is real, the right-hand side of (6.2.211) must be positive, hence a^2 must be outside the interval whose ends are 1 and β . Since $a(0) = 1$, a^2 increases without bound if $\beta < 1$ and oscillates between 0 and 1 if $\beta > 1$. Therefore $\beta = 1$ or $k_2 = 3/8$ separates the stable from the unstable regions. Hence the condition of neutral stability is

$$k = 1 + \frac{3}{8}\epsilon^2 \quad (6.2.212)$$

in agreement with (3.5.6). The solution for a is a Jacobian elliptic function.

6.2.9. A Model for Wave-wave Interaction

We again consider Bretherton's (1964) model equation

$$\phi_{tt} + \phi_{xxxxx} + \phi_{xx} + \phi = \epsilon \phi^3 \quad (6.2.213)$$

which was treated in Sections 5.8.1 and 5.8.2 using the variational approach. The linear problem admits the uniform traveling wave solution

$$\phi = a \cos(kx - \omega t + \beta) \quad (6.2.214)$$

where a, k, ω , and β are constants and ω and k satisfy the dispersion relationship

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 \quad (6.2.215)$$

Harmonic resonance may occur whenever (ω, k) and $(n\omega, nk)$ for some integer $n \geq 2$ satisfy (6.2.215). This occurs at all $k^2 = 1/n$ for $n \geq 2$. At these wave numbers the fundamental and its n th harmonic have the same phase speed.

Since the nonlinearity is cubic in our equation, the fundamental corresponding to $k^2 = 1/3$ interacts to $O(\epsilon)$ only with its third harmonic ($k^2 = 3$). If the nonlinearity is $\epsilon \phi^m$ for some integer m , then the fundamental ($k^2 = 1/m$) interacts to $O(\epsilon)$ with its m th harmonic ($k^2 = m$). If we consider interactions to orders higher than ϵ , harmonic resonances other than the third can occur even for a cubic nonlinearity.

To determine a first-order expansion valid near $k^2 = 1/3$, we let

$$\phi = \phi_0(T_0, T_1, X_0, X_1) + \epsilon \phi_1(T_0, T_1, X_0, X_1) + \cdots \quad (6.2.216)$$

where

$$T_n = \epsilon^n t, \quad X_n = \epsilon^n x$$

Substituting this expansion into (6.2.213) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$L(\phi_0) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial X_0^4} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial X_0^2} + \phi_0 = 0 \quad (6.2.217)$$

$$L(\phi_1) = \phi_0^3 - 2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial X_0^3 \partial X_1} - 2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial X_0 \partial X_1} \quad (6.2.218)$$

The solution of (6.2.217) is taken to be

$$\phi_0 = A_1(T_1, X_1) e^{i\theta_1} + A_3(T_1, X_1) e^{i\theta_3} + CC \quad (6.2.219)$$

where

$$\begin{aligned} \theta_n &= k_n X_0 - \omega_n T_0 \\ \omega_n^2 &= k_n^4 - k_n^2 + 1 \\ \omega_3 &\approx 3\omega_1, \quad k_3 \approx 3k_1 \end{aligned} \quad (6.2.220)$$

Note that ϕ_0 is assumed to contain the two interacting harmonics. Had we assumed it to contain $\exp(i\theta_1)$, we would have found it to be invalid (see Sections 5.8.2 and 6.4.8).

Substituting for ϕ_0 into (6.2.218), we obtain

$$\begin{aligned} L(\phi_1) &= \sum_{n=1,3} 2i\omega_n \left(\frac{\partial A_n}{\partial T_1} + \omega_n' \frac{\partial A_n}{\partial X_1} \right) e^{i\theta_n} + 3(A_1 \bar{A}_1 + 2A_3 \bar{A}_3) A_1 e^{i\theta_1} \\ &\quad + 3(2A_1 \bar{A}_1 + A_3 \bar{A}_3) A_3 e^{i\theta_3} + A_1^3 e^{3i\theta_1} + A_3^3 e^{3i\theta_3} \\ &\quad + 3A_1^2 A_3 e^{i(\theta_3+2\theta_1)} + 3\bar{A}_1^2 A_3 e^{i(\theta_3-2\theta_1)} \\ &\quad + 3A_1 A_3^2 e^{i(2\theta_3+\theta_1)} + 3\bar{A}_1 A_3^2 e^{i(2\theta_3-\theta_1)} + CC \end{aligned} \quad (6.2.221)$$

where $\omega_n = d\omega_n/dk$: group velocity.

Because of the interaction between the two modes, terms that produce secular terms other than the usual $\exp(i\theta_n)$ occur in (6.2.221). To recognize these terms we consider the perfect resonance case in which $\theta_3 = 3\theta_1$ so that $\exp(i\theta_1)$ and $\exp(3i\theta_1)$ produce secular terms. We immediately see that $\exp(3i\theta_1)$ and $\exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)]$ produce secular terms. For the near-resonance case, we indicate their secular behavior by expressing them in terms of $\exp(i\theta_1)$ and $\exp(i\theta_3)$. To do this we observe that

$$\theta_3 - 3\theta_1 \equiv \Gamma = (k_3 - 3k_1) X_0 - (\omega_3 - 3\omega_1) T_0$$

Although X_0 and T_0 are $O(1)$, Γ becomes slowly varying as $k_3 \rightarrow 3k_1$ and $\omega_3 \rightarrow 3\omega_1$, hence we express this slow variation by rewriting Γ as

$$\Gamma = \frac{k_3 - 3k_1}{\epsilon} X_1 - \frac{\omega_3 - 3\omega_1}{\epsilon} T_1 \quad (6.2.222)$$

With this function we express $\exp(3i\theta_1)$ and $\exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)]$ as

$$\exp(3i\theta_1) = \exp[i(\theta_3 - \Gamma)], \quad \exp[i(\theta_3 - 2\theta_1)] = \exp[i(\theta_1 + \Gamma)].$$

Eliminating the terms that produce secular terms on the right-hand side of (6.2.221), we have

$$2i\omega_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) = -3 (A_1 \bar{A}_1 + 2A_3 \bar{A}_3) A_1 - 3\bar{A}_1^2 A_3 e^{i\Gamma} \quad (6.2.223)$$

$$2i\omega_3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial A_3}{\partial X_1} \right) = -3 (2A_1 \bar{A}_1 + A_3 \bar{A}_3) A_3 - A_1^3 e^{-i\Gamma} \quad (6.2.224)$$

Letting $A_n = (1/2)a_n \exp(i\beta_n)$ with real a_n and β_n in (6.2.223) and (6.2.224) and separating real and imaginary parts, we have

$$\frac{\partial a_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial a_1}{\partial X_1} = -\frac{3}{8\omega_1} a_1^2 a_3 \sin \delta \quad (6.2.225)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} + \omega_1' \frac{\partial \beta_1}{\partial X_1} = \frac{3}{8\omega_1} (a_1^2 + 2a_3^2 + a_1 a_3 \cos \delta) \quad (6.2.226)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial a_3}{\partial X_1} = \frac{1}{8\omega_3} a_1^3 \sin \delta \quad (6.2.227)$$

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial T_1} + \omega_3' \frac{\partial \beta_3}{\partial X_1} = \frac{1}{8\omega_3} (6a_1^2 + 3a_3^2 + a_1^3 a_3^{-1} \cos \delta) \quad (6.2.228)$$

where

$$\delta = \Gamma + \beta_3 - 3\beta_1 \quad (6.2.229)$$

Equations (6.2.225) through (6.2.228) are in full agreement with (5.8.24) through (5.8.27) obtained using the variational approach.

6.2.10. Limitations of the Derivativeexpansion Method

This method applies to wave-type problems only. It does not apply to unstable cases except when the instability is weak, such as the nonlinear stability problem discussed in Section 6.2.8. For $k > 1$, u is bounded and the expansion (6.2.198) is valid for times as large as ϵ^{-2} if k is away from 1. This expansion is valid only for small times for $k < 1$ and away from 1. Near $k = 1$, the instability is weak and a valid solution is given by (6.2.211) for times as large as ϵ^{-1} .

In the case of hyperbolic equations, this method applies to dispersive waves only when the initial conditions can be represented by the superposition of a finite number of sinusoidal functions. For a linearly nondispersive wave problem such as

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \epsilon u^2 \quad (6.2.230)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (6.2.231)$$

this method does not provide a solution even if $f(x)$ is a sinusoidal function such as $\cos x$. To see this we let

$$u = u_0(x, T_0, T_1) + \epsilon u_1(x, T_0, T_1) + \cdots \quad (6.2.232)$$

where

$$T_0 = t, \quad T_1 = \epsilon t$$

Substituting (6.2.232) into (6.2.230) and (6.2.231) and equating like powers of ϵ , we obtain

Order ϵ^0

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (6.2.233)$$

$$u_0(x, 0, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u_0}{\partial T_0}(x, 0, 0) = 0 \quad (6.2.234)$$

Order ϵ

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0^2 \quad (6.2.235)$$

$$u(x, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial T_0}(x, 0, 0) = -\frac{\partial u_0}{\partial T_1}(x, 0, 0) \quad (6.2.236)$$

The solution of (6.2.233) and (6.2.234) is

$$u_0 = A(T_1) e^{i(x-T_0)} + \bar{A}(T_1) e^{-i(x-T_0)} \quad (6.2.237)$$

where

$$A(0) = \frac{1}{2}$$

Substituting this zeroth-order solution into (6.2.235) gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = & 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i(x-T_0)} - 2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-i(x-T_0)} \\ & + 2A\bar{A} + A^2 e^{2i(x-T_0)} + \bar{A}^2 e^{-2i(x-T_0)} \end{aligned} \quad (6.2.238)$$

The right-hand side of this equation contains terms that produce secular terms. They are the terms proportional to $\exp[\pm 2i(x - T_0)]$ in addition to $\exp[\pm i(x - T_0)]$. In order that u_1/u_0 be bounded for all T_0 , all these terms must be eliminated. However, there is no way in which this can be done. In the previous examples such terms were proportional to $\exp[\pm i(x - T_0)]$, hence A was chosen to eliminate them. In this case, if a nontrivial solution is desired, A can be chosen in such a way as to eliminate the terms proportional to $\exp[\pm i(x - T_0)]$. The resulting expansion contains secular terms, hence it is not valid for large times.

Expansions valid for large times and general initial conditions for nondispersive waves were obtained in Sections 3.2.4 and 3.2.5 using the method of strained coordinates.

9.6.4 6.3. The Two-variable Expansion Procedure

6.3.1. The Duffing Equation

Let us consider again the equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \epsilon u^3 = 0 \quad (6.3.1)$$

We assume that

$$u = u_0(\xi, \eta) + \epsilon u_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.3.2)$$

where

$$\xi = \epsilon t, \quad \eta = (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3 + \dots) t \quad (6.3.3)$$

Substituting (6.3.2) and (6.3.3) into (6.3.1) and equating like powers of ϵ , we obtain

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (6.3.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} - u_0^3 \quad (6.3.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_2 = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} - 3u_0^2 u_1 \quad (6.3.6)$$

The general solution of (6.3.4) is

$$u_0 = A_0(\xi) \cos \omega_0 \eta + B_0(\xi) \sin \omega_0 \eta \quad (6.3.7)$$

Then (6.3.5) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_1 = & - \left[2\omega_0 B'_0 + \frac{3}{4} (A_0^3 + A_0 B_0^2) \right] \cos \omega_0 \eta \\ & + \left[2\omega_0 A'_0 - \frac{3}{4} (B_0^3 + A_0^2 B_0) \right] \sin \omega_0 \eta \\ & - \frac{1}{4} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \cos 3\omega_0 \eta + \frac{1}{4} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \sin 3\omega_0 \eta \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Secular terms will be eliminated if

$$2\omega_0 \mathbf{B}'_0 + \frac{3}{4} (\mathbf{A}_0^3 + \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^2) = 0 \quad (6.3.9)$$

$$2\omega_0 A'_0 - \frac{3}{4} (\mathbf{B}_0^3 + \mathbf{A}_0^2 \mathbf{B}_0) = 0 \quad (6.3.10)$$

Adding B_0 times (6.3.9) to A_0 times (6.3.10) gives

$$\frac{d}{d\xi} (A_0^2 + B_0^2) = 0 \text{ or } A_0^2 + B_0^2 = a^2 = \text{a constant} \quad (6.3.11)$$

Using (6.3.11), we can express (6.3.9) and (6.3.10) in the form where

$$B'_0 + \omega_1 A_0 = 0, \quad A'_0 - \omega_1 B_0 = 0 \quad (6.3.12)$$

Hence

$$\omega_1 = \frac{3}{8\omega_0} a^2$$

$$A_0 = a \cos(\omega_1 \xi + \phi), \quad B_0 = -a \sin(\omega_1 \xi + \phi) \quad (6.3.13)$$

where ϕ is a constant. With the secular terms eliminated, the solution of u_1 becomes

$$\begin{aligned} u_1 = & \tilde{A}_1(\xi) \cos \omega_0 \eta + \tilde{B}_1(\xi) \sin \omega_0 \eta + \frac{1}{32\omega_0^2} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \cos 3\omega_0 \eta \\ & - \frac{1}{32\omega_0^2} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \sin 3\omega_0 \eta \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Substituting for A_0 and B_0 into u_0 and u_1 , we get

$$u_0 = a \cos \theta \quad (6.3.15)$$

$$u_1 = A_1(\xi) \cos \theta + B_1(\xi) \sin \theta + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\theta \quad (6.3.16)$$

where

$$\theta = \omega_0 \eta + \omega_1 \xi + \phi \quad (6.3.17)$$

Replacing u_0 and u_1 in (6.3.6) by their expressions from (6.3.15) through (6.3.17), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 u_2 = & - \left(2\omega_0 B_1' + \frac{9}{4} a^2 A_1 - 2\omega_0 \omega_1 A_1 - a\omega_1^2 - 2a\omega_2 \omega_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{128\omega_0^2} a^5 \right) \cos \theta - \left(-2\omega_0 A_1' - 2\omega_0 \omega_1 B_1 + \frac{3}{4} a^2 B_1 \right) \sin \theta + \text{NST} \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Secular terms are eliminated if $A_1 = B_1 = 0$ and

$$2\omega_0^2 \omega_2 = -\omega_1^2 + \frac{3}{128\omega_0^2} a^4$$

or

$$\omega_2 = -\frac{15}{256\omega_0^4} a^4 \quad (6.3.19)$$

Therefore, to second approximation

$$u = a \cos(\omega t + \phi) + \frac{\epsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega t + \phi) + O(\epsilon^2) \quad (6.3.20)$$

where

$$\omega = \frac{d}{dt} (\omega_0 \eta + \omega_1 \xi) = \frac{d}{dt} [(\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_0 \omega_2 + \dots) t]$$

or

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\epsilon}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\epsilon^2}{256\omega_0^3} a^4 + O(\epsilon^3) \quad (6.3.21)$$

This expansion is in full agreement with those obtained in Section 3.1.1 by using the Lindstedt-Poincaré methods, in Section 5.4.1 by using methods of averaging, and in Section 6.2.1 by using the derivative-expansion method.

6.3.2. The Van Der Pol Oscillator

The second example we consider is the van der Pol oscillator

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (6.3.22)$$

discussed in Sections 5.4.2, 5.7.4, and 6.2.2. We assume that u possesses the following uniformly valid expansion (Cole and Kevorkian, 1963 ; Kevorkian, 1966a)

$$u = u_0(\xi, \eta) + \epsilon u_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots \quad (6.3.23)$$

where ξ and η are defined in (6.3.3). Substituting (6.3.3) and (6.3.23) into (6.3.22), and equating like powers of ϵ , we obtain

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + u_0 = 0 \quad (6.3.24)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \quad (6.3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + u_2 = & -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \\ & + (1 - u_0^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) - 2u_0 u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

The general solution of (6.3.24) is

$$u_0 = A_0(\xi) \cos \eta + B_0(\xi) \sin \eta \quad (6.3.27)$$

Hence (6.3.25) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = & \left[-2B'_0 + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) B_0 \right] \cos \eta \\ & + \left[2A'_0 - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) A_0 \right] \sin \eta \\ & + \frac{1}{4} (A_0^3 - 3A_0 B_0^2) \sin 3\eta + \frac{1}{4} (B_0^3 - 3A_0^2 B_0) \cos 3\eta \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Elimination of secular terms necessitates satisfying the following conditions

$$-2B'_0 + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) B_0 = 0 \quad (6.3.29)$$

$$2A'_0 - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4} \right) A_0 = 0 \quad (6.3.30)$$

Subtracting B_0 times (6.3.29) from A_0 times (6.3.30) gives

$$\rho' - \rho \left(1 - \frac{1}{4} \rho \right) = 0 \quad (6.3.31)$$

where ρ is the square of the amplitude of the zeroth-order solution; that is

$$\rho = a^2 = A_0^2 + B_0^2 \quad (6.3.32)$$

By separation of variables we integrate (6.3.31) to obtain

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\xi}} \quad (6.3.33)$$

where a_0 is the initial amplitude. Expressing A_0 and B_0 in terms of the phase ϕ and the amplitude a , we obtain

$$A_0 = a \cos \phi, \quad B_0 = -a \sin \phi \quad (6.3.34)$$

Substituting into either (6.3.29) or (6.3.30) and using (6.3.31), we find that

$$\phi' = 0 \text{ or } \phi = \phi_0 = \text{a constant} \quad (6.3.35)$$

Hence u_0 can be expressed as

$$u_0 = a \cos(\eta + \phi_0) \quad (6.3.36)$$

With (6.3.29) and (6.3.30) satisfied, the solution of (6.3.28) is

$$u_1 = A_1(\xi) \cos(\eta + \phi_0) + B_1(\xi) \sin(\eta + \phi_0) - \frac{a^3}{32} \sin 3(\eta + \phi_0) \quad (6.3.37)$$

Substituting for u_0 and u_1 into (6.3.26) gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + u_2 = & \left[-2B_1' + \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) B_1 - a'' + 2\omega_2 a + \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) a' + \frac{a^5}{128} \right] \\ & \times \cos(\eta + \phi_0) + \left[2A_1' - \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) A_1 \right] \sin(\eta + \phi_0) + \text{NST} \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

To eliminate secular terms we require that

$$2B_1' - \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) B_1 = 2\omega_2 a - a'' + \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) a' + \frac{a^5}{128} \quad (6.3.39)$$

$$2A_1' - \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) A_1 = 0 \quad (6.3.40)$$

Using (6.3.31) and (6.3.32), we express the above two equations as

$$2B_1' - \frac{2a'}{a} B_1 = 2a \left(\omega_2 + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{7}{16}a^2 - \frac{1}{4} \right) a' \quad (6.3.41)$$

$$A_1' - \left(\frac{3a'}{a} - 1 \right) A_1 = 0 \quad (6.3.42)$$

The solutions of these equations are

$$B_1 = a \left(\omega_2 + \frac{1}{16} \right) \xi - b_1 a + \frac{1}{8} a \ln a - \frac{7}{64} a^3 \quad (6.3.43)$$

$$A_1 = a_1 a^3 e^{-\xi} \quad (6.3.44)$$

where a_1 and b_1 are constants. Since as $t \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty$ and $a \rightarrow 2$, u_1/u_0 is unbounded as $\xi \rightarrow \infty$ unless

$$\omega_2 = -\frac{1}{16} \quad (6.3.45)$$

Therefore, to second approximation

$$\begin{aligned} u = & \left(a + \epsilon a^3 a_1 e^{-\epsilon t} \right) \cos \left[\left(1 - \frac{1}{16} \epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \\ & - \epsilon \left\{ \left(\frac{7}{64} a^3 - \frac{1}{8} a \ln a + b_1 a \right) \sin \left[\left(1 - \frac{1}{16} \epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \right. \\ & \left. + \frac{a^3}{32} \sin 3 \left[\left(1 - \frac{1}{16} \epsilon^2 \right) t + \phi_0 \right] \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

where

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{\tilde{a}_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \quad (6.3.47)$$

This expansion is in full agreement with (6.2.38) obtained using the derivative-expansion method if we identify a_0 with $\tilde{a}_0 + \epsilon \tilde{a}_0^3 a_1$.

6.3.3. The Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies

Let us consider again the parametric resonance problem treated in Section 6.2.6 using the derivative-expansion method. The problem is described mathematically by (3.1.63) through (3.1.65). To determine a uniformly valid expansion near the transition curves using the two-variable expansion procedure, we need to use different time scales from those given by (6.3.3). The appropriate time scales are

$$\xi = (e + \omega_2 e^2 + \cdots) t, \quad \eta = t \quad (6.3.48)$$

We assume that x and y possess expansions of the form

$$x = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.3.49)$$

$$y = y_0(\xi, \eta) + \epsilon y_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 y_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.3.50)$$

The algebraic details of the solution are not presented here. The details for the first-order solution are the same as in Section 6.2.6, with $\xi = T_1$ and $\eta = T_0$. The reader is referred to Alfried and Rand (1969) for details of the second-order solution. Their results are in full agreement with those obtained in Section 3.1.5 using Whittaker's method.

6.3.4. Limitations of This Technique

The above examples demonstrate that by choosing the two variables appropriately the results of the two-variable expansion procedure agree with those of the derivative-expansion method. In some cases more than two variables are needed to obtain uniformly valid expansions such as in the case

of satellite motion around the smaller primary in the restricted problem of three bodies (Eckstein, Shi, and Kevorkian, 1966a) and the motion of an artificial satellite having a period commensurable with the rotational period of its primary (Shi and Eckstein, 1968).

In the case of hyperbolic equations, this technique as well as the derivative-expansion method applies only to dispersive wave problems and it does not provide solutions for nondispersive wave problems such as that discussed in Section 6.2.10.

9.6.5 6.4 Generalized Method

6.4.1. A Second-order Equation with Variable Coefficients

Let us consider the following special second-order problem (Nayfeh, 1964, 1965b)

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (6.4.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (6.4.2)$$

discussed in Sections 4.1.3 and 4.2.2 using the methods of matched and composite asymptotic expansions. As discussed in Section 4.1.3, the straightforward expansion possesses a nonuniformity at $x = 0$. The size of the region of nonuniformity is $x = O(\epsilon)$. To treat this problem using the method of matched asymptotic expansions, an inner expansion valid when $x = O(\epsilon)$ was introduced using the inner variable $\eta = x/\epsilon$. This inner expansion was matched to the outer expansion and then a composite expansion was formed to give a uniformly valid expansion.

To obtain a uniformly valid expansion using the generalized version of the method of multiple scales, we introduce the scales

$$\xi = x \quad (6.4.3)$$

$$\eta = \frac{g_0(x)}{\epsilon} + g_1(x) + \epsilon g_2(x) \quad (6.4.4)$$

where g_n is determined from the analysis. We require that $g_0(0) = g_i(0) = 0$ so that $g_0(x) \rightarrow x$ as $x \rightarrow 0$, hence η approaches the inner variable x/ϵ . Then the derivatives with respect to x are transformed according to

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (6.4.5)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left[\frac{d\eta}{dx} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (6.4.6)$$

These variables transform (6.4.1) into

$$\begin{aligned} & \epsilon \left(\frac{g'_0}{\epsilon} + g'_1 + \epsilon g'_2 + \dots \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \epsilon \left(\frac{g''_0}{\epsilon} + g''_1 + \epsilon g''_2 + \dots \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & + 2\epsilon \left(\frac{g'_0}{\epsilon} + g'_1 + \epsilon g'_2 + \dots \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ & + (2\xi + 1) \left[\left(\frac{g'_0}{\epsilon} + g'_1 + \epsilon g'_2 + \dots \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] + 2y = 0 \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

where primes denote differentiation with respect to the argument. Note that we expressed the x variables appearing in (6.4.1) in terms of ξ ; namely, we expressed $2x + 1$ as $2\xi + 1$. Moreover, we expressed g_n and its derivatives in terms of ξ . Now we assume that there exists a uniformly valid asymptotic representation of the solution of (6.4.7) in the form

$$y = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^n y_n(\xi, \eta) + O(\epsilon^N) \quad (6.4.8)$$

where

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} < \infty \quad (6.4.9)$$

for all $\xi = x$ and $\eta = \eta(x; \epsilon)$ where x is in the domain of interest. This last condition is the mathematical expression of the fact that the expansion (6.4.8) is regular in the whole domain of interest.

Substituting (6.4.8) into (6.4.7) and equating like powers of ϵ , we obtain the following equations for y_0 , y_1 , and y_2

$$\left[g'_0 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \right] g'_0 = 0 \quad (6.4.10)$$

$$\begin{aligned} & \left[g'_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right] g'_0 + 2g'_0 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + [g''_0 + (2\xi + 1)g'_1] \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \\ & + (2\xi + 1) \frac{\partial y_0}{\partial \xi} + 2y_0 + 2g'_0 g'_1 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

$$\begin{aligned} & \left[g'_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right] g'_0 + 2g'_0 g'_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + (g'^2_1 + 2g'_0 g'_2) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} \\ & + [g''_0 + (2\xi + 1)g'_1] \frac{\partial y_1}{\partial \eta} + [g''_1 + (2\xi + 1)g'_2] \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \\ & + 2g'_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial \eta} + 2g'_1 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + (2\xi + 1) \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + 2y_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Since $g'_0 \neq 0$ because $g_0(x) \rightarrow x$ as $x \rightarrow 0$, the solution of (6.4.10) is where

$$y_0 = A_0(\xi) + B_0(\xi)e^{-\gamma(\xi)\eta} \quad (6.4.13)$$

$$\gamma(\xi) = \frac{2\xi + 1}{g'_0} \quad (6.4.14)$$

Then (6.4.11) becomes

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) g'^2_0 = -[(2\xi + 1)A'_0 + 2A_0] \\ & - \{g'_0 \gamma \gamma' B_0 \eta + [-2g'_0 (B_0 \gamma)' + (2\xi + 1)B'_0 + (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0]\} e^{-\gamma \eta} \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

The solution of this equation is

$$\begin{aligned} y_1 = & A_1(\xi) + B_1(\xi)e^{-\gamma \eta} - \frac{(2\xi + 1)A'_0 + 2A_0}{g'^2_0 \gamma} \eta \\ & + \frac{1}{g'^2_0} \left\{ \frac{1}{2} B_0 g'_0 \gamma' \eta^2 - \frac{1}{\gamma} [2g'_0 (B_0 \gamma)' - (2\xi + 1)B'_0 \right. \\ & \left. - (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0 - B_0 g'_0 \gamma'] \eta \right\} e^{-\gamma \eta} \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

In order that y_1/y_0 be bounded for all η , the coefficients of η , $\eta e^{-\gamma \eta}$, and $\eta^2 e^{-\gamma \eta}$ must vanish; that is

$$(2\xi + 1)A'_0 + 2A_0 = 0 \quad (6.4.17)$$

$$B_0 \gamma' = 0 \quad (6.4.18)$$

$$2g'_0 (B_0 \gamma)' - (2\xi + 1)B'_0 - (2 - \gamma g''_0 + g'_0 g'_1 \gamma^2) B_0 - B_0 g'_0 \gamma' = 0 \quad (6.4.19)$$

The general solution of (6.4.17) is

$$A_0 = \frac{a_0}{2\xi + 1} \quad (6.4.20)$$

where a_0 is a constant. If y , hence y_0 , is to satisfy two boundary conditions, $B_0 \neq 0$, thus (6.4.18) yields

$$\gamma' = 0 \quad (6.4.21)$$

Therefore γ is a constant, which is taken to be unity without loss of generality. Then (6.4.14) gives

$$g_0 = \xi^2 + \xi \quad (6.4.22)$$

since $g_0(0) = 0$ to reflect the fact that the nonuniformity is at $\xi = 0$. Equation (6.4.19) becomes

$$B'_0 - g'_1 B_0 = 0 \quad (6.4.23)$$

whose solution is

$$B_0 = b_0 e^{\xi_1(\xi)} \quad (6.4.24)$$

where b_0 is another constant of integration. Therefore, to first order

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_0}{2\xi + 1} + b_0 e^{g_1(\xi)} e^{-[g_0(\xi)/\epsilon] - g_1(\xi)} + O(\epsilon) \\ &= \frac{a_0}{2\xi + 1} + b_0 e^{-[g_0(\xi)/\epsilon]} + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

Since $g_1(\xi)$ disappears from the expansion irrespective of its value, we can set $g_1 = 0$ without loss of generality.

The above analysis shows that γ in (6.4.13) must be a constant which is taken to be unity without loss of generality. If γ is not a constant, then since it multiplies η the derivatives with respect to ξ always create terms proportional to powers of η which make y_1/y_0 unbounded as $\eta \rightarrow \infty$. Therefore, whenever such a situation arises, γ is set equal to unity from the start. Moreover, we did not need to solve (6.4.15) to determine the conditions for y_1/y_0 to be bounded for all η . We could have investigated (6.4.15) and required the vanishing of all terms leading to particular solutions that make y_1/y_0 unbounded. Such terms include all those that are proportional to the solutions of the homogeneous equation. Since $e^{-\gamma\eta}$ and 1 are solutions of the homogeneous equation, we require the satisfaction of the conditions (6.4.17) and (6.4.19).

To determine the second approximation, we let $g_1 = 0, \gamma = 1$, substitute for y_0, y_1 , and g_0 into (6.4.12), and obtain

$$\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta^2} + y_2 \right) g_0'^2 = -[(2\xi + 1)A'_1 + 2A_1 + A_0''] + g'_0 [B'_1 - B_0 g'_2] e^{-\eta} \quad (6.4.26)$$

In order that y_2/y_0 be bounded for all η

$$\begin{aligned} (2\xi + 1)A'_1 + 2A_1 + A_0'' &= 0 \\ B'_1 - B_0 g'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.28)$$

Using (6.4.20) in solving (6.4.27), we obtain

$$A_1 = \frac{a_1}{2\xi + 1} + \frac{2a_0}{(2\xi + 1)^3} \quad (6.4.29)$$

where a_1 is a constant of integration. The condition (6.4.28) is satisfied if

$$B'_1 = 0 \quad \text{and} \quad g'_2 = 0 \quad (6.4.30)$$

Thus

$$B_1 = b_1 \text{ and } g_2 = a \text{ constant} \quad (6.4.31)$$

where b_1 is a constant of integration and $g_2 \equiv 0$ since $g_2(0) = 0$.

Therefore, to second approximation, y is given by

$$y = \frac{a_0}{1+2x} + b_0 e^{-[(x^2+x)/\epsilon]} + \epsilon \left[\frac{a_1}{1+2x} + \frac{2a_0}{(1+2x)^3} + b_1 e^{-[(x^2+x)/\epsilon]} \right] + O(\epsilon^2) \quad (6.4.32)$$

Imposing the boundary conditions $y(0) = \alpha$ and $y(1) = \beta$, we obtain $a_0 = 3\beta$, $b_0 = \alpha - 3\beta$, $a_1 = -2\beta/3$, and $b_1 = -16\beta/3$. Hence (6.4.32) becomes

$$y = \frac{3\beta}{1+2x} + (\alpha - 3\beta) e^{-[(x^2+x)/\epsilon]} - \epsilon \left[\frac{2\beta}{3(1+2x)} - \frac{6\beta}{(1+2x)^3} + \frac{16}{3} \beta e^{-[(x^2+x)/\epsilon]} \right] + O(\epsilon^2) \quad (6.4.33)$$

If we expand $e^{-(x^2+x)/\epsilon}$ for small x^2/ϵ , (6.4.33) agrees with (4.2.50) obtained using the method of composite expansions. Thus the method of multiple scales gives a single uniformly valid expansion in contrast with the method of matched asymptotic expansions which gives two expansions that must be matched.

6.4.2. A General Second-order Equation with Variable Coefficients

As a second example, we consider (Cochran, 1962; Nayfeh, 1964, 1965b)

$$\epsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (6.4.34)$$

$$y(0) = \alpha \quad \text{and} \quad y(1) = \beta \quad (6.4.35)$$

where $a(x) > 0$ in $[0, 1]$. The case in which $a(x)$ vanishes in the interior of $[0, 1]$ is called a turning point problem. Turning point problems are discussed briefly in Section 6.4.4 and in detail in Sections 7.3.1 through 7.3.9. If $c = 0$, this example will be the same as that treated in Section 4.1.3 using the method of matched asymptotic expansions.

Since $a(x) > 0$, the nonuniformity is at $x = 0$. In Section 4.1.3, we introduced an inner variable x/ϵ to determine an expansion valid in the region $x = O(\epsilon)$, which was matched to an outer expansion. To determine a uniformly valid first approximation using the method of multiple scales, we assume that there exists an asymptotic representation for y of the form where

$$y = y_0(\xi, \eta) + \epsilon y_1(\xi, \eta) + \dots \quad (6.4.36)$$

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{g(x)}{\epsilon} \quad \text{with} \quad g(x) \rightarrow x \quad \text{as} \quad x \rightarrow 0 \quad (6.4.37)$$

Substituting (6.4.36) and (6.4.37) into (6.4.34) and equating the coefficients of ϵ^0 and ϵ^{-1} to zero, we obtain

$$\left[g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + a(\xi) \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \right] g' = 0 \quad (6.4.38)$$

$$\left[g' \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + a(\xi) \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right] g' + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta \partial \xi} + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + a(\xi) \frac{\partial y_0}{\partial \xi} + b(\xi) y_0 = c(\xi) \quad (6.4.39)$$

where we have expressed $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, and $g(x)$ in terms of ξ . Since $g \neq 0$, the general solution of (6.4.38) is where

$$y_0 = A(\xi) + B(\xi) e^{-\gamma(\xi)\eta} \quad (6.4.40)$$

$$\gamma = \frac{a(\xi)}{g'} \quad (6.4.41)$$

As discussed in the previous section, γ must be a constant; otherwise the derivatives with respect to ξ would produce terms proportional to $\gamma'\eta$ in (6.4.39), hence make y_1/y_0 unbounded as $\eta \rightarrow \infty$. For a uniformly valid expansion, we require that $\gamma = 1$ without loss of generality. Hence

$$g = \int_0^x a(t) dt \quad \text{since} \quad g(x) \rightarrow x \quad \text{as} \quad x \rightarrow 0 \quad (6.4.42)$$

Substituting for y_0 into (6.4.39) gives

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) g'^2 = -[aA' + bA - c] + [g'B' + (g'' - b)B] e^{-\eta} \quad (6.4.43)$$

In order that y_1/y_0 be bounded for all η , we require that

$$\begin{aligned} aA' + bA &= c \\ g'B' + (g'' - b)B &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.45)$$

The solutions of these equations are

$$A = e^{-\int_1^x [b(t)/a(t)] dt} \left[a_0 + \int_1^x \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right] \quad (6.4.46)$$

$$B = \frac{b_0}{a(x)} e^{\int_0^x [b(t)/a(t)] dt} \quad (6.4.47)$$

where a_0 and b_0 are constants of integration.

To first approximation, y is given by

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_1^x [b(t)/a(t)] dt} \left[a_0 + \int_1^x \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right] \\ &\quad + \frac{b_0}{a(x)} e^{\int_0^x [b(t)/a(t)] dt} e^{-\epsilon^{-1} \int_0^x a(t) dt} + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (6.4.48)$$

The limits of the integrals in (6.4.46) and (6.4.47) were chosen so that a_0 and b_0 could be expressed in a simple manner in terms of the boundary conditions (6.4.35). Thus $a_0 = \beta$ and

$$b_0 = a(0) \left\{ \alpha - e^{-\int_1^0 [b(t)/a(t)] dt} \left[\beta + \int_1^0 \frac{c(\tau)}{a(\tau)} e^{\int_1^\tau [b(t)/a(t)] dt} d\tau \right] \right\} \quad (6.4.49)$$

Expansion (6.4.48) is a composite expansion which agrees with the inner and outer expansions obtained in Section 4.1.3 in the inner and outer regions, respectively. If we specialize (6.4.48) for the case

$$a(x) = 1 + 2x, \quad b(x) = 2, \quad c(x) = 0 \quad (6.4.50)$$

discussed in the previous section, we obtain

$$y = \frac{3\beta}{1+2x} + (\alpha - 3\beta)e^{-[(x^2+x)/\epsilon]} + O(\epsilon) \quad (6.4.51)$$

where we have used $a_0 = \beta$ and (6.4.49). This expansion is in full agreement with the first term in the expansion obtained in the previous section.

6.4.3. A Linear Oscillator with a Slowly Varying Restoring Force

The two cases discussed above can be treated by using either the method of multiple scales or the method of matched asymptotic expansions. Let us consider next an example that cannot be treated by the latter method; namely

$$y'' + b(\epsilon x)y = 0 \quad (6.4.52)$$

where $b(\epsilon x) \neq 0$ and ϵ is a small parameter. To obtain an expansion uniformly valid for large x , we assume that there exists an asymptotic representation for y of the form

$$y = y_0(\xi, \eta) + \epsilon y_1(\xi, \eta) + \dots \quad (6.4.53)$$

where

$$\xi = \epsilon x, \quad \eta = \frac{g(\xi)}{\epsilon} + \dots \quad (6.4.54)$$

This form of η was chosen in order that the frequency of oscillation $\omega = d\eta/dx = g'(\xi) = O(1)$. Substituting (6.4.53) and (6.4.54) into (6.4.52) and equating the coefficients of ϵ^0 and ϵ to zero, we obtain

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + b(\xi)y_0 = 0 \quad (6.4.55)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + b(\xi)y_1 + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (6.4.56)$$

The general solution of (6.4.55) is

$$\begin{aligned} \text{where } y_0 &= A(\xi)e^{i\gamma\eta} + B(\xi)e^{-i\gamma\eta} \\ \gamma^2 &= \frac{b(\xi)}{g'^2(\xi)} \end{aligned} \quad (6.4.57)$$

As argued in the previous two sections, we set $\gamma = 1$ to obtain an expansion in which y_1/y_0 is bounded for all η . Hence

$$g = \int_0^\xi \sqrt{b(t)} dt \quad (6.4.59)$$

Substituting for y_0 into (6.4.56), and remembering that $\gamma = 1$, we obtain

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + y_1\right) g'^2 = -i(g''A + 2g'A')e^{i\eta} + i(g''B + 2g'B')e^{-i\eta} \quad (6.4.60)$$

In order that y_1/y_0 be bounded for all η , we require the vanishing of the coefficients of $\exp(\pm i\eta)$ on the right-hand side of (6.4.60); that is

$$g''A + 2g'A' = 0 \quad (6.4.61)$$

$$g''B + 2g'B' = 0 \quad (6.4.62)$$

The solutions of these equations are

$$A = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{g'}}, \quad B = \frac{\tilde{b}_0}{\sqrt{g'}} \quad (6.4.63)$$

where $\tilde{a}_0$ and $\tilde{b}_0$ are constants of integration.

If $b(\epsilon x) > 0$, y is given by

$$y \approx \frac{1}{\sqrt[4]{b(\epsilon x)}} \left[a_0 \cos \left(\epsilon^{-1} \int_0^{\epsilon x} \sqrt{b(t)} dt \right) + b_0 \sin \left(\epsilon^{-1} \int_0^{\epsilon x} \sqrt{b(t)} dt \right) \right] \quad (6.4.64)$$

where a_0 and b_0 are constants. If $b(\epsilon x) < 0$, y is given by

$$y \approx \frac{1}{\sqrt[4]{|b(\epsilon x)|}} \left[a_0 \exp \left(\epsilon^{-1} \int_0^{\epsilon x} \sqrt{-b(t)} dt \right) + b_0 \exp \left(-\epsilon^{-1} \int_0^{\epsilon x} \sqrt{-b(t)} dt \right) \right] \quad (6.4.65)$$

Expansions (6.4.64) and (6.4.65) are called the WKB approximation to the solution of (6.4.52) (see Section 7.1.3).

These expansions are clearly not valid near a point where $b(\epsilon x)$ vanishes. In fact, they tend to infinity as x approaches a zero of $b(\epsilon x)$. The zeros of $b(\epsilon x)$ are called turning points and are discussed in detail in Sections 7.3.1 through 7.3.9. An example of a turning point problem is treated in the next section using the method of multiple scales.

If we change variables in (6.4.52) from x to ξ , we find that

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \lambda^2 b(\xi) y = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\epsilon} \quad (6.4.66)$$

which is a problem containing a large parameter λ . Thus the above-obtained approximation is applicable to this problem as well.

6.4.4. An Example with a Turning Point

Let us consider the problem

$$y'' + \lambda^2(1-x)f(x)y = 0 \quad (6.4.67)$$

where λ is a large positive number and $f(x)$ is regular and positive. The WKB approximation tends to infinity as $x \rightarrow 1$ as can be seen from (6.4.64) and (6.4.65) if we let $b(\epsilon t) = (1-x)f(x)$ and $\epsilon = \lambda^{-1}$. To determine an expansion valid everywhere using the method of multiple scales, we first determine the size of the nonuniformity. Thus we let $\zeta = (1-x)\lambda^\nu$ with $\nu > 0$ in (6.4.67) and obtain

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \lambda^{2-3\nu} f(1-\zeta\lambda^{-\nu}) \zeta y = 0 \quad (6.4.68)$$

As $\lambda \rightarrow \infty$, the following different limits exist depending on the value of ν

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} &= 0 & \text{if } \nu &> \frac{2}{3} \\ y &= 0 & \text{if } \nu &< \frac{2}{3} \\ \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + f(1)\zeta y &= 0 & \text{if } \nu &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.69)$$

The last limit is the appropriate one because its solution has an exponential behavior for $\zeta < 0$ (i.e., $x > 1$) and an oscillatory behavior for $\zeta > 0$ (i.e., $x < 1$). Thus it can be used to connect (6.4.64) and (6.4.65) as the turning point is crossed.

Therefore we assume that there exists an asymptotic representation of the solution of (6.4.67) of the form (Cochran, 1962; Nayfeh, 1964, 1965b; Fowkes, 1968, Part I)

$$y = y_0(\xi, \eta) + \lambda^{-2/3} y_1(\xi, \eta) + \dots \quad (6.4.70)$$

where

$$\xi = x, \quad \eta = \lambda^{2/3} g(x) + \dots \quad (6.4.71)$$

with

$$g(x) = (1 - x)h(x), \quad h(x) > 0 \quad (6.4.72)$$

The functions of the independent variable x that appear in (6.4.67) are expressed in terms of ξ , except $1 - x$ is replaced by $\eta \lambda^{-2/3} / h(x)$ because it reflects the nonuniformity. Therefore (6.4.67) becomes

$$\lambda^{4/3} g'^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + 2\lambda^{2/3} g' \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^{2/3} g'' \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \lambda^{4/3} \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y = 0 \quad (6.4.73)$$

Substituting (6.4.70) into (6.4.73) and equating the coefficients of $\lambda^{4/3}$ and $\lambda^{2/3}$ to zero, we obtain

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \eta^2} + \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y_0 = 0 \quad (6.4.74)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{f(\xi)}{h(\xi)} \eta y_1 + 2g' \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} + g'' \frac{\partial y_0}{\partial \eta} = 0 \quad (6.4.75)$$

The general solution of (6.4.74) is

$$y_0 = A(\xi) \eta^{1/2} J_{1/3} [\gamma(\xi) \eta^{3/2}] + B(\xi) \eta^{1/2} J_{-1/3} [\gamma(\xi) \eta^{3/2}] \quad (6.4.76)$$

where $J_{\pm 1/3}$ are Bessel's functions of order $\pm 1/3$ and

$$\gamma = \pm \frac{2}{3} \left[\frac{f(\xi)}{h(\xi) g'^2(\xi)} \right]^{1/2} \quad (6.4.77)$$

In order that y_1/y_0 be bounded for all $\eta, \gamma = 1$ as discussed in Sections 6.4.1 and 6.4.2. Therefore

$$g'(\xi) h^{1/2}(\xi) = -\frac{2}{3} [f(\xi)]^{1/2} \quad (6.4.78)$$

where the negative sign in (6.4.77) was taken so that $h(x) > 0$. Multiplying both sides of (6.4.78) by $(1 - \xi)^{1/2}$, we obtain

Since $g(1) = 0$

$$g^{1/2}g' = -\frac{2}{3}[(1-\xi)f(\xi)]^{1/2}$$

$$g^{3/2} = -\int_1^x [(1-t)f(t)]^{1/2} dt \quad (6.4.79)$$

With y_0 known and $\gamma = 1$, (6.4.75) becomes

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} + \frac{9}{4} \eta y_1 \right) g'^2$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \eta} [(2g'A' + g''A) \eta^{1/2} J_{1/3}(\eta^{3/2}) + (2g'B' + g''B) \eta^{1/2} J_{-1/3}(\eta^{3/2})] \quad (6.4.80)$$

In order that y_1/y_0 be bounded for all η , the right-hand side of (6.4.80) must vanish; that is

$$\left. \begin{aligned} 2g'A' + g''A &= 0 \\ 2g'B' + g''B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4.81)$$

Hence

$$A = \frac{a}{\sqrt{g'}}, \quad B = \frac{b}{\sqrt{g'}} \quad (6.4.82)$$

where a and b are constants of integration.

Thus, to first approximation

$$y = \frac{g^{3/4}(x)}{[(1-x)f(x)]^{1/4}} [a_0 J_{1/3}(\lambda g^{3/2}) + b_0 J_{-1/3}(\lambda g^{3/2})] + \dots \quad (6.4.83a)$$

where a_0 and b_0 are constants. As $x \rightarrow 1$

$$g(x) \rightarrow \left[\frac{4}{9} f(1) \right]^{1/3} (1-x)$$

hence

$$y \rightarrow (1-x)^{1/2} \left\{ \tilde{a}_0 J_{1/3} \left[\frac{2}{3} \lambda \sqrt{f(1)} (1-x)^{3/2} \right] \right.$$

$$\left. + \tilde{b}_0 J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} \lambda \sqrt{f(1)} (1-x)^{3/2} \right] \right\} + \dots \quad (6.4.83b)$$

where $\tilde{a}_0$ and $\tilde{b}_0$ are constants. Since

$$J_v(t) = t^v + o(t^v) \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

we conclude that (6.4.83b) is bounded as $x \rightarrow 1$.

6.4.5. The Duffing Equation with Slowly Varying Coefficients

Let us next consider the equation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha(\xi)u + \beta(\xi)u^3 = 0 \quad (6.4.84)$$

where

$$\xi = \epsilon t, \quad \epsilon \ll 1$$

The asymptotic solutions of this equation were studied by Kuzmak (1959) using the method of multiple scales.

If α and β are constants, the solution of (6.4.84) can be expressed in terms of Jacobi's elliptic functions; that is, in terms of

$$u = A \operatorname{sn}(Kt, \nu), A \operatorname{cn}(Kt, \nu), A \operatorname{dn}(Kt, \nu) \quad (6.4.85)$$

Here ν is the modulus and $K(\nu)$ is the complete elliptic integral. The differential equations satisfied by these functions are

$$\left[\frac{dsn}{d\tau} \right]^2 = (1 - sn^2) (1 - \nu^2 sn^2) \quad (6.4.86a)$$

$$\left[\frac{dcn}{d\tau} \right]^2 = (1 - cn^2) (1 - \nu^2 + \nu^2 cn^2) \quad (6.4.86b)$$

$$\left[\frac{ddn}{d\tau} \right]^2 = (1 - dn^2) (\nu^2 - 1 + dn^2) \quad (6.4.86c)$$

where $\tau = Kt$. Differentiating both sides of (6.4.86) yields

$$\frac{d^2 s n}{d\tau^2} + (1 + \nu^2) s n - 2\nu^2 s n^3 = 0 \quad (6.4.87a)$$

$$\frac{d^2 c n}{d\tau^2} + (1 - 2\nu^2) c n + 2\nu^2 c n^3 = 0 \quad (6.4.87b)$$

$$\frac{d^2 d n}{d\tau^2} + (\nu^2 - 2) d n + 2d n^3 = 0 \quad (6.4.87c)$$

Since these elliptic functions are tabulated for the case $0 < \nu < 1$, we express the solution in terms of one of these tabulated functions.

If α and β are slowly varying functions rather than constants, we expect the solution to depend on the slow time scale $\xi = \epsilon t$ as well as on the fast time scale t . Moreover, to first approximation, the solution can be expressed as in (6.4.85) but with $A = A(\xi)$, $K = K(\xi)$, and $\nu = \nu(\xi)$. Thus in the case of slowly varying coefficients, we let where

$$u = u_0(\xi, \eta) + \epsilon u_1(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.4.88)$$

$$\eta = \frac{g(\xi)}{\epsilon} + \cdots \quad \text{or} \quad \frac{d\eta}{dt} = g'(\xi) + \cdots$$

This form of solution differs from that of Kuzmak in that he assumed $\eta = g'(\xi)t$. Substituting (6.4.88) into (6.4.84) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$g'^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi) u_0 + \beta(\xi) u_0^3 = 0 \quad (6.4.89)$$

$$g'^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi) u_1 + 3\beta(\xi) u_0^2 u_1 = -2g' \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} - g'' \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \quad (6.4.90)$$

We write the solution of (6.4.89) in terms of one of the elliptic functions in (6.4.85), say sn ; that is

$$u_0 = A(\xi) \text{sn}[\eta, \nu(\xi)] \quad (6.4.91)$$

Hence u_0/A should satisfy (6.4.87a) with $\eta = \tau$; that is

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + [1 + \nu^2(\xi)] u_0 - \frac{2\nu^2(\xi)}{A^2(\xi)} u_0^3 = 0 \quad (6.4.92)$$

In order that (6.4.89) and (6.4.92) be identical

$$[1 + \nu^2(\xi)] g'^2(\xi) = \alpha(\xi) \quad (6.4.93)$$

$$2\nu^2(\xi) g'^2(\xi) = -\beta(\xi) A^2(\xi) \quad (6.4.94)$$

These are two relationships among $A(\xi)$, $\nu(\xi)$, and $g(\xi)$. A third relationship is determined from the condition that u_1/u_0 be bounded for all η in order that (6.4.88) be a uniformly valid asymptotic expansion.

Differentiating (6.4.89) with respect to η leads to the homogeneous part of (6.4.90). Hence $\partial u_0 / \partial \eta$ is a solution of the homogeneous part of (6.4.90). In order that u_1/u_0 be bounded for all η , the inhomogeneous part in (6.4.90) must be orthogonal to the solution of the homogeneous part; that is

$$\int_{\eta_1}^{\eta_1+T} \left[2g' \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + g'' \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right] \frac{\partial u_0}{\partial \eta} d\eta = 0 \quad (6.4.95)$$

where $\text{sn}(\eta_1, \nu) = 0$ and T is the period of $\text{sn}(\eta, \nu)$ with respect to η . This condition is a generalization of the elimination of terms that produce secular terms. Equation (6.4.95) can be rewritten in the form

$$\frac{d}{d\xi} \left[g'(\xi) \int_{\eta_1}^{\eta_1+T} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] = 0$$

or

$$g'(\xi) \int_{\eta_1}^{\eta_1+T} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = \text{a constant} \quad (6.4.96)$$

Since $u_0 = A \text{sn}(n, \nu)$, η_1 can be taken to be zero and $T = 4K$ where K is the following complete elliptic integral of the second kind

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x^2)(1-\nu^2 x^2)]^{1/2}} \quad (6.4.97)$$

Substituting for u_0 from (6.4.91) into (6.4.96), we have

$$g'(\xi) A^2(\xi) L[\nu^2(\xi)] = c \quad (6.4.98)$$

where c is a constant, and

$$L = \int_0^K \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = \int_0^K \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\zeta \quad (6.4.99)$$

with $\zeta = \text{sn}(\eta, \nu)$. Using (6.4.86a), we express L as

$$L = \int_0^1 \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \nu^2 \zeta^2)} d\zeta$$

or

$$L = \frac{(1 + v^2) E(v) - (1 - v^2) K(v)}{3v^2} \quad (6.4.100)$$

where $E(v)$ is the following complete elliptic integral of the first kind

$$E(v) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - v^2 x^2}{1 - x^2}} dx \quad (6.4.101)$$

The conditions (6.4.93), (6.4.94), and (6.4.98) constitute three relationships for the determination of $A(\xi)$, $\nu(\xi)$, and $g'(\xi)$. Solving for g' from (6.4.93) gives

$$g'(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha(\xi)}{1 + \nu^2(\xi)}} \quad (6.4.102)$$

Eliminating g' from (6.4.93) and (6.4.94) and solving for A , we obtain

$$A(\xi) = \sqrt{-\frac{2\alpha(\xi)\nu^2(\xi)}{\beta(\xi)[1 + \nu^2(\xi)]}} \quad (6.4.103)$$

Squaring (6.4.98) and substituting for g' and A from (6.4.102) and (6.4.103), we obtain

$$\frac{4v^4(\xi)L^2[v(\xi)]}{[1 + v^2(\xi)]^3} = \rho(\xi) = \frac{c^2\beta^2(\xi)}{\alpha^3(\xi)} \quad (6.4.104)$$

With the aid of these last-mentioned relationships, we can compute $\nu(\xi)$ from (6.4.104), then g' and A from (6.4.102) and (6.4.103). The graph for the solution of (6.4.104) was given by Kuzmak and is shown in Figure 6-2.

Three different cases arise depending on the signs of $\alpha(\xi)$ and $\beta(\xi)$:

(1) $\alpha(\xi) > 0, \beta(\xi) < 0$. In this case $\rho > 0$ and (6.4.94) shows that $\gamma = \nu^2(\xi) > 0$. Hence the curve that determines γ lies in the first quadrant. The solution for γ exists if $0 < \rho < 2/9$. At ξ_c such that $\rho(\xi_c) = 2/9$, the

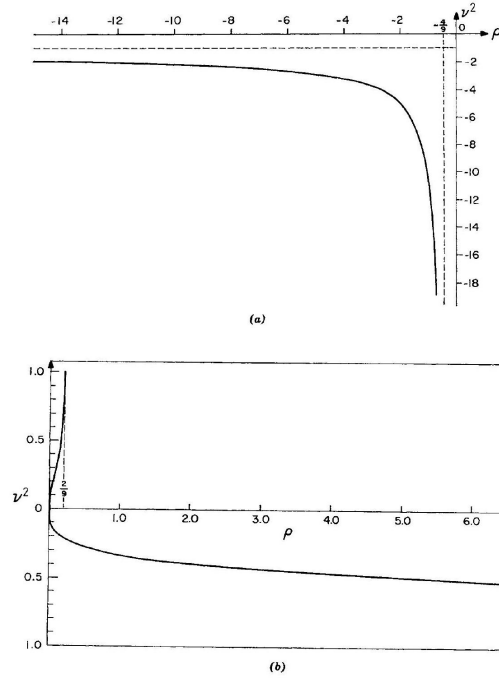


Figure 6-2

asymptotic solution ceases to be oscillatory. If $\rho > 2/9$, or if $\alpha(\xi) < 0$ and $\beta(\xi) < 0$, (6.4.89) has no periodic solutions.

(2) $\alpha(\xi) > 0, \beta(\xi) > 0$. In this case $\rho > 0$ and (6.4.94) shows that $\gamma < 0$. Hence the curve that determines γ lies in the fourth quadrant. The solution for γ exists for $0 < \rho < \infty$.

(3) $\alpha(\xi) < 0, \beta(\xi) > 0$. In this case $\rho < 0$ and (6.4.94) shows that $\gamma < 0$. Hence the curve that determines γ lies in the third quadrant. The solution for γ exists if $-\infty < \rho < -4/9$.

Since the elliptic functions and integrals are usually tabulated for real y such that $0 < \nu < 1$, alternative asymptotic solutions in terms of $cn(\eta, \nu)$ and $dn(\eta, \nu)$ are preferred in cases (2) and (3).

6.4.6. Reentry Dynamics

The motion of a reentry rolling body with variable spin under the influence of nonlinear aerodynamic forces and slight center of gravity offset and aerodynamic asymmetries is governed by (Nayfeh and Saric, 1972a)

$$\ddot{\xi} - i \frac{I_x}{I} p \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \epsilon K e^{i(\phi + \phi_0)} + \gamma |\xi|^2 \xi + \epsilon^2 \mu_1 \dot{\xi} + \mu_2 |\xi|^2 \dot{\xi} + i \epsilon^2 \chi_1 \xi + i \chi_2 |\xi|^2 \xi \quad (6.4.105)$$

$$\dot{\phi} = p \quad (6.4.106)$$

$$\dot{p} = \epsilon^2 \nu_0 + \epsilon \nu_1 \tilde{\alpha} + \epsilon^2 \nu_2 p, \quad \tilde{\alpha} = \text{Imaginary } \{ \xi e^{-i\phi} \} \quad (6.4.107)$$

where $\xi = \beta + i\alpha$, $|\xi|$ is the sine of the total angle of attack, p is the roll rate, ϵK is the amplitude of the excitation due to aerodynamic asymmetry, and ϵ is a small but finite quantity of the order of the sine of the initial total angle of attack. Here ω_0 , K , γ , μ_i , χ_i , and ν_i are slowly varying functions of time, and I and I_x are constants.

In the absence of damping and nonlinear terms (i.e., $\gamma = \mu_i = \chi_i = 0$), the solution of (6.4.105) for constant p , K , and ω_0 is

$$\xi = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + \frac{\epsilon K}{(\omega_1 - p)(p - \omega_2)} e^{i(\phi + \phi_0)} \quad (6.4.108)$$

where A_1 and A_2 are complex constants and

$$\omega_{1,2} = \frac{pI_x}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{pI_x}{2I}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (6.4.109)$$

The frequencies ω_1 and ω_2 are called the nutation and precession frequencies.

For statically stable bodies (i.e., $\omega_0^2 > 0$) and positive p , ω_1 is positive while ω_2 is negative. Two cases arise depending on whether p is near ω_1 or not. The first case is called roll resonance, and the forced response tends to infinity as $p \rightarrow \omega_1$. Before p approaches ω_1 , the damping as well as the nonlinear aerodynamic forces significantly modify the response. The roll resonance case is discussed in this section for the case $K = \epsilon^2 k$, and we refer the reader to Nayfeh and Saric (1972a) for the nonresonant case.

To determine an approximate solution to (6.4.105) through (6.4.107) when $p \approx \omega_1$ using the generalized version of the method of multiple scales, we make use of the fact that actual flight test data and six-degree-of-freedom numerical calculations show that there are at least four time scales: a slow time scale $T_2 = \epsilon^2 t$ characterizing $K, \omega_0, \gamma, \nu_i, \chi_i$, and μ_i ; and three fast scales characterizing the nutation, precession, and forced components of the angle of attack. Thus we assume expansions of the form

$$\xi(t; \epsilon) = \epsilon \xi_1(\eta_1, \eta_2, T_2) + \epsilon^3 \xi_3(\eta_1, \eta_2, \phi, T_2) + \dots \quad (6.4.110)$$

$$p(t; \epsilon) = p_0(T_2) + \epsilon^2 p_2(\eta_1, \eta_2, \phi, T_2) + \dots \quad (6.4.111)$$

where

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \omega_i, \quad \omega_{1,2} = \frac{p_0 I_x}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0 I_x}{2I}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (6.4.112)$$

where $\omega_1(T_2)$ is the nutation frequency and $\omega_2(T_2)$ is the precession frequency. In terms of these variables, the time derivatives are transformed according to

$$\frac{d}{dt} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p \frac{\partial}{\partial \phi} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (6.4.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} = & \omega_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + p^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\omega_1 \omega_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + 2\omega_1 p \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \phi} \\ & + 2\omega_2 p \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \phi} + \omega_1 \frac{\partial p}{\partial \eta_1} \frac{\partial}{\partial \phi} + \omega_2 \frac{\partial p}{\partial \eta_2} \frac{\partial}{\partial \phi} + p \frac{\partial p}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ & + 2\epsilon^2 \omega_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial T_2} + 2\epsilon^2 \omega_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial T_2} + 2\epsilon^2 p \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial T_2} + \epsilon^2 \omega_1' \frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ & + \epsilon^2 \omega_2' \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \epsilon^2 \frac{\partial p}{\partial T_2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial T_2^2} \end{aligned} \quad (6.4.114)$$

Substituting (6.4.110) through (6.4.114) into (6.4.105) and (6.4.107) and equating coefficients of like powers of ϵ , we have

$$L(\xi_1) = 0 \quad (6.4.115)$$

$$\begin{aligned} L(\xi_3) = & k e^{i(\phi+\phi_0)} - 2\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta_1 \partial T_2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta_2 \partial T_2} - \omega_1' \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} - \omega_2' \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} \\ & + i \frac{p_0 I_x}{I} \frac{\partial \xi_1}{\partial T_2} + \gamma |\xi_1|^2 \xi_1 + (\mu_1 + \mu_2 |\xi_1|^2) \left(\omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} \right) \\ & + i (\chi_1 + \chi_2 |\xi_1|^2) \xi_1 \end{aligned} \quad (6.4.116)$$

$$\omega_1 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial p_2}{\partial \phi} = -\frac{dp_0}{dT_2} + \nu_0 + \nu_2 p_0 + \nu_1 \text{ Imaginary } (\xi_1 e^{-i\phi}) \quad (6.4.117)$$

where

$$\begin{aligned} L = & \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \\ & - i \frac{p_0 I_x}{I} \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \omega_0^2 \end{aligned} \quad (6.4.118)$$

The solution of (6.4.115) is

$$\xi_1 = A_1(T_2) e^{i\eta_1} + A_2(T_2) e^{i\eta_2} \quad (6.4.119)$$

Then (6.4.117) becomes

$$\begin{aligned} & \omega_1 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} + p_0 \frac{\partial p_2}{\partial \phi} \\ & = -\frac{dp_0}{dT_2} + \nu_0 + \nu_2 p_0 \\ & \quad + \nu_1 [a_1 \sin(\eta_1 - \phi + \theta_1) + a_2 \sin(\eta_2 - \phi + \theta_2)] \end{aligned} \quad (6.4.120)$$

where $A_n = a_n \exp(i\theta_n)$ with real a_n and θ_n . Since $p_0 \approx \omega_1, \eta_1 - \phi$ is a slowly varying function of time, and we consider it a function of T_2 . Now the solution of (6.4.120) contains terms that tend to infinity as η_1, η_2 , or $\phi \rightarrow \infty$ (i.e., $t \rightarrow \infty$), thereby invalidating our expansion for long times unless

$$\frac{dp_0}{dT_2} = v_0 + v_2 p_0 + v_1 a_1 \sin(\eta_1 - \phi + \theta_1) \quad (6.4.121)$$

Then p_2 becomes

$$p_2 = \frac{a_2 \nu}{p_0 - \omega_2} \cos(\eta_2 + \theta_2 - \phi) \quad (6.4.122)$$

With ξ_1 known (6.4.116) becomes

$$\begin{aligned} L(\xi_3) = & Q_1 e^{i\eta_1} + Q_2 e^{i\eta_2} + (i\omega_1 \mu_2 + i\chi_2 + \gamma) A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\eta_1 - \eta_2)} \\ & + (i\omega_2 \mu_2 + i\chi_2 + \gamma) \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\eta_2 - \eta_1)} \end{aligned} \quad (6.4.123)$$

where

$$\begin{aligned}
Q_1 = & -i(\omega_1 - \omega_2) \frac{dA_1}{dT_2} - i\omega'_1 A_1 \\
& + i \{ (\omega_1 \mu_1 + \chi_1) + (-i\gamma + \chi_2 + \omega_1 \mu_2) a_1^2 \\
& + [-2i\gamma + 2\chi_2 + (\omega_1 + \omega_2) \mu_2] a_2^2 \} A_1 + k e^{i(\phi + \phi_0 - \eta_1)}
\end{aligned} \tag{6.4.124}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & i(\omega_1 - \omega_2) \frac{dA_2}{dT_2} - i\omega'_2 A_2 \\
& + i \{ (\omega_2 \mu_1 + \chi_1) + [-2i\gamma + 2\chi_2 + (\omega_1 + \omega_2) \mu_2] a_1^2 \\
& + (-i\gamma + \chi_2 + \omega_2 \mu_2) a_2^2 \} A_2
\end{aligned} \tag{6.4.125}$$

Secular terms in (6.4.123) will be eliminated if $Q_1 = Q_2 = 0$. Letting $A_n = a_n \exp(i\theta_n)$ with real a_n and θ_n in (6.4.124) and (6.4.125) with $Q_1 = Q_2 = 0$ and separating real and imaginary parts, we obtain

$$\frac{da_1}{dT_2} = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_1^3 + \lambda_{13}a_1a_2^2 + \frac{k}{\omega_1 - \omega_2} \sin \Gamma \tag{6.4.126}$$

$$\frac{da_2}{dT_2} = \lambda_{21}a_2 + \lambda_{22}a_2^3 + \lambda_{23}a_1^2a_2 \tag{6.4.127}$$

$$\frac{d\theta_1}{dT_2} = -\frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (a_1^2 + 2a_2^2) - \frac{k}{(\omega_1 - \omega_2)a_1} \cos \Gamma \tag{6.4.128}$$

$$\frac{d\theta_2}{dT_2} = \frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (2a_1^2 + a_2^2) \tag{6.4.129}$$

where

$$\Gamma = \phi - \eta_1 - \theta_1 + \phi_0 \tag{6.4.130}$$

$$[\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}] = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} [\omega_1 \mu_1 + \chi_1 - \omega'_1, \omega_1 \mu_2 + \chi_2, (\omega_1 + \omega_2) \mu_2 + 2\chi_2] \tag{6.4.131}$$

$$[\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}] = -\frac{1}{\omega_1 - \omega_2} [\omega_2 \mu_1 + \chi_1 - \omega'_2, \omega_2 \mu_2 + \chi_2, (\omega_1 + \omega_2) \mu_2 + 2\chi_2] \tag{6.4.132}$$

Combining (6.4.128) and (6.4.130) and introducing the detuning parameter σ defined by

$$p_0 = \omega_1 + \epsilon^2 \sigma$$

we have

$$\frac{d\Gamma}{dT_2} = \sigma + \frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} (a_1^2 + 2a_2^2) + \frac{k}{(\omega_1 - \omega_2)a_1} \cos \Gamma \tag{6.4.133}$$

6.4.7. The Earth-moon-spaceship Problem

The next example is the one-dimensional earth-moon-spaceship problem discussed in Sections 2.4.2, 3.2.2, and 4.1.7 and given by

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1-\mu}{x} + \frac{\mu}{1-x}, \quad t(0) = 0 \tag{6.4.134}$$

The straightforward expansion for t , for small μ , in terms of x is singular at $x = 1$, and the region of nonuniformity is $1 - x = O(\mu)$. Thus to determine an expansion valid for all x using the method of multiple scales, we introduce the two variables (Nayfeh, 1964, 1965a)

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1 - x}{\mu}$$

With these variables (6.4.134) becomes

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t}{\partial \xi} - \mu^{-1} \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{1 - \mu}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right)^{-1/2} \quad (6.4.135)$$

where all functions of x are expressed in terms of ξ except the term $1 - x$, the source of the nonuniformity, which is expressed in terms of η as $\mu\eta$. Now we assume that t possesses the following uniformly valid expansion

$$t = t_0(\xi, \eta) + \mu t_1(\xi, \eta) + \mu^2 t_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.4.136)$$

Substituting (6.4.136) into (6.4.135) and equating coefficients of like powers of μ , we obtain

$$\frac{\partial t_0}{\partial \eta} = 0 \quad (6.4.137)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t_0}{\partial \xi} - \frac{\partial t_1}{\partial \eta} \right) = \sqrt{\frac{\xi \eta}{\eta + \xi}} \quad (6.4.138)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\partial t_2}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi} \left(\frac{\eta}{\eta + \xi} \right)^{3/2} \quad (6.4.139)$$

The general solution of (6.4.137) is

$$\sqrt{2} t_0 = A(\xi) \quad (6.4.140)$$

where A is determined from the condition that t_1/t_0 be bounded for all η . The solution of (6.4.138) becomes

$$-\sqrt{2} t_1 = -A'(\xi) \eta + \sqrt{\xi \eta (\eta + \xi)} - \xi^{3/2} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} + B(\xi) \quad (6.4.141)$$

As $\eta \rightarrow \infty$, (6.4.141) becomes

$$-\sqrt{2} t_1 = \left[\sqrt{\xi} - A'(\xi) \right] \eta + \frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi} - \xi^{3/2} \ln 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} + B(\xi) + O(\eta^{-1}) \quad (6.4.142)$$

Thus t_1 contains two terms which make t_1 singular as $\eta \rightarrow \infty$; a term proportional to η and a term proportional to $\ln(\eta)$. The first term can be eliminated if

$$A'(\xi) = \sqrt{\xi} \quad \text{or} \quad A = \frac{2}{3} \xi^{3/2} + a \quad (6.4.143)$$

where a is an arbitrary constant. As for the second term, $\ln(\eta)$ is slowly varying with x and μ although η is fast varying. Thus it should be expressed in terms of ξ ; that is

$$\xi^{3/2} \ln 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \xi^{3/2} \ln \sqrt{\frac{4(1 - \xi)}{\mu \xi}}$$

Then t_1 is singular as $\xi \rightarrow 1$, and it will be bounded as $\xi \rightarrow 1$ if

$$B(\xi) = \frac{1}{2}\xi^{3/2}\ln(1-\xi) + C(\xi) \quad (6.4.144)$$

The function $C(\xi)$ is determined by requiring that t_2/t_1 be bounded as $\eta \rightarrow \infty$. Substituting the above solutions into (6.4.139), we obtain

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta(\eta+\xi)}{\xi}} - \sqrt{\frac{\eta\xi}{\eta+\xi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\xi}\left(\frac{\eta}{\eta+\xi}\right)^{3/2} \\ &\quad + \frac{3}{2}\sqrt{\xi}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - \frac{3}{4}\sqrt{\xi}\ln(1-\xi) + \frac{1}{2}\frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi) \end{aligned} \quad (6.4.145)$$

As $\eta \rightarrow \infty$, (6.4.145) becomes

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial \eta} &= -\frac{7}{4}\sqrt{\xi} + \frac{3}{2}\sqrt{\xi}\ln 2\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - \frac{3}{4}\sqrt{\xi}\ln(1-\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi) + O(\eta^{-1}) \text{ as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.4.146)$$

Here again $\ln \sqrt{\eta}$ is expressed in terms of ξ . Consequently, (6.4.146) becomes

$$\sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial \eta} = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln \mu\xi\right)\sqrt{\xi} + \frac{1}{2}\frac{\xi^{3/2}}{1-\xi} - C'(\xi) + O(\eta^{-1})$$

as $\eta \rightarrow \infty$

In order that t_2/t_1 be bounded as $\eta \rightarrow \infty$

$$C'(\xi) = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln \mu\xi\right)\sqrt{\xi} + \frac{1}{2}\frac{\xi^{3/2}}{1-\xi}$$

or

$$C = -\frac{7}{6}\xi^{3/2} - \sqrt{\xi} - \frac{1}{2}\xi^{3/2}\ln \frac{\mu\xi}{4} + \frac{1}{2}\ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} + c \quad (6.4.147)$$

where c is a constant of integration.

Expressing t_0 and t_1 in terms of x and using the initial condition $t(x=0) = 0$, we obtain $a = c = 0$. Hence

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t &= \left(1 - \frac{1}{3}x\right)\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)(1-x+\mu x)} \\ &\quad + \mu \left[x^{3/2}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{\mu x}} - \frac{1}{2}x^{3/2}\ln \frac{4(1-x)}{\mu x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{6}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] + O(\mu^2) \end{aligned} \quad (6.4.148)$$

We next discuss an alternative method (Nayfeh, 1965a) of determining $A(\xi)$ and $B(\xi)$. Since

$$\sqrt{2}t = A(\xi) + \mu \left[A'(\xi)\eta - \sqrt{\xi\eta(\eta+\xi)} + \xi^{3/2}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} - B(\xi) \right] + O(\mu^2) \quad (6.4.149)$$

is assumed to be uniformly valid for all x , it must reduce to the straightforward expansion (see Exercise 2.12)

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{3}x^{3/2} + \mu \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) + O(\mu^2) \quad (6.4.150)$$

away from $x = 1$. We can use this condition to determine the functions $A(\xi)$ and $B(\xi)$ rather than use the condition that t_n/t_{n-1} be bounded for all ξ and η . Expressing (6.4.149) in terms of x , and expanding for small μ , we obtain

$$\begin{aligned} \sqrt{2}t = A(x) + \mu \left[A'(x) \frac{1-x}{\mu} - \frac{1-x}{\mu} \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{3/2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x^{3/2} \ln \frac{4(1-x)}{\mu x} - B(x) \right] + O(\mu^2) \end{aligned} \quad (6.4.151)$$

In order that the first terms in (6.4.150) and (6.4.151) be the same

$$A(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (6.4.152)$$

Then the second terms are the same if

$$B(x) = -\frac{7}{6}x^{3/2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2} \ln \frac{4(1-x)}{\mu x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \quad (6.4.153)$$

Substituting these expressions for A and B into (6.4.149) and expressing the result in terms of x , we obtain (6.4.148) exactly.

6.4.8. A Model for Dispersive Waves

We again consider Bretherton's (1964) model equation

$$\phi_{tt} + \phi_{xxxx} + \phi_{xx} + \phi = \epsilon \phi^3 \quad (6.4.154)$$

The linearized equation admits the uniform wave train solution

$$\begin{aligned} \phi &= a \cos \theta \\ \theta &= kx - \omega t, \quad \omega^2 = k^4 - k^2 + 1 \end{aligned} \quad (6.4.155)$$

To determine a wave train slowly varying with position and time, we follow Nayfeh and Hassan (1971) by assuming that

$$\phi = \phi_0(\theta, X_1, T_1) + \epsilon \phi_1(\theta, X_1, T_1) + \dots \quad (6.4.156)$$

where

$$\begin{aligned} \theta &= \epsilon^{-1} \zeta(X_1, T_1), \quad X_1 = \epsilon x, \quad T_1 = \epsilon t \\ k &= \theta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \quad \omega = -\theta_t = -\frac{\partial \zeta}{\partial T_1} \end{aligned} \quad (6.4.157)$$

In terms of the new variables θ , X_1 , and T_1 , the time and space derivatives become

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\epsilon\omega \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial T_1} - \epsilon \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\epsilon k \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X_1} + \epsilon \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \\
\frac{\partial^4}{\partial x^4} &= k^4 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 4\epsilon k^3 \frac{\partial^4}{\partial \theta^3 \partial X_1} + 6\epsilon k^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \dots
\end{aligned}$$

Substituting (6.4.156) into (6.4.154) and equating coefficients of like powers of ϵ , we have

$$L(\phi_0) \equiv (\omega^2 + k^2) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta^2} + k^4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial \theta^4} + \phi_0 = 0 \quad (6.4.158)$$

$$\begin{aligned}
L(\phi_1) &= \phi_0^3 + 2\omega \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta \partial T_1} - 2k \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta \partial X_1} - 4k^3 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial \theta^3 \partial X_1} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \omega}{\partial T_1} - \frac{\partial k}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} - 6k^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial \theta^3}
\end{aligned} \quad (6.4.159)$$

The solution of (6.4.158) is taken to be where

$$\phi_0 = A(X_1, T_1) e^{i\theta} + \bar{A}(X_1, T_1) e^{-i\theta} \quad (6.4.160)$$

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1$$

Substituting for ϕ_0 into (6.4.159), we have

$$L(\phi_1) = Q(X_1, T_1) e^{i\theta} + A^3 e^{3i\theta} + CC \quad (6.4.161)$$

where

$$Q = 2i\omega \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2ik(2k^2 - 1) \frac{\partial A}{\partial X_1} + i \frac{\partial \omega}{\partial T_1} A + i(6k^2 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1} A + 3A^2 \bar{A} \quad (6.4.162)$$

The condition that must be satisfied for there to be no secular terms is $Q = 0$. To simplify this condition, we note that

$$\omega\omega' = 2k^3 - k \quad (6.4.163)$$

where $\omega' = d\omega/dk$, the group velocity. Differentiating (6.4.163) with respect to X_1 , we have

$$\omega\omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1} + \omega'^2 \frac{\partial k}{\partial X_1} = (6k^2 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1} \quad (6.4.164)$$

If ζ is twice continuously differentiable, ω and k satisfy the compatability relationship

$$\frac{\partial k}{\partial T_1} + \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = 0$$

or

$$\frac{\partial k}{\partial T_1} + \omega' \frac{\partial k}{\partial X_1} = 0 \quad (6.4.165)$$

Hence

$$\frac{\partial \omega}{\partial T_1} = \omega' \frac{\partial k}{\partial T_1} = -\omega'^2 \frac{\partial k}{\partial X_1}$$

so that (6.4.164) can be rewritten as

$$\frac{\partial \omega}{\partial T_1} + (6k^2 - 1) \frac{\partial k}{\partial X_1} = \omega \omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1} \quad (6.4.166)$$

With (6.4.163) and (6.4.166) the condition $Q = 0$ can be simplified to

$$2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2\omega' \frac{\partial A}{\partial X_1} + \omega'' \frac{\partial k}{\partial X_1} A = \frac{3i}{\omega} A^2 \bar{A} \quad (6.4.167)$$

Letting $A = (1/2)a \exp(i\beta)$ in (6.4.167) and separating real and imaginary parts, we have

$$\frac{\partial a^2}{\partial T_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} (\omega' a^2) = 0 \quad (6.4.168)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \omega' \frac{\partial \beta}{\partial X_1} = \frac{3a^2}{8\omega} \quad (6.4.169)$$

The solution obtained in this section using the method of multiple scales is a different representation of the solution obtained in Section 5.8.1 by averaging the Lagrangian. In fact, the equations governing the amplitude and the wave number have exactly the same form. However, in Section 5.8.1 there is no phase, but the dispersion relationship (5.8.9) is amplitudedependent; in this section the dispersion relationship is independent of amplitude but the solution describes the phase variation. To show the equivalence of these representations, we expand θ of Section 5.8.1 in the form

$$\theta = \theta_0 - \epsilon \tilde{\beta}$$

so that

$$\begin{aligned} k &= \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} = k_0 - \epsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.4.170)$$

Substituting (6.4.170) into (5.8.9) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= k_0^4 - k_0^2 + 1 \\ \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} &= \frac{3a^2}{8\omega_0} \end{aligned}$$

The last equation is the same as (6.4.169)

6.4.9. The Nonlinear Klein-gordon Equation

The last example considered in this chapter is the equation

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0 \quad (6.4.171)$$

which was treated in Section 5.8.3 using Whitham's method of averaging the Lagrangian. Our analysis follows that of Luke (1966).

We assume that u possesses a uniformly valid expansion of the form

$$u(x, t) = u_0(\theta, X_1, T_1) + \epsilon u_1(\theta, X_1, T_1) + \cdots \quad (6.5.172)$$

where θ , X_1 , and T_1 are defined in (6.4.157). Substituting (6.4.172) into (6.4.171), using the expressions for the derivatives from the previous section, and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$(\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + V'(u_0) = 0 \quad (6.4.173)$$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + V''(u_0) u_1 \\ &= 2k \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial X_1} + 2\omega \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial T_1} + \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.4.174)$$

Equation (6.4.173) can be integrated once to give

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + V(u_0) = E(X_1, T_1) \quad (6.4.175)$$

whose solution is

$$\theta = \sqrt{\omega^2 - k^2} \int^{u_0} \frac{d\xi}{\{2[E - V(\xi)]\}^{1/2}} - \eta(X_1, T_1) \quad (6.4.176)$$

where $E(X_1, T_1)$ and $\eta(X_1, T_1)$ are unknown functions to be determined by examining (6.4.174). Inverting (6.4.176), we find that

$$u_0(\theta, X_1, T_1) = f(\theta + \eta, E, \omega^2 - k^2) \quad (6.4.177)$$

We assume that f is periodic with a constant period which can be normalized to unity so that

$$\sqrt{\omega^2 - k^2} \oint \frac{d\xi}{\{2[E - V(\xi)]\}^{1/2}} = 1 \quad (6.4.178)$$

This provides one relationship among ω , k , and E which is a dispersion relationship.

Now the particular solution of (6.4.174) contains terms that make u_1/u_0 unbounded as $\theta \rightarrow \infty$ unless the right-hand side of (6.4.174) is orthogonal to the solution of the adjoint homogeneous equation. This condition is sometimes referred to as the solvability condition, and it is a generalization of the condition of elimination of secular terms that has been used extensively in this book. Since (6.4.174) is self-adjoint, the solvability condition demands that its right-hand side be orthogonal to the solution of the homogeneous equation which can easily be shown to be $u_1 = \partial u_0 / \partial \theta$. Thus the solvability condition requires that

$$\oint \left(2k \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial X_1} + 2\omega \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial T_1} + \frac{\partial k}{\partial X_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial T_1} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} d\theta = 0$$

which can be rewritten as

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \left[\omega \oint \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right] + \frac{\partial}{\partial X_1} \left[k \oint \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right] = 0 \quad (6.4.179)$$

Changing the variable of integration from θ to u_0 and substituting for $\partial u_0 / \partial \theta$ from (6.4.175), we can rewrite this condition as

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{2[E - V(u_0)]} du_0 \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{k}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \oint \sqrt{2[E - V(u_0)]} du_0 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.4.180)$$

This provides a second relationship among ω , k , and E . The third relationship is the compatibility equation (6.4.165).

The results of this section are in agreement with those obtained in Section 5.8.3 using the variational approach.

6.4.10. Advantages and Limitations of the Generalized Method

This method can certainly be applied to all problems that can be treated by either the derivative-expansion method or the two-variable expansion procedure. Moreover, it can also be applied to cases in which both of these two methods fail, such as problems requiring nonlinear scales (e.g., an oscillator with slowly varying coefficients) or problems having sharp changes (e.g., the earth-moon-spaceship problem). However, the algebra is more involved, and the derivative-expansion method and the two-variable expansion procedure are preferable for nonlinear oscillation problems with constant coefficients.

The method of multiple scales can be used to obtain uniformly valid expansions for problems that can be treated using the method of strained coordinates. Moreover, the method of multiple scales can be applied to cases in which the method of strained coordinates cannot be applied, such as

problems involving damping or sharp changes. In cases in which the method of strained coordinates applies, it may have an advantage because of the implicitness of the solution. For nondispersive hyperbolic equations expansions in terms of exact characteristics are desirable. However, the method of multiple scales can be viewed as a generalization of the method of strained coordinates if the scales are given implicitly rather than explicitly in terms of the original variables.

The examples considered in this chapter demonstrate that the method of multiple scales can be applied to problems that can be treated by the method of matched asymptotic expansions, such as the earth-moon-spaceship problem, as well as to problems that cannot be treated by the latter method, such as nonlinear oscillations. The method of multiple scales yields a single uniformly valid expansion, in contrast with the method of matched asymptotic expansions which yields two expansions that must be matched. Although an ordinary differential equation is transformed into a partial differential equation by the method of multiple scales, the first approximation is not more difficult to solve than the first inner equation. However, the equations for determination of the different scales may be difficult to solve (Mahony, 1962). Moreover, this method has not been applied yet to partial differential equations in which the first term in the expansion is nonlinear, such as viscous flow past a body, or elliptic partial differential equations with inhomogeneous boundary perturbations such as flow past a thin airfoil.

The method of multiple scales is applicable to problems that can be treated by the method of averaging, the method of Krylov-Bogoliubov-Mitropolski, and the Lie transforms as well as to cases that cannot be treated by these methods. If the system is represented by a Hamiltonian, the Lie transforms have an advantage because the higher approximations can be obtained recursively. However, the method of multiple scales can be applied in conjunction with the Lie transforms directly on the Hamiltonian.

9.6.6 Exercises

6.1. Determine a first-order uniform expansion for

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

then specialize your results to the cases: $f = -\dot{u} + \beta u^3$, $\beta u^3 + (1 - u^2) \dot{u}$, and $-|\dot{u}| \dot{u}$.

6.2. Determine second-order uniform expansions for

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = 0$$

for δ near 0 and 4.

6.3. Determine second-order uniform expansions for

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos^3 t)u = 0$$

6.4. Determine first-order uniform expansions for

$$\ddot{u} + (\delta + \epsilon \cos 2t)u = \epsilon f(u, \dot{u})$$

and specialize your results to $f = \beta u^3$, $-|\dot{u}| \dot{u}$, and $(1 - u^2) \dot{u}$.

6.5. Consider the problem

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon [u^3 + (1 - u^2) \dot{u}] + K \cos \omega t$$

Determine first-order uniform expansions for

(a) $K = O(1)$ and ω away from ω_0 , $3\omega_0$, and $\omega_0/3$

(b) $K = O(1)$ and $\omega \approx 3\omega_0$

(c) $K = O(1)$ and $\omega \approx \omega_0/3$

(d) $K = O(\epsilon)$ and $\omega \approx \omega_0$.

6.6. Consider the problem

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2\epsilon \frac{d}{dt}[(1 - z)u] + 2K \cos \omega t$$

$$\tau \dot{z} + z = u^2$$

Determine first-order uniform expansions for the cases enumerated in Exercise 6.5.

6.7. The problem of takeoff of a satellite from a circular orbit with a small thrust can be reduced to

$$u'' + u - v^2 = -\frac{\epsilon v^2}{u^3} (su' + cu)$$

$$v' = -\frac{\epsilon s v^3}{u^3}$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad \text{and} \quad v(0) = 1$$

where primes denote differentiation with respect to θ , and ϵ , s , and c are constants. For small ϵ show that (Nayfeh, 1966)

$$v = f + 3\epsilon c f^{-3} \ln f + O(\epsilon^2)$$

$$u = f^2 + \epsilon \left\{ f^{7/2} \left[c \cos \left(\theta + \frac{c}{s} \ln f \right) + 2s \sin \left(\theta + \frac{c}{s} \ln f \right) \right] \right. \\ \left. + c f^{-2} (6 \ln f - 1) \right\} + O(\epsilon^2)$$

where $f = (1 - 4\epsilon s \theta)^{1/4}$. Is this expansion valid for all θ ?

6.8. Consider the problem defined by (6.4.105) and (6.4.106) with constant ω_0 , p , γ , μ_i and χ_i .

(a) Determine a first-order uniform expansion for the case $K = O(1)$ and p away from ω_1 . (b) Show that this expansion is not valid when $p \approx 0$ or $2\omega_1 - \omega_2$ and determine first-order uniform expansions for these cases (Nayfeh and Saric,

1971b). (c) Determine a first-order uniform expansion for $K = O(\epsilon^2)$ and $p \approx \omega_1$ using the methods of multiple scales (Nayfeh and Saric, 1971b) and the method of averaging (Clare, 1971); then compare both results.

6.9. Use the method of multiple scales (MMS) to determine second-order uniform expansions for the problems

(a) $\epsilon y'' \mp y' + y = 0$

(b) $\epsilon y'' \mp y' = 2x$

(c) $\epsilon y'' \pm (2x + 1)y' = 1$

subject to the boundary conditions

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

6.10. Determine first-order uniform expansions for the problems

(a) $\epsilon y'' - a(x)y' + b(x)y = 0, \quad a(x) > 0$

(b) $\epsilon y'' \mp y' + y^2 = 0$

(c) $\epsilon y'' \mp yy' - y = 0$

(d) $\epsilon y'' \mp (2x + 1)y' + y^2 = 0$

(e) $\epsilon y'' \mp y' + y^n = 0; n$ is a positive integer

subject to the boundary conditions

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

6.11. Use the MMS to determine a first-order uniform expansion for the problem

$$\epsilon y'' + a(x)y' = 1$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

if $a(x)$ has a simple zero at μ in $[0, 1]$.

6.12. Use the MMS to determine a first-order uniform expansion for

$$y'' + \lambda^2(1 - x)^n f(x)y = 0$$

where n is a positive integer, $f(x) > 0$ and $\lambda \gg 1$.

6.13. Determine first-order uniform expansions for (6.4.84) of the form

(a) $u = A(\xi)cn[\eta, v(\xi)]$ and (b) $u = A(\xi)dn[\eta, v(\xi)]$.

6.14. Consider the problem

$$\ddot{u} + \omega_0^2(\epsilon t)u = \epsilon u^3 + K \cos \phi$$

where $\dot{\phi} = \omega(\epsilon t)$. Determine first-order uniform expansions for the cases

(a) $K = O(1)$ and ω away from $\omega_0, 3\omega_0$, and $\omega_0/3$

(b) $K = O(1)$ and $\omega \approx 3\omega_0$

(c) $K = O(1)$ and $\omega \approx \omega_0/3$

(d) $K = O(\epsilon)$ and $\omega \approx \omega_0$

6.15. Consider the problem defined by (6.4.105) through (6.4.107) with variable coefficients. Determine a first-order uniform expansion when $K = O(1)$ and p is away from ω_1 . Show that this expansion is not valid when $p \approx 0$ or $2\omega_1 - \omega_2$, and determine uniform expansions for these cases (Nayfeh and Saric, 1972a).

6.16. Solve Exercise 5.14 using the MMS.

6.17. Determine a first-order uniform expansion for small amplitudes for

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \dot{y} + 2x + 3x^2 + 2y^2 &= 0 \\ \ddot{y} + \dot{x} + 2\delta y + 4xy &= 0\end{aligned}$$

when $\delta \approx 1$.

6.18. Consider the problem

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} - \gamma^2 u &= \epsilon u^3 \\ u(x, 0) &= a \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0\end{aligned}$$

Determine a first-order uniform expansion when

$$c^2 k^2 \approx \gamma^2$$

6.19. Consider the equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma^2 u = \epsilon u^3$$

Use the MMS to determine first-order expansions for traveling waves if (a) the amplitude and phase vary slowly with position and time and (b) the wave number, frequency, amplitude, and phase vary slowly with position and time.

6.20. Nonlinear transverse oscillations in a homogeneous free-free beam with a nonlinear moment-curvature relationship are given by

$$w_{tt} + c^2 w_{xxxxx} = -\epsilon (w_{xx}^3)_{xx}$$

where c and ϵ are constants. Determine first-order uniform expansions for small ϵ using the MMS for the cases enumerated in Exercise 6.19.

6.21. Use the MMS to determine second-order uniform traveling wave solutions for the problem defined in Exercise 5.15 and the cases of Exercise 6.19.

6.22. Consider again Bretherton's model equation

$$\phi_{tt} + \phi_{xxxxx} + \phi_{xx} + \phi = \epsilon f(\phi, \phi_t, \phi_x)$$

but with a general nonlinear function f . Use the MMS to determine first-order uniformly valid expansions for small ϵ for the case of n th-harmonic resonance. Specialize your results for (a) second-harmonic resonance and (b) third-harmonic resonance.

6.23. Use the MMS to determine the problems defining the first-order uniform solutions for

- (a) $\epsilon u_{xx} + u_{yy} + u_x = 0$
- (b) $\epsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x)u_x = 0$
- (c) $\epsilon u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x = 0$
- (d) $\epsilon (u_{xx} + u_{yy}) + a(x, y)u_x + b(x, y)u = 0$
- (e) $\epsilon^2 \nabla^4 u + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u_y + d(x, y)u = 0$

subject to the conditions

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= F_1(x), \quad u(x, 1) = F_2(x) \\ u(0, y) &= G_1(y), \quad u(1, y) = G_2(y)\end{aligned}$$

9.7 7 Asymptotic Solutions of Linear Equations

In this chapter we describe new techniques and use some of the techniques described in the previous chapters to obtain asymptotic solutions of linear ordinary and partial differential equations. Interest here is in differential equations with variable coefficients. The approach is to utilize a small or large parameter and develop parameter perturbations or to utilize a small or large coordinate and develop coordinate perturbations.

If the point at infinity is an ordinary point or a regular singular point of an ordinary system of differential equations, convergent solutions can be obtained in inverse powers of the coordinate, except in some special cases of the regular singular problem when one of the solutions may involve the logarithm of the coordinate. Our interest in this chapter is in the irregular singular case, when the solution must be represented by an asymptotic expansion. In the parameter perturbation case, the parameter can be small or large; the first case includes the case of slowly varying coefficients. The expansions in these cases are obtained using the Liouville-Green (WKB) transformation and its generalizations. The resulting expansions are valid everywhere except at certain points called turning or transition points. Expansions valid everywhere including the turning points are obtained using Langer's transformation and its generalizations.

The discussion of partial differential equations is limited to the case of the reduced wave equation with variable index of refraction. The expansion is first developed for the case in which the index of refraction deviates slightly from a constant, using the Born-Neumann procedure, and the solution is then represented by Feynman diagrams. The resulting expansion is valid only for short distances, and its region of uniformity is extended using the renormalization technique. Then the geometrical optics approach and the method of smoothing are described.

Since these problems are linear, a vast amount of literature exists on their asymptotic solutions as well as their mathematical justification. We describe in this chapter the techniques of developing formal asymptotic expansions to the solution of the equations without any mathematical justification. Moreover, a selective number of articles is cited. For further references and mathematical rigor, the reader is referred to Erdlyi (1956), Jeffreys (1962), Cesari (1971), Bellman (1964), Wilcox (1964), Wasow (1965), Feshchenko, Shkil', and Nikolenko (1967), Wasow (1968), and Frisch (1968).

Second-order ordinary differential equations are treated first in Section 7.1, while systems of first-order ordinary differential equations are discussed in Section 7.2. Turning point problems are then taken up in Section 7.3, while the reduced wave equation is treated in Section 7.4.

9.7.1 7.1. Second-order Differential Equations

In this section we are concerned with the asymptotic development of the solutions of the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x; \epsilon) \frac{dy}{dx} + q(x; \epsilon)y = r(x; \epsilon) \quad (7.1.1)$$

where ϵ is a parameter which can be either small or large. We assume that p and q do not simultaneously vanish in the interval of interest. We discuss first the asymptotic solutions of this equation near an irregular singular point. Then we describe techniques for determining the asymptotic solutions of (7.1.1) when it contains a large parameter. Next we consider singular perturbation problems in which a small parameter multiplies the highest derivative. Finally, we describe techniques for obtaining asymptotic expansions when p , q , and r are slowly varying functions of x .

7.1.1. Expansions Near an Irregular Singularity

Let us investigate the asymptotic development of the solutions of

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (7.1.2)$$

as $x \rightarrow \infty$, if the point at infinity is an irregular singular point. Before doing so let us define a regular singular and an irregular singular point. Assume that $p(x)$ and $q(x)$ can be developed

in ascending powers of $(x - x_0)$, $x_0 < \infty$, as

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 (x - x_0)^\alpha [1 + p_1 (x - x_0) + \cdots], \quad p_0 \neq 0 \\ q(x) &= q_0 (x - x_0)^\beta [1 + q_1 (x - x_0) + \cdots], \quad q_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

The point x_0 is called an ordinary point if $\alpha \geq 0$ and $\beta \geq 0$; otherwise it is called a singular point. A singular point is called a regular singular point if $\alpha \geq -1$ and $\beta \geq -2$; otherwise it is called an irregular singular point.

The above definitions indicate that the nature of a finite point such as x_0 can be decided almost at a glance. The nature of the point at infinity can be determined by transforming it first into the origin. Thus we let $x = z^{-1}$ in (7.1.2) and obtain

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{q(z^{-1})}{z^4} y = 0 \quad (7.1.4)$$

The point at infinity is an ordinary point of the original equation if the origin is an ordinary point of the transformed equation; that is

$$\begin{aligned} \frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} &= O(1) \\ \frac{q(z^{-1})}{z^4} &= O(1) \end{aligned}$$

which correspond to

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^{-1} + O(x^{-2}) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \\ q(x) &= O(x^{-4}) \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

in the original equation. In order that infinity be a regular singular point of (7.1.2), the origin must be a regular singular point of the transformed equation; that is

$$\begin{aligned} \frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} &= O\left(\frac{1}{z}\right) \\ \frac{q(z^{-1})}{z^4} &= O\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}$$

which correspond to

$$\begin{aligned} p(x) &= O(x^{-1}) \\ q(x) &= O(x^{-2}) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Thus if $p(x)$ and $q(x)$ can be developed in descending power series of x as

$$p(x) = p_0 x^\alpha + \cdots, \quad q(x) = q_0 x^\beta + \cdots, \quad p_0 \neq 0 \quad \text{and} \quad q_0 \neq 0$$

then the point at infinity is an ordinary point if $\beta \leq -4$, and either $\alpha = -1$ with $p_0 = 2$ or $\alpha \leq -2$. In this case (7.1.2) has two convergent solutions in powers of x^{-1} . If these conditions are not satisfied, and $\alpha \leq -1$ and $\beta \leq -2$, the point at infinity is a regular singular point. In this case (7.1.2) has two convergent solutions in powers of x^{-1} of the form (Frobenius, 1875)

$$y = x^\sigma (1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots) \quad (7.1.7)$$

where σ satisfies what is called the indicial equation

$$\sigma^2 + (p_0 - 1)\sigma + q_0 = 0 \quad \text{if} \quad \alpha = -1 \quad \text{and} \quad \beta = -2$$

except in the special cases in which the roots of this equation are equal or differ by an integer, when one solution may involve $\log x$.

If one or both of the inequalities

$$\alpha > -1, \quad \beta > -2$$

is satisfied, the point at infinity is an irregular singular point. This is the case of concern to us in this section. In this case (7.1.2) can be satisfied by solutions of the form

$$y(x) = e^{\Lambda(x)} x^\sigma u(x) \quad (7.1.8a)$$

where $u(x) = O(1)$ as $x \rightarrow \infty$, which need not converge, and $\Lambda(x)$ is a polynomial in $x^{m/n}$. Letting λx^v be the leading term in $\Lambda(x)$, substituting the above solution into (7.1.2), and extracting the dominant part of each term, we obtain

$$\lambda^2 v^2 x^{2v-2} + p_0 \lambda v x^{v+\alpha-1} + q_0 x^\beta = 0 \quad (7.1.8b)$$

Therefore

$$v = \alpha + 1 \text{ or } 2v = \beta + 2 \quad (7.1.8c)$$

whichever furnishes the greater value of ν . If ν is an integer, the above solution is called a normal solution (Thom, 1883), and it has the form

$$y = \exp(\lambda_\nu x^\nu + \lambda_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \lambda_1 x) x^\sigma (1 + a_1 x^{-1} + \cdots) \quad (7.1.8d)$$

If v is not an integer, the above solution is called a subnormal solution, and Λ is a polynomial in $x^{1/2}$ while u is an ascending series in $x^{-1/2}$. So far, we have assumed that p and q are represented by power series of x so that α and β are integers. If α and β are not integers, v is a rational function which can be expressed in its lowest terms as $v = n/k$. Then the subnormal solutions have the general form

$$y = \exp(\lambda_n x^{n\tau} + \cdots + \lambda_2 x^{2\tau} + \lambda_1 x^\tau) x^\sigma (1 + a_1 x^{-\tau} + a_2 x^{-2\tau} + \cdots) \quad (7.1.8e)$$

with $\tau = k^{-1}$

To determine a normal or subnormal solution, we substitute the corresponding form of the solution into (7.1.2), equate the coefficients of like powers of x , and obtain equations which, in turn, can be solved for λ_m, σ , and a_m in succession.

Let us consider as an example the special case

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{-n}, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n} \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty \quad (7.1.9)$$

where p_n and q_n are independent of x . In this case, $y = 1$ according to (7.1.8c) and (7.1.2) and (7.1.9) have a formal asymptotic solution of the form

$$y = e^{\lambda x} x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} \quad (7.1.10a)$$

according to (7.1.8d), where λ is a root of

$$\lambda^2 + p_0 \lambda + q_0 = 0 \quad (7.1.10b)$$

on account of (7.1.8b). By substituting (7.1.10a) into (7.1.2), using (7.1.9), and equating coefficients of like powers of x , we find that

$$\sigma = -\frac{\lambda p_1 + q_1}{2\lambda + p_0} \quad (7.1.10c)$$

and we arrive at a recurrence relation for c_n .

Jacobi (1849) developed normal solutions for Bessel functions of large argument and first order, while Stokes (1857) developed them for Airy's equation. Horn (1903) gave justification for the asymptotic solutions in the form of products of exponentials and descending series in x .

7.1.2. An Expansion of the Zeroth-order Bessel Function for Large Argument

The zeroth-order Bessel function is given by

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (7.1.11)$$

Here

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 & \text{and} & & p_m &= 0 & \text{for } m \neq 1 \\ q_0 &= 1 & \text{and} & & q_m &= 0 & \text{for } m \neq 0 \end{aligned}$$

Hence (7.1.10) indicates that

$$y = e^{ix} x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{-m} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (7.1.12)$$

Substituting this expansion into (7.1.11) and equating like powers of x , we obtain the following recurrence relationship

$$c_{m+1} = -i \frac{(m + \frac{1}{2})^2}{2(m+1)} c_m \quad (7.1.13)$$

Hence if we take $c_0 = 1$

$$\begin{aligned} y = e^{ix} x^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{4 \cdot 2x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot x^3} i \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \cdots \right] \quad \text{as } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

Since the ratio of two successive terms

$$-\frac{i(2m+1)^2}{8(m+1)x} \rightarrow \infty \quad \text{as } m \rightarrow \infty$$

the right-hand side of (7.1.14) diverges for all values of x . However, for large x , it is an asymptotic expansion because the leading terms diminish very rapidly as m increases.

Another linear independent expansion $\tilde{y}$ can be obtained by replacing i by $-i$ in (7.1.14); that is

$$\begin{aligned} \tilde{y} = e^{-ix} x^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 2x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot x^2} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot x^3} i \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Real solutions can be obtained by linearly combining (7.1.14) and (7.1.15) according to

$$\begin{aligned} y_1 &\sim \frac{y + \tilde{y}}{2} = x^{-1/2}(u \cos x + v \sin x) \\ y_2 &\sim \frac{y - \tilde{y}}{2i} = x^{-1/2}(u \sin x - v \cos x) \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

where

$$u(x) = 1 - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot x^4} + \cdots \quad (7.1.17a)$$

$$v(x) = \frac{1}{4 \cdot 2x} - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot x^3} + \cdots \quad (7.1.17b)$$

Therefore the asymptotic form of the Bessel function J_0 is given by

$$J_0 \sim Ay_1 + By_2 \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (7.1.18)$$

where A and B are constants. From (7.1.16) through (7.1.18)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} J_0(x) = A \cos x + B \sin x \quad (7.1.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} J'_0(x) = -A \sin x + B \cos x \quad (7.1.20)$$

Hence

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} [J_0(x) \cos x - J'_0(x) \sin x] \quad (7.1.21)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} [J_0(x) \sin x + J'_0(x) \cos x] \quad (7.1.22)$$

However, J_0 has the integral representation (e.g., Ince, 1926, Section 8.22)

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta \quad (7.1.23)$$

Substituting this expression into (7.1.21), we obtain

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi [\cos x \cos(x \cos \theta) + \sin x \cos \theta \sin(x \cos \theta)] d\theta \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi \cos \left(2x \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^\pi \cos \left(2x \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

If we let $\sqrt{2x} \sin \theta/2 = \phi$ in the first integral, and $\sqrt{2x} \cos \theta/2 = \alpha$ in the second integral, we obtain

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_0^\infty \cos \phi^2 d\phi + \int_0^\infty \cos \alpha^2 d\alpha \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Similarly, we find that $B = 1/\sqrt{\pi}$. Therefore combining (7.1.16) and (7.1.18), we obtain

$$J_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos \left(x - \frac{1}{4}\pi \right) + v \sin \left(x - \frac{1}{4}\pi \right) \right] \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (7.1.24)$$

7.1.3. Liouville's Problem

Liouville (1837) and Green (1837) simultaneously considered the behavior of the solutions of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.1.25)$$

for large λ , where q_1 is a positive and twice continuously differentiable function and $q_2(x)$ is continuous in the interval $[a, b]$ of interest. Using the transformation

$$z = \phi(x), \quad v = \psi(x)y(x) \quad (7.1.26)$$

we change (7.1.25) into

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\phi'^2} \left(\phi'' - \frac{2\phi'\psi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \frac{1}{\phi'^2} \left[\lambda^2 q_1(x) + q_2(x) - \psi \left(\frac{\psi'}{\psi^2} \right) \right] v = 0 \quad (7.1.27)$$

Choosing ϕ and ψ such that

$$\phi'' - \frac{2\phi'\psi'}{\psi} = 0 \quad \text{and} \quad q_1 = \phi'^2 \quad (7.1.28)$$

or

$$\phi = \int [q_1(x)]^{1/2} dx, \quad \psi = [q_1(x)]^{1/4} \quad (7.1.29)$$

we reduce (7.1.27) to

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \delta v \quad (7.1.30)$$

where

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{q_1''}{q_1^2} - \frac{5}{16} \frac{q_1'^2}{q_1^3} - \frac{q_2}{q_1} \quad (7.1.31)$$

Since q_1 is twice continuously differentiable and q_2 is continuous in $[a, b]$, δ is small compared to λ^2 . Hence, to first approximation, v is the solution of (7.1.30) with $\delta = 0$; that is

$$v = a \cos \lambda z + b \sin \lambda z \quad (7.1.32)$$

where a and b are constants. Therefore, to first approximation

$$y = \frac{a \cos \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right] + b \sin \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{q_1(x)}} \quad (7.1.33)$$

If $q_1(x)$ is negative rather than positive, (7.1.33) is replaced by

$$y = \frac{a \exp \left[\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right] + b \exp \left[-\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{-q_1(x)}} \quad (7.1.34)$$

These expansions are in full agreement with those obtained in Section 6.4.3 using the method of multiple scales. It should be mentioned that these expansions break down at or near the zeros of $q_1(x)$. These zeros are called turning or transition points. Turning point problems are discussed in Section 7.3.

The transformation (7.1.26) and (7.1.29) is called the Liouville-Green transformation by mathematicians, while the solutions (7.1.33) and (7.1.34) are called the WKB approximation by physicists after Wentzel (1926), Kramers (1926), and Brillouin (1926). However, an approximate solution of this kind was obtained by Carlini (1817) for Bessel functions when the order and argument are both large.

7.1.4. Higher Approximations for Equations Containing a Large Parameter

We consider the asymptotic development of the solutions of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x, \lambda)y = 0 \quad (7.1.35)$$

for large λ when

$$q(x, \lambda) = \lambda^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(x) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty \quad (7.1.36)$$

with $q_0 \neq 0$ in the interval of interest and k a positive integer. The asymptotic solution of this problem can be sought in either of the following two formal expansions

$$y = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a_n(x) \right] \exp \left[\lambda^k \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-n} g_n(x) \right] \quad (7.1.37)$$

$$y = \exp \left[\lambda^k \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(x) \right] \quad (7.1.38)$$

The justification of these expansions was given by Horn (1899). Substituting either of these formal expansions into (7.1.35) and (7.1.36) and equating coefficients of like powers of λ , we obtain equations for the successive determination of a_n and g_n .

In the case $k = 1$ and the formal expansion (7.1.37), these equations are

$$\begin{aligned} g_0'^2 + q_0 &= 0 \\ 2g_0' a_0' + (q_1 + g_0'') a_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.1.40)$$

and

$$2g_0' a_m' + (q_1 + g_0'') a_m + \sum_{s=1}^m a_{m-s} q_{s+1} + a_{m-1}'' = 0 \quad \text{for } m \geq 1 \quad (7.1.41)$$

The solution of (7.1.39) is

$$g_0 = \pm i \int [q_0(x)]^{1/2} dx \quad (7.1.42)$$

Then the solution of (7.1.40) is

$$a_0 \propto [g_0']^{-1/2} \exp \left[- \int \frac{q_1(x)}{2g_0'(x)} dx \right]$$

which can be rewritten as

$$a_0 = c [q_0(x)]^{-1/4} \exp \pm \left[\frac{i}{2} \int \frac{q_1(x)}{[q_0(x)]^{1/2}} dx \right] \quad (7.1.43)$$

where c is a constant. Hence, to first approximation

$$y = \frac{c_1 \cos \beta(x) + c_2 \sin \beta(x)}{[q_0(x)]^{1/4}} [1 + O(\lambda^{-1})] \quad (7.1.44)$$

where c_1 and c_2 are constants and

$$\beta(x) = \lambda \int^x [q_0(x)]^{1/2} \left[1 + \frac{q_1(x)}{2\lambda q_0(x)} \right] dx \quad (7.1.45)$$

Higher approximations can be obtained by solving successively for a_m from (7.1.41).

Had we used the second formal expansion (7.1.38) instead of (7.1.37) for the same case $k = 1$, we would have obtained the following equations for the determination of g_m

$$g_0'^2 + q_0 = 0 \quad (7.1.46)$$

$$2g_0'g_m' + q_m + \sum_{s=1}^{m-1} g_s'g_{m-s}' + g_{m-1}'' = 0 \quad \text{for } m \geq 1 \quad (7.1.47)$$

The solution of (7.1.46) is given by (7.1.42), and for $m = 1$ (7.1.47) becomes whose solution is

$$2g_0'g_1' + q_1 + g_0'' = 0$$

$$g_1 = - \int \frac{q_1(x)}{2g_0'(x)} dx - \frac{1}{2} \ln g_0' \quad (7.1.48)$$

Substituting for g_0 and g_1 into (7.1.38), we obtain exactly (7.1.44) and (7.1.45).

7.1.5. A Small Parameter Multiplying the Highest Derivative

In this section we consider the equation

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \quad (7.1.49)$$

for $\epsilon \rightarrow 0$. Asymptotic expansions of the solutions of this equation have been obtained in Section 4.1.3 by using the method of matched asymptotic expansions, in Section 4.2.2 by using the method of composite expansions, and in Section 6.4.2 by using the method of multiple scales.

Using the transformation (Goldstein, 1969)

$$y = v(x) \exp \left[-\frac{M(x)}{2\epsilon} \right] \quad \text{with} \quad M = \int_{x_0}^x p(x) dx \quad (7.1.50)$$

we transform (7.1.49) into the normal form

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \left(\frac{p^2}{4\epsilon^2} + \frac{p' - 2q}{2\epsilon} \right) v = \frac{r}{\epsilon} e^{M/2\epsilon} \quad (7.1.51)$$

For $r \equiv 0$, (7.1.51) has the same form as (7.1.35) and (7.1.36), with $k = 1$, $\lambda = 1/2\epsilon$, $q_0 = -p^2$ and $q_1 = 2q - p'$. Hence the complementary solution of (7.1.51) is

$$v_c = \frac{c_1 e^{\beta(x)} + c_2 e^{-\beta(x)}}{\sqrt{p(x)}} [1 + O(\epsilon)] \quad (7.1.52)$$

where

$$\beta(x) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_0}^x p(x) \left[1 + \epsilon \frac{p' - 2q}{p^2} \right] dx = \frac{M}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \ln p - \int_{x_0}^x \frac{q(x)}{p(x)} dx \quad (7.1.53)$$

An approximate particular integral to (7.1.49) can be obtained by putting $\epsilon = 0$; that is

$$y_p = \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{p} dx \quad \text{with} \quad E = \exp \int_{x_0}^x \frac{q}{p} dx \quad (7.1.54)$$

Hence to first approximation

$$y = \frac{c_1}{E} + \frac{c_2 E}{p} e^{-M/\epsilon} + \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{p} dx \quad (7.1.55)$$

Higher approximations can be obtained by assuming an expansion of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n A_n(x) e^{-M/\epsilon} + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n B_n(x) \quad (7.1.56)$$

where

$$A_0 = \frac{c_2 E}{p}, \quad B_0 = \frac{c_1}{E} + \frac{1}{E} \int_{x_0}^x \frac{Er}{p} dx \quad (7.1.57)$$

This form is the same as that assumed when we employed the method of composite expansions in Section 4.2.2 where we determined M , as well as A_n and B_n , by substituting this expansion into the original equation and equating the coefficients of ϵ^n and $\epsilon^n \exp(-M/\epsilon)$ to zero.

For the case $p = p(x, \epsilon)$ and $q = q(x, \epsilon)$, Wasow (1965, Chapter 7) assumed an asymptotic expansion of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \exp \left[\int \lambda_1(x, \epsilon) dx \right] + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \exp \left[\int \lambda_2(x, \epsilon) dx \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n C_n(x) \quad (7.1.58)$$

where λ_1 and λ_2 are the roots of

$$\epsilon \lambda^2 + p(x, \epsilon) \lambda + q(x, \epsilon) = 0 \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (7.1.59)$$

Thus if p and q are independent of ϵ , $\lambda_1 = -p/\epsilon$ and $\lambda_2 = 0$, and (7.1.58) takes the form (7.1.56).

7.1.6. Homogeneous Problems with Slowly Varying Coefficients

In this section we consider the equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(\epsilon x; \epsilon) \frac{dy}{dx} + q(\epsilon x; \epsilon) y = 0 \quad (7.1.60)$$

where ϵ is a small parameter, and

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n p_n(\xi), \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n q_n(\xi) \quad \text{with} \quad \xi = \epsilon x \quad (7.1.61)$$

An asymptotic expansion of the general solution of (7.1.60) has the form (see Feshchenko, Shkil', and Nikolenko, 1967, for history and references)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n A_n(\xi) e^{\theta_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n B_n(\xi) e^{\theta_2} \quad (7.1.62)$$

where

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \lambda_i(\xi) \quad (7.1.63)$$

and λ_1 and λ_2 are the roots of

$$\lambda^2 + p_0(\xi)\lambda + q_0(\xi) = 0 \quad (7.1.64)$$

We have assumed that λ_1 and λ_2 are different in the interval of interest. In (7.1.62), θ_i and ξ are assumed to be independent. This is equivalent to the method of multiple scales described in the previous chapter. The derivatives are transformed according to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \\ &\quad + 2\epsilon \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \xi} + 2\epsilon \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \xi} + \epsilon \lambda_1' \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \epsilon \lambda_2' \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

where $\lambda_i' = d\lambda_i/d\xi$.

Let A and B denote the coefficients of $\exp(\theta_1)$ and $\exp(\theta_2)$. Substituting (7.1.62) into (7.1.60) and equating the coefficients of $\exp(\theta_i)$ to zero, we obtain

$$(\lambda_1^2 + \lambda_1 p + q) A + \epsilon (2\lambda_1 + p) A' + \epsilon \lambda_1' A + \epsilon^2 A'' = 0 \quad (7.1.65)$$

$$(\lambda_2^2 + \lambda_2 p + q) B + \epsilon (2\lambda_2 + p) B' + \epsilon \lambda_2' B + \epsilon^2 B'' = 0 \quad (7.1.66)$$

Letting again

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n A_n \quad \text{and} \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n B_n \quad (7.1.67)$$

in (7.1.65) and (7.1.66) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations to determine successively A_n and B_n . The first terms A_0 and B_0 are given by

$$(2\lambda_1 + p_0) A_0' + (\lambda_1' + \lambda_1 p_1 + q_1) A_0 = 0 \quad (7.1.68)$$

$$(2\lambda_2 + p_0) B_0' + (\lambda_2' + \lambda_2 p_1 + q_1) B_0 = 0 \quad (7.1.69)$$

Their solutions are

$$A_0, B_0 \propto \exp - \int \frac{\lambda_i' + \lambda_i p_1 + q_1}{2\lambda_i + p_0} d\xi \quad (7.1.70)$$

In the case of $p \equiv 0$ and $q_n = 0$ for $n \geq 1$ and

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i [q_0(\xi)]^{1/2}$$

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad B_0 = \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}$$

where a and b are constants. Therefore, to first approximation

$$y = \frac{c_1 \cos \int [q_0(\xi)]^{1/2} dx + c_2 \sin \int [q_0(\xi)]^{1/2} dx}{[q_0(\xi)]^{1/4}} \quad (7.1.71)$$

This is the Liouville-Green or WKB approximation to the solution of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q_0(\epsilon x)y = 0 \quad (7.1.72)$$

7.1.7. Reentry Missile Dynamics

For a symmetric missile the complex angle of attack is given by (Nayfeh, 1969a)

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + [ip(1+\gamma) + \frac{\dot{u}}{u} + \frac{\epsilon Q}{u} - \epsilon D] \delta \\ + \left[\gamma(p_c^2 - p^2) + ip \left(\frac{\gamma \dot{u}}{u} - \epsilon D - \epsilon M + \frac{\epsilon \gamma Q}{u} \right) \right] \delta = 0 \end{aligned} \quad (7.1.73)$$

In this equation u, Q, D , and M are slowly varying functions of time, while p and γ are constants. Hence it has the same form as (7.1.60), with

$$\begin{aligned} p_0 &= ip(1+\gamma), & p_1 &= \frac{u'}{u} + \frac{Q}{u} - D \\ q_0 &= \gamma(p_c^2 - p^2), & q_1 &= ip \left(\frac{\gamma u'}{u} - D - M + \frac{\gamma Q}{u} \right) \end{aligned} \quad (7.1.74)$$

Here primes denote differentiation with respect to the slow time $\xi = \epsilon t$, while overdots denote differentiation with respect to the fast time t . Substituting for p_0 and q_0 into (7.1.64) gives

$$\lambda^2 + ip(1+\gamma)\lambda + \gamma(p_c^2 - p^2) = 0 \quad (7.1.75)$$

Hence

$$\lambda = -\frac{1}{2}j(1+\gamma)p \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\gamma)^2 p^2 + \gamma p_c^2} \quad (7.1.76)$$

Then (7.1.70) gives

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{\omega u}} e^{-\Lambda + \Delta\Lambda}, \quad B_0 = \frac{b}{\sqrt{\omega u}} e^{-\Lambda - \Delta\Lambda} \quad (7.1.77)$$

where

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int (Q/u - D) d\xi, \quad \Delta\Lambda = \frac{p}{4} \int \frac{(\frac{u'}{u} + \frac{Q}{u} + D)(1-\gamma) + 2M}{\omega} d\xi \quad (7.1.78)$$

Therefore, to first approximation

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{\sqrt{\omega u}} \left\{ a \exp \left[-\Lambda + \Delta\Lambda - \frac{1}{2}i(1+\gamma)px + i \int \omega dx \right] \right. \\ \left. + b \exp \left[-\Lambda - \Delta\Lambda - \frac{1}{2}i(1+\gamma)px - i \int \omega dx \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.1.79)$$

Analysis of missile dynamics was performed by Fowler et al. (1920), Fowler and Lock (1921), Green and Weaver (1961), Murphy (1963), and Coakley (1968) among others.

7.1.8. Inhomogeneous Problems with Slowly Varying Coefficients

We consider in this section the asymptotic development of the general solution of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(\xi, \epsilon) \frac{dy}{dx} + q(\xi, \epsilon) y = r(\xi, \epsilon) e^{i\phi(x, \epsilon)} \quad (7.1.80)$$

where

$$\frac{d\phi}{dx} = \omega(\xi) \text{ with } \xi = \epsilon x \quad (7.1.81)$$

and

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n p_n(\xi), \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n q_n(\xi), \quad r = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n r_n(\xi) \quad (7.1.82)$$

Two cases arise depending on the values of $i\omega$ and the roots λ_1 and λ_2 of

$$\lambda^2 + p_0 \lambda + q_0 = 0 \quad (7.1.83)$$

If $i\omega = \lambda_1$ or λ_2 at one or more points in the interval of interest, we have a resonant case; otherwise we have a nonresonant case. We treat the latter case first.

The Nonresonant Case. In this case we assume that

$$y = A(\xi, \epsilon) e^{\theta_1} + B(\xi, \epsilon) e^{\theta_2} + C(\xi, \epsilon) e^{i\phi} \quad (7.1.84)$$

where

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \lambda_i(\xi) \quad (7.1.85)$$

The equations for A and B are the same as (7.1.65) and (7.1.66). To determine C , we let $y = C \exp(i\phi)$ in (7.1.80), equate the coefficients of $\exp(i\phi)$ on both sides, and obtain

$$(-\omega^2 + i\omega p + q) C + \epsilon(2i\omega + p)C' + i\epsilon\omega' C + \epsilon^2 C'' = r \quad (7.1.86)$$

Letting

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n c_n(\xi) \quad (7.1.87)$$

in (7.1.86) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations to determine c_n successively. The first one is given by

$$c_0 = \frac{r_0}{-\omega^2 + i\omega p_0 + q_0} = \frac{r_0}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} \quad (7.1.88)$$

The solution for A and B is the same as in Section 7.1.6. Therefore, to first approximation

$$\begin{aligned} y = & a \exp \left[\theta_1 - \int \frac{\lambda'_1 + \lambda_1 p_1 + q_1}{2\lambda_1 + p_0} d\xi \right] \\ & + b \exp \left[\theta_2 - \int \frac{\lambda'_2 + \lambda_2 p_1 + q_1}{2\lambda_1 + p_0} d\xi \right] \\ & + \frac{r_0}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} e^{i\phi} \end{aligned} \quad (7.1.89)$$

where a and b are constants.

The Resonant Case. The expansion (7.1.89) breaks down whenever $i\omega$ is equal to either λ_1 or λ_2 at one or more points because the last term is unbounded at such points. We assume that $i\omega$ is equal to λ_1 at one or more points while $i\omega \neq \lambda_2$ in the interval of interest. Asymptotic expansions valid in this case have been developed by Fowler et al. (1920) and Fowler and Lock (1921).

The particular solution in this case has the form

$$y = \eta(x, \epsilon)e^{i\phi} \quad (7.1.90)$$

where

$$\frac{d\eta}{dx} = [G(\xi, \epsilon) - i\omega]\eta + H(\xi, \epsilon) \quad (7.1.91)$$

Substituting (7.1.90) and (7.1.91) into (7.1.80) and equating the coefficients of each of $\eta \exp i\phi$ and $\exp i\phi$ on both sides, we obtain

$$G^2 + pG + q + \epsilon G' = 0 \quad (7.1.92)$$

$$(G + p + i\omega)H + \epsilon H' = r \quad (7.1.93)$$

Letting

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n G_n(\xi) \quad \text{and} \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n H_n(\xi) \quad (7.1.94)$$

in (7.1.92) and (7.1.93) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations for the successive determination of the G_n and H_n . The first two terms are given by

$$G_0^2 + p_0 G_0 + q_0 = 0 \quad (7.1.95)$$

$$2G_0 G_1 + p_0 G_1 + p_1 G_0 + q_1 + G_0' = 0 \quad (7.1.96)$$

$$(G_0 + p_0 + i\omega) H_0 = r_0 \quad (7.1.97)$$

$$(G_0 + p_0 + i\omega) H_1 + (G_1 + p_1) H_0 + H_0' = r_1 \quad (7.1.98)$$

Equation (7.1.95) shows that $G_0 = \lambda_1$ or λ_2 . We take $G_0 = \lambda_1$ because λ_1 is assumed to be equal to $i\omega$ at one or more points. Equation (7.1.96) gives

$$G_1 = -\frac{p_1 G_0 + G_0' + q_1}{2G_0 + p_0} \quad (7.1.99)$$

The solutions of (7.1.97) and (7.1.98) are

$$H_0 = \frac{r_0}{(G_0 + p_0 + i\omega)}, \quad H_1 = \frac{r_1 - (G_1 + p_1) H_0 - H_0'}{G_0 + p_0 + i\omega} \quad (7.1.100)$$

The general solution of (7.1.81) is then

$$y = A(\xi, \epsilon)e^{\theta_1} + B(\xi, \epsilon)e^{\theta_2} + \eta(x, \epsilon)e^{i\phi} \quad (7.1.101)$$

where A and B are determined as in Section 7.1.6.

The complementary solution of (7.1.80) can be obtained by using the following technique which is an alternative to that used in Section 7.1.6. We assume that

$$y_c = \zeta(x, \epsilon) \text{ with } \frac{d\zeta}{dx} = F(\zeta, \epsilon)\zeta \quad (7.1.102)$$

Substituting (7.1.102) into the homogeneous part of (7.1.80), we obtain

$$F^2 + pF + q + \epsilon F' = 0 \quad (7.1.103)$$

Letting

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n F_n(\xi) \quad (7.1.104)$$

in (7.1.103) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations to determine F_n . The first two are

$$\begin{aligned} F_0^2 + p_0 F_0 + q_0 &= 0 \\ 2F_0 F_1 + p_0 F_1 + p_1 F_0 + q_1 + F_0' &= 0 \end{aligned} \quad (7.1.106)$$

Equation (7.1.105) has two roots, λ_1 and λ_2 , as (7.1.64). Then (7.1.106) gives

$$F_1 = -\frac{p_1 \lambda_i + q_1 + \lambda_i'}{2\lambda_i + p_0} \quad (7.1.107)$$

Hence

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left[\lambda_i - \epsilon \frac{p_1 \lambda_i + q_1 + \lambda_i'}{2\lambda_i + p_0} + O(\epsilon^2) \right] \zeta \quad (7.1.108)$$

Integrating (7.1.108), we find that y_c is the same as that obtained in Section 7.1.6. This method of expansion is the same as that represented by (7.1.38).

7.1.9. Successive Liouville-green (wkb) Approximations

To obtain higher approximations to the solution of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2(\epsilon x)y = 0 \quad (7.1.109)$$

for small ϵ , Imai (1948) proposed the use of successive Liouville-Green (WKB) transformations. Thus we introduce the transformation

$$dx_1 = k(\epsilon x)dx, \quad y_1 = [k(\epsilon x)]^{1/2}y(x) \quad (7.1.110)$$

thereby transforming (7.1.109) into

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} + k_1^2 y_1 = 0 \quad (7.1.111)$$

where

$$k_1^2 = 1 - \frac{1}{2k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{4k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \quad (7.1.112)$$

Since k varies slowly with x , $k_1^2 \approx 1$, and an approximate solution to (7.1.111) is

$$y_1 = a \cos x_1 + b \sin x_1 \quad (7.1.113)$$

with constant a and b . Hence a first approximation to the solution of (7.1.109) is

$$y = \frac{a \cos \int k dx + b \sin \int k dx}{k^{1/2}} \quad (7.1.114)$$

To determine a second approximation to y , we note that (7.1.111) has the same form as (7.1.109). Thus an improved solution to (7.1.111) can be obtained by introducing the transformation

$$dx_2 = k_1 dx_1 \approx \left[1 - \frac{1}{4k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{8k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right] k dx \quad (7.1.115)$$

$$y_2 = y_1 \sqrt{k_1} \approx y_1 \left[1 - \frac{1}{8k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{16k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right] \quad (7.1.116)$$

Then (7.1.111) is transformed into

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} + k_2^2 y_2 = 0 \quad (7.1.117)$$

where

$$k_2^2 = 1 - \frac{1}{2k_1^3} \frac{d^2 k_1}{dx_1^2} + \frac{3}{4k_1^4} \left(\frac{dk_1}{dx_1} \right)^2 \quad (7.1.118)$$

Since $dk_1/dx_1 = k^{-1} (dk_1/dx) = O(\epsilon)$, the last two terms in (7.1.118) are small compared to 1, hence a first approximation to y_2 is

$$y_2 = a \cos x_2 + b \sin x_2 \quad (7.1.119)$$

Therefore a second approximation to y is given by

$$y = \frac{1 + \frac{1}{8k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} - \frac{3}{16k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2}{k^{1/2}} (a \cos x_2 + b \sin x_2) \quad (7.1.120)$$

where

$$x_2 = \int \left[1 - \frac{1}{4k^3} \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{3}{8k^4} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 \right] k dx \quad (7.1.121)$$

Higher approximations can be obtained in the same manner by introducing the new transformations

$$dx_{n+1} = k_n dx_n, \quad y_{n+1} = \sqrt{k_n} y_n \quad (7.1.122)$$

9.7.2 7.2. Systems of First-order Ordinary Equations

In this section we also consider first the asymptotic solutions of equations near an irregular singular point which is assumed to be ∞ . Then we discuss equations with either a small or a large parameter. Finally, we describe asymptotic expansions for equations with slowly varying coefficients.

7.2.1. Expansions Near an Irregular Singular Point

We consider the behavior of the system of n linear equations

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = x^q A(x) \mathbf{y} \quad (7.2.1)$$

as $x \rightarrow \infty$, where q is an integer ≥ -1 , and the matrix

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (7.2.2)$$

If $q = -1$, $x = \infty$ is a regular singular point of (7.2.1), while if $q > -1$, $x = \infty$ is an irregular singular point of the system. The behavior of the solution near an irregular singularity depends on whether all the eigenvalues of A_0 are distinct or not. We discuss in this section the case of distinct eigenvalues.

If (7.2.1) is a scalar equation, it can be solved explicitly and its solution has the form

$$y(x) = U(x) x^G e^{Q(x)} \quad (7.2.3)$$

where G is generally a complex constant, $Q(x)$ is a polynomial of x having the form

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } q = -1 \\ \sum_{m=1}^{q+1} Q_m x^m & \end{cases} \quad (7.2.4)$$

and

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m x^{-m} \quad (7.2.5)$$

In the case of systems of equations, the asymptotic solution still has the form (7.2.3) but G , Q_m , and U_m are constant matrices. This expansion was called a "normal" solution by Thom (1883).

To calculate the asymptotic expansions for the solutions of (7.2.1) and (7.2.2), we seek formal solutions of the form

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}(x) x^\sigma e^{\Lambda(x)} \quad (7.2.6)$$

where σ is a constant,

$$\Lambda(x) = \frac{\lambda_{q+1} x^{q+1}}{q+1} + \frac{\lambda_q x^q}{q} + \cdots + \lambda_1 x \quad (7.2.7)$$

with $\lambda_{-m} = 0$ for $m \geq 0$, and

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}_m x^{-m} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (7.2.8)$$

Here Λ is a scalar quantity, while $\mathbf{y}$ and $\mathbf{u}$ are column vectors. Substituting (7.2.6) through (7.2.8) into (7.2.1) and (7.2.2) and equating the coefficients of equal powers of x , we obtain equations to determine successively λ_n , σ , and $\mathbf{u}_n$. The first equation gives

$$(A_0 - \lambda_{q+1} I) \mathbf{u}_0 = 0, \quad I : \text{identity matrix} \quad (7.2.9)$$

For a nontrivial solution the determinant in (7.2.9) must vanish. This condition gives the following n th-order algebraic equation

$$|A_0 - \lambda_{q+1}I| = 0 \quad (7.2.10)$$

If the eigenvalues of A_0 are distinct, (7.2.10) gives n distinct values for λ_{q+1} which correspond to n linear independent solutions of the form (7.2.6).

7.2.2. Asymptotic Partitioning of Systems of Equations

Sibuya (1958) developed the following scheme for simplifying the system of equations (7.2.1) by reducing them to some special differential equations whose solutions can be found more readily than those of the original system. To accomplish this we let

$$y = P(x)v(x) \quad (7.2.11)$$

where P is an $n \times n$ nonsingular matrix to be determined and $\mathbf{v}$ is a column vector. Hence (7.2.1) is transformed into

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = x^a B(x)\mathbf{v} \quad (7.2.12)$$

where

$$B(x) = [P(x)]^{-1} \left[A(x)P(x) - x^{-q} \frac{dP(x)}{dx} \right]$$

or

$$\frac{dP(x)}{dx} = x^q [A(x)P(x) - P(x)B(x)] \quad (7.2.13)$$

The essence of the technique is to choose the matrix $P(x)$ such that the matrix $B(x)$ has a canonical Jordan form. To do this we let

$$\begin{aligned} B &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m x^{-m} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \\ P &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m x^{-m} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

where B_m represents a Jordan canonical matrix.

Substituting (7.2.14) into (7.2.13) and equating coefficients of like powers of x , we obtain

$$A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0 \quad (7.2.15)$$

$$A_0 P_m - P_m B_0 = \sum_{s=0}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - (m - q - 1) P_{m-q-1} \quad (7.2.16)$$

for $m \geq 1$, with $P_{m-q-1} = 0$ if $m - q - 1 < 0$. If A_0 has distinct eigenvalues, then P_0 can be chosen such that

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 \quad (7.2.17)$$

is diagonal. We multiply (7.2.16) from the left with P_0^{-1} to obtain

$$B_0 W_m - W_m B_0 = B_m + F_m \quad (7.2.18)$$

where

$$W_m = P_0^{-1} P_m \quad (7.2.19)$$

$$F_m = -P_0^{-1} A_m P_0 + P_0^{-1} \sum_{s=1}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - (m - q - 1) W_{m-a-1} \quad (7.2.20)$$

If we denote the components of F_m by F_m^{ij} , we choose B_m such that

$$B_m^{ii} = -F_m^{ii}, \quad B_m^{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (7.2.21)$$

Since B_0 has distinct eigenvalues, (7.2.18) with (7.2.21) can be solved to determine W_m , hence P_m , from (7.2.19).

In the case of multiple eigenvalues, we can partition the system of equations into simpler systems using the same scheme. We assume that A_0 has multiple eigenvalues and that there exists a matrix P_0 such that

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 = \begin{pmatrix} B_0^{11} & 0 \\ 0 & B_0^{22} \end{pmatrix} \quad (7.2.22)$$

where B_0^{11} has the eigenvalues $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ while B_0^{22} has the eigenvalues $\lambda_j (j = r + 1, r + 2, \dots, n)$ such that $\lambda_i \neq \lambda_j$. Let us partition W_m and F_m according to

$$W_m = \begin{pmatrix} W_m^{11} & W_m^{12} \\ W_m^{21} & W_m^{22} \end{pmatrix}, \quad F_m = \begin{pmatrix} F_m^{11} & F_m^{12} \\ F_m^{21} & F_m^{22} \end{pmatrix} \quad (7.2.23)$$

where W_m^{11} and F_m^{11} are $r \times r$ matrices while W_m^{22} and F_m^{22} are $(n - r) \times (n - r)$ matrices. We choose

$$W_m^{11} = W_m^{22} = 0 \quad \text{and} \quad B_m^{11} = -F_m^{11}, \quad B_m^{22} = -F_m^{22} \quad (7.2.24)$$

Then (7.2.18) becomes

$$\begin{aligned} B_0^{11} W_m^{12} - W_m^{12} B_0^{22} &= F_m^{12} \\ B_0^{22} W_m^{21} - W_m^{21} B_0^{11} &= F_m^{21} \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

These equations can be solved uniquely for W_m^{12} and W_m^{21} because B_0^{11} and B_0^{22} do not have common eigenvalues.

As an example, we consider Bessel's equation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (7.2.26)$$

Letting

$$y = u_1, \quad \frac{dy}{dx} = u_2 \quad (7.2.27)$$

we transform (7.2.26) into

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = A(x)\mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{n^2}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad (7.2.28)$$

Hence $q = 0$, $A_m = 0$ for $m > 2$, and

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.29)$$

Since the eigenvalues of A_0 are $\pm i$,

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (7.2.30)$$

so that

$$B_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (7.2.31)$$

Hence from (7.2.20)

$$F_1 = -P_0^{-1} A_1 P_0 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.2.32)$$

Therefore from (7.2.21) and (7.2.25) we obtain

$$B_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.33)$$

With W_1 and B_1 known

$$F_2 = -\frac{i}{8} \begin{pmatrix} -1 - 4n^2 & 2 - 4n^2 \\ -2 + 4n^2 & 1 + 4n^2 \end{pmatrix} \quad (7.2.34)$$

from (7.2.20). Hence

$$B_2 = -\frac{i(1 + 4n^2)}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = -\frac{1 - 2n^2}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.35)$$

Substituting the expressions for $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, and $\mathbf{B}_2$ into (7.2.12), we obtain

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = \left[i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i(1 + 4n^2)}{8x^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + O(x^{-3}) \right] \mathbf{v}$$

Hence

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a}{\sqrt{x}} \exp \left[ix + i \frac{1 + 4n^2}{8x} + O(x^{-2}) \right] \\ v_2 &= \frac{b}{\sqrt{x}} \exp \left[-ix - i \frac{1 + 4n^2}{8x} + O(x^{-2}) \right] \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

where a and b are constants. Since

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \frac{1}{x} P_1 + O(x^{-2}) = P_0 \left(I + \frac{1}{x} W_1 \right) + O(x^{-2}) \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{4x} \\ -\frac{i}{4x} & 1 \end{pmatrix} + O(x^{-2}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{4x} & 1 + \frac{i}{4x} \\ i - \frac{1}{4x} & -i - \frac{1}{4x} \end{pmatrix} + O(x^{-2}) \end{aligned} \quad (7.2.37)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = P\mathbf{v} &= \frac{a}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{i}{4x} \right) \exp \left[ix + i \frac{1 + 4n^2}{8x} \right] \\ &+ \frac{b}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{i}{4x} \right) \exp \left[-ix - i \frac{1 + 4n^2}{8x} \right] + O(x^{-5/2}) \end{aligned} \quad (7.2.38)$$

Note that we did not use P_2 in (7.2.37) and (7.2.38) because the error in $\mathbf{v}$ is $O(x^{-5/2})$. To compare these results with those obtained in Section 7.1.2, we expand $\exp [\pm i(1 + 4n^2)/8x]$ in powers of x^{-1} . Since

$$\begin{aligned} y = u_1 &= \frac{a}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{i}{4x} \right) \exp \left(ix + i \frac{1 + 4n^2}{8x} \right) \\ &+ \frac{b}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{i}{4x} \right) \exp \left(-ix - i \frac{1 + 4n^2}{8x} \right) + O(x^{-5/2}) \\ y &= \frac{a}{\sqrt{x}} \left(1 - i \frac{1 - 4n^2}{8x} \right) e^{ix} + \frac{b}{\sqrt{x}} \left(1 + i \frac{1 - 4n^2}{8x} \right) e^{-ix} + O(x^{-5/2}) \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

in agreement with (7.1.14) when $n = 0$. Higher approximations can be obtained by calculating the higher values of B_m and W_m in a straightforward, though tedious, way. The technique employed in Section 7.1.2 is very much easier to implement than the technique described in this section.

7.2.3. Subnormal Solutions

If A_0 of (7.2.1) has multiple eigenvalues, we cannot decouple all these equations by choosing B to be a diagonal matrix. Instead we partition this system of equations to obtain simpler systems of the form

$$\frac{d\mathbf{v}^i}{dx} = x^q B^i(x) \mathbf{v}^i, \quad B^i = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^i x^{-m} \quad (7.2.40)$$

where the eigenvalues λ_i of B_0^i are different from λ_j of B_0^j for $i \neq j$. Thus corresponding to each single eigenvalue λ_m , B^m is a scalar, and (7.2.40) can be solved. If $q = 0$

$$v^m = ax^{B_1^m} e^{B_0^m x} \left[1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{c_r}{r-1} x^{-r+1} \right] \quad (7.2.41)$$

where a is a constant and c_r are known in terms of B_r^m for $r \geq 2$. Hence a normal solution exists corresponding to this eigenvalue of the original system (7.2.1). For a multiple eigenvalue λ_s of multiplicity m_s , B^s has a rank of m_s . It turns out that this reduced m_s system of equations, hence the original system, may not have a normal solution corresponding to this eigenvalue. However, it may have what is called a subnormal solution of the form (7.2.3) through (7.2.5), but Q and U are expanded in powers of $x^{1/\tau}$ with integer r .

As an example, the equation

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16x} \right) y = 0 \quad (7.2.42)$$

has the general solution

$$y = ae^{\sqrt{x}} (x^{-3/4} - x^{-5/4}) + be^{-\sqrt{x}} (x^{-3/4} + x^{-5/4}) \quad (7.2.43)$$

which consists of two subnormal solutions. Equation (7.2.42) is equivalent to the system

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dx} &= A\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4x} + \frac{5}{16x^2} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.2.44)$$

In this case

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

has the eigenvalue $\lambda = 0$ with a multiplicity of two, which precludes the existence of normal solutions.

7.2.4. Systems Containing a Parameter

Let us consider the system of n linear equations

$$\epsilon^h \frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x, \epsilon)\mathbf{y} \quad (7.2.45)$$

where ϵ is a small positive number, h is an integer, and $A(x, \epsilon)$ is an $n \times n$ matrix which possesses the asymptotic expansion

$$A(x, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m A_m(x) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (7.2.46)$$

If h is zero or negative, $\mathbf{y}$ possesses asymptotic expansions of the form

$$\mathbf{y}(x, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \mathbf{y}_m(x) \quad (7.2.47)$$

If $h > 0$ the asymptotic expansions of the solutions of (7.2.45) depend on whether the eigenvalues of $A_0(x)$ are distinct in the whole interval of interest or not. A point at which $A_0(x)$ has multiple eigenvalues is called a turning or transition point; turning point problems are discussed in Section 7.3.

If the eigenvalues of $A_0(x)$ are distinct, the asymptotic representations of n linearly independent solutions of (7.2.45) have the form

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}(x, \epsilon) \exp \left[\int \lambda(x, \epsilon) dx \right] \quad (7.2.48)$$

where

$$\lambda(x, \epsilon) = \sum_{r=1}^h \epsilon^{-r} \lambda_r(x) \quad (7.2.49)$$

$$\mathbf{u}(x, \epsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon^r \mathbf{u}_r(x) \quad (7.2.50)$$

Substituting (7.2.48) through (7.2.50) into (7.2.45) and (7.2.46) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain equations that determine successively λ_r and $\mathbf{u}_r$. There are n linear

independent solutions of the form (7.2.48) through (7.2.50) corresponding to the n eigenvalues of $A_0(x)$; that is, the solutions of

$$|A_0(x) - \lambda_0(x)I| = 0 \quad (7.2.51)$$

7.2.5. Homogeneous Systems with Slowly Varying Coefficients

In this section we consider the asymptotic solutions of

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(\xi, \epsilon)\mathbf{y}, \quad \xi = \epsilon x \quad (7.2.52)$$

where

$$A(\xi, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m A_m(\xi) \quad \text{as} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (7.2.53)$$

In this problem x is a fast variable while ξ is a slow variable.

As in Section 7.2.2, we assume the existence of a nonsingular matrix $P_0(\xi)$ such that

$$B_0(\xi) = P_0^{-1}(\xi)A_0(\xi)P_0(\xi) = \begin{pmatrix} B_0^{11}(\xi) & 0 \\ 0 & B_0^{22}(\xi) \end{pmatrix} \quad (7.2.54)$$

where B_0^{11} has the eigenvalues $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ and B_0^{22} has the eigenvalues $\lambda_j (j = r + 1, r + 2, \dots, n)$ such that $\lambda_i \neq \lambda_j$. In this case we can reduce the original coupled system of equations (7.2.52) into two decoupled systems of orders r and $n - r$. To do this we let

$$\mathbf{y}(x, \epsilon) = P(\xi, \epsilon)\mathbf{v}(x, \epsilon) \quad (7.2.55)$$

which transforms (7.2.52) into

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = B(\xi, \epsilon)\mathbf{v} \quad (7.2.56)$$

where

$$\frac{dP}{dx} = AP - PB$$

or

$$\epsilon \frac{dP}{d\xi} = A(\xi, \epsilon)P(\xi, \epsilon) - P(\xi, \epsilon)B(\xi, \epsilon) \quad (7.2.57)$$

We seek asymptotic representations of P and B of the form

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m P_m(\xi), \quad B = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m B_m(\xi) \quad (7.2.58)$$

where B_m represents a block diagonal matrix. Substituting (7.2.58) into (7.2.57) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$\begin{aligned} A_0 P_0 - P_0 B_0 &= 0 \\ A_0 P_m - P_m B_0 &= P_0 B_m + \tilde{F}_m \end{aligned} \quad (7.2.59)$$

where

$$\tilde{F}_m = \sum_{s=1}^{m-1} (P_s B_{m-s} - A_{m-s} P_s) - A_m P_0 + \frac{dP_{m-1}}{d\xi} \quad (7.2.60)$$

As in Section 7.2.2, we choose $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{P}_0$ in accordance with (7.2.54), multiply the second of equations (7.2.59) from the left by P_0^{-1} , and use (7.2.19) to obtain

$$B_0 W_m - W_m B_0 = B_m + F_m \quad (7.2.61)$$

where

$$W_m = P_0^{-1} P_m, \quad F_m = P_0^{-1} \tilde{F}_m \quad (7.2.62)$$

To solve (7.2.61) we partition F_m and W_m according to

$$F_m = \begin{pmatrix} F_m^{11} & F_m^{12} \\ F_m^{21} & F_m^{22} \end{pmatrix}, \quad W_m = \begin{pmatrix} W_m^{11} & W_m^{12} \\ W_m^{21} & W_m^{22} \end{pmatrix} \quad (7.2.63)$$

where F_m^{11} and W_m^{11} are $r \times r$ matrices. If we choose

$$W_m^{11} = W_m^{22} = 0 \quad \text{and} \quad B_m^{11} = -F_m^{11}, \quad B_m^{22} = -F_m^{22} \quad (7.2.64)$$

(7.2.61) becomes

$$B_0^{11} W_m^{12} - W_m^{12} B_0^{22} = F_m^{12} \quad (7.2.65)$$

$$B_0^{22} W_m^{21} - W_m^{21} B_0^{11} = F_m^{21} \quad (7.2.66)$$

These equations can be solved uniquely for W_m^{12} and W_m^{21} since B_0^{11} and B_0^{22} do not have common eigenvalues.

If A_0 has distinct eigenvalues, one can use the above scheme to reduce the original system to an uncoupled system of n equations having the form (7.2.56) with B a diagonal matrix. The details are the same as in Section 7.2.2.

An easier technique can be used to determine the asymptotic solutions of the system (7.2.52) if A_0 has distinct eigenvalues. The asymptotic representation has the form

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}(\xi, \epsilon) e^{\theta(x, \epsilon)} \quad (7.2.67)$$

where

$$\mathbf{u}(\xi, \epsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon^s \mathbf{u}_s(\xi) \quad (7.2.68)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \lambda(\xi) \quad (7.2.69)$$

where $\lambda(\xi)$ is an eigenvalue of $A_0(\xi)$. There are n linearly independent solutions of the form (7.2.67) corresponding to the n eigenvalues of A_0 . Substituting (7.2.67) through (7.2.69) into (7.2.52) and (7.2.53) gives equations that determine $\mathbf{u}_m$ successively.

9.7.3 7.3. Turning Point Problems

We found in Section 7.1.3 that the Liouville-Green or WKB approximation to the solutions of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.3.1)$$

for large λ is

$$y = \frac{a_1 \cos \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right] + b_1 \sin \left[\lambda \int \sqrt{q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{q_1(x)}} \quad (7.3.2)$$

for positive $q_1(x)$ and

$$y = \frac{a_2 \exp \left[\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right] + b_2 \exp \left[-\lambda \int \sqrt{-q_1(x)} dx \right]}{\sqrt[4]{-q_1(x)}} \quad (7.3.3)$$

for negative $q_1(x)$. As remarked in Section 7.1.3, these approximations are valid as long as x is away from the zeros of $q_1(x)$. Equations (7.3.2) and (7.3.3) show that y is oscillatory on one side of a zero of $q_1(x)$ while it is exponential on the other side, hence such a zero is called a transition point. It is also called a turning point because in classic mechanics it is the point at which the kinetic energy of an incident particle is equal to its potential energy and the particle therefore reverses direction. The point $x = \mu$ is called a turning point or a transition point of order α where α is the order of the zero of $q_1(x)$ at $x = \mu$. If $q_2(x)$ is singular at a turning point, the turning point is called a singular turning point; otherwise it is regular. In this section we describe techniques for determining the asymptotic solutions of turning point problems starting with second-order equations such as (7.3.1).

7.3.1. The Method of Matched Asymptotic Expansions

Let us assume that $q_2(x)$ is a regular function while

$$q_1(x) = (x - \mu)f(x) \text{ with positive } f(x) \quad (7.3.4)$$

Hence the approximate solution to (7.3.1) is given by (7.3.2) for $x > \mu$ and by (7.3.3) for $x < \mu$. These expansions are called outer expansions and break down near $x = \mu$. To determine the region of nonuniformity of these expansions, we let $\xi = (x - \mu)\lambda^\nu$ with positive ν in (7.3.1) and obtain

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \{ \lambda^{2-3\nu} \xi f[\mu + \xi \lambda^{-\nu}] + \lambda^{-2\nu} q_2[\mu + \xi \lambda^{-\nu}] \} y = 0 \quad (7.3.5)$$

As $\lambda \rightarrow \infty$ the third term in (7.3.5) tends to zero for all positive ν ; however, the resulting equation depends on the value of ν . As $\lambda \rightarrow \infty$ (7.3.5) tends to

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ if } v < \frac{2}{3} \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} &= 0 \text{ if } v > \frac{2}{3} \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi f(\mu) y &= 0 \text{ if } v = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

It is obvious that the first two limits are not acceptable because their solutions do not match the outer expansions (7.3.2) and (7.3.3). Therefore the acceptable limit is the distinguished limit with $\nu = 2/3$ yielding the third equation in (7.3.6). If we let

$$z = -\xi \sqrt[3]{f(\mu)} \quad (7.3.7)$$

the first-order inner solution is governed by

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - zy = 0 \quad (7.3.8)$$

Its general solution is

$$y = a_3 Ai(z) + b_3 Bi(z) \quad (7.3.9)$$

where $Ai(z)$ and $Bi(z)$ are the Airy functions of the first and second kind, respectively.

Let us now digress to give some properties of the Airy functions which we will need in the ensuing discussion. These functions have the following integral representations see (e.g., Erdlyi, 1956, Section 4.6)

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) dt \quad (7.3.10)$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + zt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) \right] dt \quad (7.3.11)$$

These functions can also be related to Bessel functions of order $1/3$ according to

$$Ai(z) = \frac{1}{3}\sqrt{z} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3}(\zeta) \quad (7.3.12)$$

$$Bi(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)] \quad (7.3.13)$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{3}\sqrt{z} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)] \quad (7.3.14)$$

$$Bi(-z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)] \quad (7.3.15)$$

where $\zeta = (2/3)z^{3/2}$. For large positive z these functions have the following asymptotic expansions

$$Ai(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\zeta} \quad (7.3.16)$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7.3.17)$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{\zeta} \quad (7.3.18)$$

$$Bi(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7.3.19)$$

To match the inner solution (7.3.9) with the outer solution (7.3.2), we express the latter in terms of $\xi = (x - \mu)\lambda^{2/3}$ and determine its limit as $\lambda \rightarrow \infty$. In this case $x > \mu$ and

Hence

$$y = \frac{\lambda^{1/6}}{\sqrt[4]{\xi f(\mu)}} \left[a_1 \cos \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} \right) + b_1 \sin \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} \right) \right] + \dots \quad (7.3.20)$$

Expressing (7.3.9) in terms of ξ , we obtain

$$y = a_3 Ai(-\xi \sqrt[3]{f(\mu)}) + b_3 Bi(-\xi \sqrt[3]{f(\mu)})$$

Its expansion for large ξ , obtained by using (7.3.17) and (7.3.19), is

$$y = \frac{\xi^{-1/4} f^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \sin \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_3 \cos \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \dots \quad (7.3.21)$$

Since the matching principle demands that (7.3.20) and (7.3.21) be equal, we obtain

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \sin \frac{\pi}{4} + b_3 \cos \frac{\pi}{4} \right] \\ b_1 &= \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \left[a_3 \cos \frac{\pi}{4} - b_3 \sin \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

Hence (7.3.2) becomes

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{q_1(x)}} \left\{ \tilde{b}_3 \cos \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] + \tilde{a}_3 \sin \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (7.3.23)$$

where

$$(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3) = \frac{\lambda^{-1/6} f^{1/6}}{\sqrt{\pi}} (a_3, b_3)$$

To match (7.3.9) with the outer solution (7.3.3), we note that

$$\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau = \lambda \int_x^{\mu} \sqrt{(\mu - \tau) f(\tau)} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} + \dots$$

Hence (7.3.3) becomes

$$y = \frac{\lambda^{1/6}}{\sqrt[4]{-f(\mu)} \xi} \left\{ a_2 \exp \left[\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right] + b_2 \exp \left[-\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right] \right\} + \dots \quad (7.3.24)$$

Since ξ is negative in this case, $z = -\xi \sqrt[3]{f(\mu)}$ is positive, and the asymptotic behavior of the inner solution (7.3.9) for large z , obtained from (7.3.16) and (7.3.18), is

$$\begin{aligned} y &= \frac{(-\xi)^{-1/4} f^{-1/12}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2} a_3 \exp \left(-\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right) \right. \\ &\quad \left. + b_3 \exp \left(\frac{2}{3} \sqrt{f(\mu)} (-\xi)^{3/2} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

Equating (7.3.24) and (7.3.25), we obtain

$$(a_2, b_2) = \left(\tilde{b}_3, \frac{1}{2} \tilde{a}_3 \right) \quad (7.3.26)$$

Hence the outer solution (7.3.3) for negative $q_1(x)$ is

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{-q_1(x)}} \left[\tilde{b}_3 \exp \left(\lambda \int_x^\mu \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right) + \frac{1}{2} \tilde{a}_3 \exp \left(-\lambda \int_x^\mu \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right) \right] \quad (7.3.27)$$

Therefore an approximate solution to (7.3.1) with a turning point at $x = \mu$ is given by the three separate expansions: (7.3.9) near the turning point, (7.3.23) for $x > \mu$, and (7.3.27) for $x < \mu$. The matching provided the connection between the constants a_1 and b_1 , and a_2 and b_2 . This connection was first given by Rayleigh (1912) in his investigation of the total reflection of sound waves from a transition layer, and he presented an explicit solution for the exponentially decreasing solution only. Gans (1915) gave connection formulas for both solutions, and Jeffreys (1924) rediscovered them in an application to Mathieu's function. Wentzel (1926), Kramers (1926), and Brillouin (1926) rediscovered them about the same time in their investigations of the Schrödinger equation. Thus in the physics literature this method is usually named with some permutation of the letters W , K , and B , and recently the letter J has been added to these letters for the contribution of Jeffreys.

Zwaan (1929) established the connection formulas by integration along a path in the complex plane that avoids the turning point. This technique was developed further by Kemble (1935).

A disadvantage of this technique is the fact that the solution is given by three different expansions. A single expansion uniformly valid for all x was obtained in Section 6.4.4 by using the method of multiple scales. In the next section we discuss a powerful technique of treating turning point problems originated by Langer (1931, 1934) and developed by Langer and several researchers as indicated in Sections 7.3.2 through 7.3.10.

7.3.2. The Langer Transformation

The gist of Langer's approach is that approximately identical equations have approximately identical solutions. He realized that any attempt to express the asymptotic expansions of the solutions of turning point problems in terms of elementary functions must fail in regions containing the turning points. A uniformly valid expansion for all x must be expressed in terms of nonelementary functions which have the same qualitative features as the solutions of the equation.

The decisive step in Langer's approach is to introduce a transformation of the dependent and independent variables of the form

$$z = \phi(x), \quad v = \psi(x)y(x) \quad (7.3.28)$$

which transforms

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0 \quad (7.3.29)$$

into

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\phi'^2} \left(\phi'' - \frac{2\phi'\psi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \frac{1}{\phi'^2} \left[\lambda^2 q_1(x) + q_2(x) - \psi \left(\frac{\psi'}{\psi^2} \right) \right] v = 0 \quad (7.3.30)$$

The middle term vanishes if

$$\psi = \sqrt{\phi'} \quad (7.3.31)$$

leaving

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \left[\lambda^2 \frac{q_1}{\phi'^2} + \frac{q_2}{\phi'^2} + \frac{3}{4} \frac{\phi''^2}{\phi'^4} - \frac{1}{2} \frac{\phi'''}{\phi'^3} \right] v = 0 \quad (7.3.32)$$

If we choose

$$\frac{q_1}{\phi'^2} = 1 \quad \text{or} \quad \phi = \int \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \quad (7.3.33)$$

we recover the Liouville-Green transformation. The resulting solution is expressed in terms of the circular functions as in Section 7.1.3, and it is singular at the turning points (zeros of q_1). Since $\psi = \sqrt{\phi'}$ and $\phi' = \sqrt{q_1}$, $\psi = \sqrt[4]{q_1}$ and the transformation (7.3.28) is singular at the zeros of $q_1(x)$.

To obtain a uniformly valid expansion for a problem with a turning point at $x = \mu$ such that

$$q_1(x) = (x - \mu)f(x) \quad \text{with} \quad f(x) > 0 \quad (7.3.34)$$

we follow Langer (1931, 1934) by choosing

$$\frac{q_1}{\phi'^2} = \phi \quad (7.3.35)$$

so that (7.3.32) becomes

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 zv = \delta v \quad (7.3.36)$$

where

$$\delta = -\frac{q_2}{\phi'^2} - \frac{3}{4} \frac{\phi''^2}{\phi'^4} + \frac{1}{2} \frac{\phi'''}{\phi'^3} \quad (7.3.37)$$

The solution of (7.3.35) is

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \phi^{3/2} &= \int_{\mu}^x \sqrt{(\tau - \mu)f(\tau)} d\tau \quad \text{for} \quad x \geq \mu \\ \frac{2}{3} (-\phi)^{3/2} &= \int_x^{\mu} \sqrt{(\mu - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{for} \quad x \leq \mu \end{aligned} \quad (7.3.38)$$

As $x \rightarrow \mu$, $\phi \rightarrow \sqrt[3]{f(\mu)}(x - \mu)$ and $\psi \rightarrow \sqrt[6]{f(\mu)}$, hence $\delta = O(1)$ if q_2 is continuous. Moreover, the transformation (7.3.28) is regular everywhere including the turning point $x = \mu$. Since $\delta = O(1)$ and λ is large, v is given approximately by what Langer calls the related equation

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 zv = 0 \quad (7.3.39)$$

whose solution is

$$v = c_1 Ai(-\lambda^{2/3}z) + c_2 Bi(-\lambda^{2/3}z) \quad (7.3.40)$$

where c_1 and c_2 are constants of integration. Hence, to first approximation

$$y = \frac{1}{\sqrt{\phi'(x)}} \{c_1 Ai[-\lambda^{2/3}\phi(x)] + c_2 Bi[-\lambda^{2/3}\phi(x)]\} \quad (7.3.41)$$

where ϕ is defined in (7.3.38).

This single expansion is uniformly valid for all x including the neighborhood of the turning point $x = \mu$. Using the asymptotic expansions (7.3.16) through (7.3.19) for large argument of the Airy functions Ai and Bi , we obtain

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{q_1(x)}} \left\{ c_1 \sin \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] + c_2 \cos \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \text{ for } x > \mu \quad (7.3.42)$$

and

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{-q_1(x)}} \left(\frac{c_1}{2} \exp \left[-\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right] + c_2 \exp \left[\lambda \int_x^{\mu} \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau \right] \right) \text{ for } x < \mu \quad (7.3.43)$$

in agreement with the results of the previous section.

Olver (1954) generalized Langer's transformation to the form

$$\begin{aligned} y &= \chi^{-1/4} v \\ \zeta &= \zeta(z) = \int^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \\ \chi &= \frac{q_1(x)}{\zeta'^2} \end{aligned} \quad (7.3.44)$$

where the independent variable z is still any undefined function of x . With this transformation (7.3.29) becomes

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \zeta'^2 v = \delta v \quad (7.3.45)$$

where

$$\delta = -\frac{q_2}{\chi} - \chi^{-3/4} \frac{d^2 (\chi^{-1/4})}{dx^2} \quad (7.3.46)$$

If we can choose $\zeta(z)$ such that $\delta = O(1)$, then the related equation

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \zeta'^2 v = 0 \quad (7.3.47)$$

has solutions which are asymptotically equivalent to the solutions of (7.3.29) for large λ . In order for δ to be $O(1)$, χ must be regular and not vanish in the interval of interest. Consequently, ζ must be chosen so that ζ'^2 has zeros and singularities of the same order and at the same places as those of $q_1(x)$ so that ζ'^2 and $q_1(x)$ are positive or negative together. Moreover, it is desirable to choose ζ'^2 so that the related equation (7.3.47) is solvable in terms of known functions. This general transformation was rediscovered by Moriguchi (1959).

If

$$q_1(x) = (x - \mu)f(x) \quad \text{with} \quad f(x) > 0, \quad \zeta'^2 = \pm z \quad (7.3.48)$$

which yields Langer's transformation.

7.3.3. Problems with Two Turning Points

We consider the case in which

$$q_1(x) = (x - \mu_1)(\mu_2 - x)f(x), \quad \mu_2 > \mu_1 \quad \text{and} \quad f(x) > 0 \quad (7.3.49)$$

so that (7.3.29) has two simple turning points at $x = \mu_1$ and μ_2 . Such problems with two turning points arise, for example, in the solutions of the Schrödinger equation (e.g., Jeffreys, 1962; Pike, 1964) for tunneling or classic oscillator problems and in the determination of heat transfer in a duct (e.g., Jakob, 1949, pp. 451-480).

Applying the results of the previous section to the turning point $x = \mu_1$, we obtain

$$y = \frac{1}{\sqrt{\phi_1'(x)}} \{a_1 Ai[-\lambda^{2/3}\phi_1(x)] + b_1 Bi[-\lambda^{2/3}\phi_1(x)]\} \quad (7.3.50)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\phi_1^{3/2} &= \int_{\mu_1}^x \sqrt{(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{for } x > \mu_1 \\ \frac{2}{3}(-\phi_1)^{3/2} &= \int_x^{\mu_1} \sqrt{(\mu_1 - \tau)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{for } x < \mu_1 \end{aligned} \quad (7.3.51)$$

However, as $x \rightarrow \mu_2$, $\phi_1' = O[(x - \mu_2)^{1/2}]$. Therefore (7.3.50) breaks down in the neighborhood of $x = \mu_2$, and it is valid for $\mu_2 - x > \delta_2$ where δ_2 is a positive small quantity.

Applying the results of the previous section to the turning point $x = \mu_2$, we obtain

$$y = \frac{1}{\sqrt{\phi_2'(x)}} \{a_2 Ai[-\lambda^{2/3}\phi_2(x)] + b_2 Bi[-\lambda^{2/3}\phi_2(x)]\} \quad \text{for } x - \mu_1 > \delta_1 \quad (7.3.52)$$

where δ_1 is a small positive number, and

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\phi_2^{3/2} &= \int_x^{\mu_2} \sqrt{(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau \quad \text{for } x < \mu_2 \\ \frac{2}{3}(-\phi_2)^{3/2} &= \int_{\mu_2}^x \sqrt{(\tau - \mu_1)(\tau - \mu_2)f(\tau)} d\tau \quad \text{for } x > \mu_2 \end{aligned} \quad (7.3.53)$$

Since both (7.3.50) and (7.3.52) are valid in the interval $\mu_1 + \delta_1 < x < \mu_2 - \delta_2$, we can connect these expansions by matching. Expanding (7.3.50) for large argument and for $x > \mu_1$, using (7.3.17) and (7.3.19), we obtain

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}[(x - \mu_1)(\mu_2 - x)f(x)]^{1/4}} \left[a_1 \sin\left(\frac{2}{3}\lambda\phi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2}{3}\lambda\phi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (7.3.54)$$

Similarly, expanding (7.3.52) for large argument for $x < \mu_2$, we obtain

$$y = \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}[(x - \mu_1)(\mu_2 - x)f(x)]^{1/4}} \left[a_2 \sin\left(\frac{2}{3}\lambda\phi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + b_2 \cos\left(\frac{2}{3}\lambda\phi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (7.3.55)$$

Equating (7.3.54) and (7.3.55) gives

$$\begin{aligned} a_1 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \phi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_1 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \phi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ = a_2 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \phi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + b_2 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \phi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (7.3.56)$$

If we let

$$\Delta = \frac{2}{3} \lambda \left(\phi_1^{3/2} + \phi_2^{3/2} \right) + \frac{\pi}{2} = \lambda \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau)f(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{2} \quad (7.3.57)$$

then

$$\frac{2}{3} \lambda \phi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4} = \Delta - \left(\frac{2}{3} \lambda \phi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

hence from (7.3.56)

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 \sin \Delta - a_2 \cos \Delta \\ b_1 &= a_2 \sin \Delta + b_2 \cos \Delta \end{aligned} \quad (7.3.58)$$

Now if y is a bounded function of x , as is the case in solutions of the Schrödinger equation, b_1 and $b_2 = 0$ because $\text{Bi}(z) \rightarrow \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp \left[(2/3) z^{3/2} \right]$ as $z \rightarrow \infty$. Hence from the second equation of (7.3.58)

$$\sin \Delta = 0 \quad \text{or} \quad \Delta = n\pi \quad \text{with } n \text{ an integer} \quad (7.3.59)$$

Therefore from (7.3.57)

$$\lambda = \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi}{\int_{\mu_1}^{\mu_2} [(\tau - \mu_1)(\mu_2 - \tau)f(\tau)]^{1/2} d\tau} \quad (7.3.60)$$

Rather than representing the solution by two expansions, Miller and Good (1953), Kazari-noff (1958), and Langer (1959b) suggested expressing the solution by a single uniformly valid expansion using parabolic cylinder functions. Using the transformation (7.3.44), we choose ζ'^2 so that it has two simple zeros. We take those to be $z = \pm 1$ with $z = -1$ corresponding to $x = \mu_1$, and we let (Pike, 1964)

$$\zeta'^2 = 4a^2 (1 - z^2) \quad (7.3.61)$$

We choose a so that $z = 1$ corresponds to $x = \mu_2$. Thus from (7.3.44) we obtain

$$\zeta = 2a \int_{-1}^z \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \int_{\mu_1}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \quad (7.3.62)$$

where the branches of the square roots should be chosen so that z is a regular function of x and the regions where $q_1(x) > 0$ and $q_1(x) < 0$ transform into $z^2 < 1$ and $z^2 > 1$, respectively. Choosing $z = 1$ to correspond to $x = \mu_2$, we obtain the following equation for a

Hence

$$2a \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau$$

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \quad (7.3.63)$$

With (7.3.61) the related equation is

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + 4a^2 \lambda^2 (1 - z^2) v = 0 \quad (7.3.64)$$

whose solutions are given by

$$v = W_\nu(2\sqrt{a\lambda}z), \quad v + \frac{1}{2} = a\lambda \quad (7.3.65)$$

where W_ν is Weber's function of order ν . If y is bounded at infinity, v must be bounded, hence $v = n$ where n is an integer. Therefore

$$\lambda = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau} \quad (7.3.66)$$

in agreement with (7.3.60).

Problems with two turning points have also been analyzed by Olver (1959), and Moriguchi (1959). Several turning point problems were treated by Evgrafov and Fedoryuk (1966), Hsieh and Sibuya (1966), Sibuya (1967), and Lynn and Keller (1970) among others.

7.3.4. Higher-order Turning Point Problems

In this section we let

$$q_1 = (x - \mu)^\alpha f(x), \quad f(x) > 0 \quad \text{and} \quad \alpha \text{ is a positive real number} \quad (7.3.67)$$

To determine a single uniformly valid expansion, we let $\zeta'^2 = z^\alpha$ so that ζ'^2 has the same number of zeros as q_1 . Hence

$$\zeta = \frac{2}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \quad (7.3.68)$$

where the branches of the square root are chosen so that the regions where $q_1(x) > 0$ and $q_1(x) < 0$ correspond to $z^\alpha > 0$ and $z^\alpha < 0$, respectively. This transformation leads to the related equation (Langer, 1931)

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 z^\alpha v = 0 \quad (7.3.69)$$

The solution of (7.3.69) is

$$v = z^{1/2} \left\{ c_1^* J_\nu \left[\frac{2\lambda}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/2} \right] + c_2^* J_{-\nu} \left[\frac{2\lambda}{2 + \alpha} z^{(\alpha+2)/2} \right] \right\} \quad (7.3.70)$$

where $\nu = (2 + \alpha)^{1/2}$. Hence, to first approximation

$$y = \frac{\left[\int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^\alpha f(\tau)]^{1/2} d\tau \right]^{1/2}}{[(x - \mu)^\alpha f(x)]^{1/4}} \left\{ c_1 J_\nu \left[\lambda \int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^\alpha f(\tau)]^{1/2} d\tau \right] + c_2 J_{-\nu} \left[\lambda \int_{\mu}^x [(\tau - \mu)^\alpha f(\tau)]^{1/2} d\tau \right] \right\} \quad (7.3.71)$$

McKelvey (1955) expressed the asymptotic solutions of a second-order turning point problem (i.e., $\alpha = 2$) in terms of Whittaker's functions. A second-order turning point problem arises in the diffraction by elliptic cylinders whose eccentricities are almost unity (Goodrich and Kazarinoff, 1963), and in the solution of the Schrödinger equation (Voss, 1933). The first analysis of a second-order turning point problem was given by Goldstein (1931) using the method of matched asymptotic expansions as described in Section 7.3.1.

7.3.5. Higher Approximations

So far in our presentation, only the first term in the asymptotic expansion has been obtained. There are four different approaches for the determination of the higher-order terms.

Langer's Approach. The gist of this approach is always to relate the solution of the equation to be solved to that of some simpler but structurally similar problem that can be solved explicitly in terms of transcendental functions (Langer, 1949). The drawback to this approach is that it is unsuitable for numerical calculations because the coefficients of the asymptotic expansions are functions of the independent variable as well as the perturbation parameter. Moreover, the expansions are established using several transformations. Equivalent expansions can be obtained in an easier way by using Olver's approach as indicated later.

Cherry's Approach. In 1949 and 1950, Cherry developed a technique for obtaining the higher-order terms of a simple turning point problem, which has been transformed using the Langer transformation (Section 7.3.2) into

$$\frac{d^2v}{dz^2} + [-\lambda^2 z + \lambda g(z, \lambda)] v = 0 \quad (7.3.72)$$

where

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(z) \quad (7.3.73)$$

In Cherry's analysis all g_n with even n are missing. We assume a formal expansion of the form

$$v = A(z; \lambda) \zeta_i [\lambda^{2/3} \phi(z; \lambda)], \quad i = 1, 2$$

where ζ_1 and ζ_2 are the Airy functions of the first and second kind, respectively. Since

$$\frac{d^2v}{dz^2} = A'' \zeta_i + (2A' \phi' + A \phi'') \frac{d\zeta_i}{d\phi} + A \phi'^2 \frac{d^2 \zeta_i}{d\phi^2} \quad (7.3.74)$$

and

$$\frac{d^2 \zeta_i}{d\phi^2} = \lambda^2 \phi \zeta_i$$

(7.3.72) becomes

$$(A'' + \lambda^2 \phi \phi'^2 A - \lambda^2 z A + \lambda g A) \zeta_i + (2A' \phi' + A \phi'') \frac{d\zeta_i}{d\phi} = 0 \quad (7.3.75)$$

Equating the coefficients of ζ_i and $d\zeta_i/d\phi$ to zero, we obtain

$$\begin{aligned} 2A' \phi' + A \phi'' &= 0 \\ \lambda^2 (\phi \phi'^2 - z) + \lambda g + \frac{A''}{A} &= 0 \end{aligned} \quad (7.3.77)$$

From (7.3.76)

$$A = \frac{1}{\sqrt{\phi'}} \quad (7.3.78)$$

hence (7.3.77) becomes

$$\lambda^2 (\phi \phi'^2 - z) + \lambda g + \frac{3}{4} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2 - \frac{\phi'''}{2\phi'} = 0 \quad (7.3.79)$$

To solve this equation we let

$$\phi = z + \lambda^{-1} \phi_1(z) + \lambda^{-2} \phi_2(z) + \cdots \quad (7.3.80)$$

and equate coefficients of like powers of λ to obtain equations for the successive determination of ϕ_n . The first two equations are

$$\begin{aligned} 2z\phi'_1 + \phi_1 + g_0 &= 0 \\ 2z\phi'_2 + \phi_2 &= -g_1 - z\phi_1'^2 - 2\phi_1\phi_1' \end{aligned} \quad (7.3.81)$$

whose solutions are

$$\begin{aligned} \sqrt{z}\phi_1 &= - \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \\ \sqrt{z}\phi_2 &= - \int_0^z \frac{g_1(\tau) + \tau\phi_1'^2(\tau) + 2\phi_1(\tau)\phi_1'(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (7.3.82)$$

The lower limit in these expressions was chosen so that ϕ_1 and ϕ_2 are regular at $z = 0$. Therefore v is given by the formal expansion

$$\begin{aligned} v &= \frac{\zeta_i(\lambda^{2/3}\phi)}{\sqrt{\phi'}} \\ \phi(z; \lambda) &= z + \lambda^{-1}\phi_1(z) + \lambda^{-2}\phi_2(z) + \cdots \end{aligned} \quad (7.3.83)$$

This formal expansion is a uniform approximation to the solution of the original problem except in small neighborhoods of the zeros of v , where Cherry used the following modified formula

$$v = Ai(\lambda^{2/3}z) (1 + \lambda^{-2}a_1 + \lambda^{-4}a_2 + \cdots) + \frac{dAi}{dz}(\lambda^{2/3}z) (\lambda^{-2}b_1 + \lambda^{-4}b_2 + \cdots) \quad (7.3.84)$$

If

$$\lambda g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} g_{2n}(z)$$

a_n and b_n are determined from (7.3.83) by expanding ϕ' and $Ai(\lambda^{2/3}\phi)$ about $\phi = z$ and using the relation $d^2 Ai/dz^2 = \lambda^2 z Ai$.

Olver's Approach. Olver (1954) proposed to determine a complete asymptotic expansion by assuming that

$$v = A(z; \lambda) \zeta_i(\lambda^{2/3}z) + B(z; \lambda) \zeta_i'(\lambda^{2/3}z) \quad (7.3.85)$$

This form is the same as the final form of the expansion obtained by Langer (1949) and the modified formula (7.3.84) of Cherry. This expansion can also be regarded as an application of the method of composite expansions described in Section 4.2.

Since

$$\begin{aligned}\zeta_i'' &= \lambda^2 z \zeta_i, & v' &= A' \zeta_i + (A + B') \zeta_i' + B \zeta_i'' \\ & & &= (A' + \lambda^2 z B) \zeta_i + (A + B') \zeta_i'\end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}v'' &= (A'' + \lambda^2 B + \lambda^2 z B') \zeta_i + (2A' + \lambda^2 z B + B'') \zeta_i' + (A + B') \zeta_i'' \\ &= [A'' + \lambda^2 B + \lambda^2 z (A + 2B')] \zeta_i + (2A' + \lambda^2 z B + B'') \zeta_i'\end{aligned}$$

Consequently, (7.3.72) becomes

$$(A'' + \lambda^2 B + 2\lambda^2 z B' + \lambda g A) \zeta_i + (2A' + B'' + \lambda g B) \zeta_i' = 0 \quad (7.3.86)$$

Equating the coefficients of ζ_i and ζ_i' to zero, we obtain

$$\begin{aligned}2A' + B'' + \lambda g B &= 0 \\ A'' + \lambda^2 B + 2\lambda^2 z B' + \lambda g A &= 0\end{aligned} \quad (7.3.87)$$

These equations are satisfied by formal expansions of the form

$$\begin{aligned}A &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(z) \\ B &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(z)\end{aligned} \quad (7.3.88)$$

where

$$\begin{aligned}2A_0' + g_0 B_1 &= 0 \\ 2z B_1' + B_1 + g_0 A_0 &= 0\end{aligned} \quad (7.3.89)$$

$$2A_n' + g_0 B_{n+1} = - \sum_{m=1}^n g_m B_{n-m+1} = \alpha_n, \quad n \geq 1$$

$$2z B_{n+1}' + B_{n+1} + g_0 A_n = -A_{n-1}'' - \sum_{m=1}^n g_m A_{n-m} = \beta_n, \quad n \geq 1 \quad (7.3.90)$$

The solution of (7.3.89) is

$$\begin{aligned}A_0 &= \cosh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \\ B_1 &= - \frac{\sinh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau}{\sqrt{z}}\end{aligned} \quad (7.3.91)$$

hence the solution of (7.3.90) is

$$\begin{aligned}
 A_n &= a_n(z) \cosh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau + b_n(z) \sinh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \\
 \sqrt{z} B_{n+1} &= -a_n(z) \sinh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau - b_n(z) \cosh \int_0^z \frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau
 \end{aligned} \tag{7.3.92}$$

where

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \int_0^z [\alpha_n(\tau) A_0(\tau) - \beta_n(\tau) B_1(\tau)] d\tau \\
 b_n &= \frac{1}{2} \int_0^z \left[\sqrt{\tau} \alpha_n(\tau) B_1(\tau) - \frac{\beta_n(\tau) A_n(\tau)}{\sqrt{\tau}} \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{7.3.93}$$

In the case of

$$\lambda g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} g_n(z)$$

(7.3.87) is satisfied by formal expansions of the form

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-2n} A_n(z), \quad A_0 = 1 \\
 B &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-2n} B_n(z)
 \end{aligned} \tag{7.3.94}$$

Substituting this expansion into (7.3.87) and equating coefficients of like powers of λ , we obtain

$$\begin{aligned}
 2A'_n &= -B''_n - g_0 B_n - \sum_{m=1}^{n-1} g_m B_{n-m} = \alpha_n \\
 2zB'_n + B_n &= -A''_{n-1} - g_0 A_{n-1} - \sum_{m=1}^{n-1} g_m A_{n-m-1} = \beta_n
 \end{aligned} \tag{7.3.95}$$

Their solutions are

$$\begin{aligned}
 \sqrt{z} B_n &= \int_0^z \frac{\beta_n(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \\
 A_n &= \frac{1}{2} \int_0^z \alpha_n(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{7.3.96}$$

Successive Langer Transformations. To determine higher approximations to the solutions of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 q(x) y = 0 \tag{7.3.97}$$

where $q(x)$ vanishes in the interval of interest, Imai (1948, 1950) proposed repeated application of the Langer transformation. This technique has been applied and extended considerably

by Moriguchi (1959). For a simple turning point at $x = \mu$, we first introduce the Langer transformation

$$\frac{2}{3}z^{3/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau, \quad y = \chi^{-1/4}v, \quad \chi = \frac{q}{z} \quad (7.3.98)$$

in (7.3.97) to obtain

$$\frac{d^2v}{dz^2} + [\lambda^2 z - \delta(z)] v = 0 \quad (7.3.99)$$

where

$$\delta = \chi^{-1/4} \frac{d^2(\chi^{1/4})}{dz^2} = -\chi^{-3/4} \frac{d^2(\chi^{-1/4})}{dx^2}$$

Since $\delta = O(1)$ and λ is large, v is given approximately by

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 z = 0 \quad (7.3.100)$$

that is

$$v = \zeta_i(\lambda^{2/3}z) \quad (7.3.101)$$

where ζ_1 and ζ_2 are the Airy functions of the first and second kind.

To improve (7.3.101) we rewrite (7.3.99) in the same form as the original equation (7.3.97) by changing the independent variable from z to x_1 according to

$$x_1 = z - \mu_1 \quad (7.3.102)$$

where μ_1 is the root of $\lambda^2 z - \delta(z) = 0$; that is

$$\lambda^2 \mu_1 - \delta(\mu_1) = 0 \quad (7.3.103)$$

Then (7.3.99) can be written as

$$\frac{d^2v}{dx_1^2} + \lambda^2 [a_1 x_1 + R_1(x_1)] v = 0 \quad (7.3.104)$$

where

$$a_1 = 1 - \lambda^{-2} \delta'(\mu_1), \quad R_1 = -\lambda^{-2} \left[\frac{1}{2} \delta''(\mu_1) x_1^2 + \frac{1}{3!} \delta'''(\mu_1) x_1^3 + \cdots \right] \quad (7.3.105)$$

This equation has the same form as (7.3.97), hence an approximate solution can be obtained using the transformation

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}z_1^{3/2} &= \int_0^{x_1} \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad v = \chi_1^{-1/4}v_1 \\ \chi_1 &= \frac{q_1}{z_1}, \quad q_1 = a_1 x_1 + R_1(x_1) \end{aligned} \quad (7.3.106)$$

Then (7.3.104) becomes

$$\frac{d^2v_1}{dz_1^2} + [\lambda^2 z_1 - \delta_1(z_1)] v_1 = 0 \quad (7.3.107)$$

where

$$\delta_1 = -\chi_1^{-3/4} \frac{d^2 \left(\chi_1^{-1/4} \right)}{dx_1^2} \quad (7.3.108)$$

A first approximation to v_1 is the solution of

$$\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} + \lambda^2 z_1 v_1 = 0 \quad (7.3.109)$$

Hence

$$v_1 = \zeta_i \left(\lambda^{2/3} z_1 \right) \quad (7.3.110)$$

Now transforming back to x and y yields an improved approximation to the solution of the original equation. From (7.3.106)

$$\frac{2}{3} z_1^{3/2} = \int_0^{x_1} \sqrt{a_1 \tau} \sqrt{1 + \frac{R_1}{a_1 \tau}} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{a_1} x_1^{3/2} + O(\lambda^{-2})$$

Hence

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{a_1} x_1 + O(\lambda^{-2}) \\ \chi_1 &= a_1^{2/3} + O(\lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (7.3.111)$$

Since

$$y = \frac{v}{\sqrt[4]{\chi}} = \frac{v_1}{\sqrt[4]{\chi \chi_1}} \approx \frac{z_1^{1/4} v_1}{q^{1/4} a_1^{1/6}}$$

two independent solutions of (7.3.97) are approximately given by

$$y = \sqrt{\frac{z(x)}{q(x)}} \zeta_i \left[\lambda^{2/3} a_1^{1/3} (z(x) - \mu_1) \right] \quad (7.3.112)$$

where $z(x)$ is defined in (7.3.98).

Higher approximation can be obtained by means of repeated application of the above procedure.

7.3.6. An Inhomogeneous Problem with a Simple Turning Point-first Approximation

In this section we determine a first approximation to a particular solution of the equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = \lambda^2 G(x) \quad (7.3.113)$$

for large λ when $q_1(x)$ has a simple zero at $x = \mu$. If we divide (7.3.113) by λ^2 and let $\lambda \rightarrow \infty$, we obtain

$$y = \frac{G(x)}{q_1(x)} \quad (7.3.114)$$

as an approximate particular solution. This solution is singular at $x = \mu$ unless $G(x)$ has a simple or a higher-order zero at $x = \mu$.

To determine a first approximation to a particular solution in the case of $G(\mu) \neq 0$, we first employ the transformation

$$z = \phi(x), \quad \frac{2}{3}z^{3/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\phi'}} \quad (7.3.115)$$

to transform (7.3.114) into

$$\frac{d^2v}{dz^2} + (\lambda^2 z - \delta) v = \lambda^2 g(z) \quad (7.3.116)$$

where δ is defined by (7.3.37), and

$$g(z) = \{\phi'[x(z)]\}^{-3/2} G[x(z)] \quad (7.3.117)$$

Since $\delta = O(1)$ and λ is large, a first approximation to (7.3.116) is

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 z v = \lambda^2 g(z) \quad (7.3.118)$$

To determine a particular solution, we write $g(z)$ as the sum of two terms according to

$$g(z) = g(0) + [g(z) - g(0)] \quad (7.3.119)$$

and determine particular solutions corresponding to each term. A particular solution corresponding to the second term is given approximately by

$$v_1 = \frac{g(z) - g(0)}{z} \quad (7.3.120)$$

uniformly for all z if $g(z)$ is differentiable at $z = 0$. To find a particular solution corresponding to the first term, we let $\xi = \lambda^{2/3} z$ so that (7.3.118) becomes

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \xi v = \lambda^{2/3} g(0) \quad (7.3.121)$$

with a particular solution

$$v_2 = \lambda^{2/3} g(0) T(\xi) \quad (7.3.122)$$

where

$$\frac{d^2T}{d\xi^2} + \xi T = 1, \quad T(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{as} \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (7.3.123)$$

Thus $T(\xi)$ may be represented in terms of Lommel functions (e.g., Watson, 1944, pp. 345-351) according to

$$\begin{aligned} T(\xi) &= \frac{2}{3} \xi^{1/2} S_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) = \int_0^\infty e^{-\xi t} e^{-t^3/3} dt, \quad |\xi| < \infty \\ &= 3^{-2/3} \sum_{n=0}^\infty 3^{n/3} \Gamma \left(\frac{n+1}{3} \right) \frac{(-\xi)^n}{n!}, \quad |\xi| < \infty \\ &\sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (3n)!}{3^n n!} \xi^{-3n-1}, \quad |\arg \xi| < \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (7.3.124)$$

where $S_{0,1/3}$ denotes a specific Lommel function.

Therefore a particular solution to (7.3.118) is approximately given by

$$v = \lambda^{2/3} g(0) T(\lambda^{2/3} z) + \frac{g(z) - g(0)}{z} \quad (7.3.125)$$

Transforming back to x and y , we obtain

$$y = \lambda^{2/3} \frac{G(\mu)}{[\phi'(x)f(\mu)]^{1/2}} T(\lambda^{2/3} z) + \frac{1}{q_1(x)} \left[G(x) - \frac{G(\mu)\phi'^{3/2}}{\sqrt{f(\mu)}} \right] \quad (7.3.126)$$

where

$$f(x) = \frac{q_1(x)}{(x - \mu)}$$

Inhomogeneous problems with turning points arise in the analysis of boundary layer stability (Holstein, 1950) and thin elastic toroidal shells and bending of curved tubes (e.g., Clark, 1964). The technique presented above was developed by Holstein (1950), Clark (1958, 1963) and Tumarkin (1959). Steele (1965) obtained a single particular solution for an inhomogeneous second-order equation in terms of general Lommel functions $S_{\mu,\nu}$.

7.3.7. An Inhomogeneous Problem with a Simple Turning Point-higher Approximations

To determine a complete asymptotic representation of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 f(x) + \lambda \chi(x, \lambda)] y = \lambda^2 G(x, \lambda) \quad (7.3.127)$$

where $f(x)$ has a simple zero at $x = \mu$ and

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \chi_n(x), \quad G(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} G_n(x) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty$$

we first employ the transformation

$$z = \phi(x), \quad \frac{2}{3} z^{3/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{f(\tau)} d\tau, \quad y = v / \sqrt{\phi'} \quad (7.3.128)$$

to transform (7.3.127) into

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + [\lambda^2 z + \lambda q(z, \lambda)] v = \lambda^2 g(z, \lambda) \quad (7.3.129)$$

where

$$\begin{aligned} q(z(x), \lambda) &= P^4(x) \chi(x, \lambda) + \lambda^{-1} P^3(x) P''(x) \\ g(z(x), \lambda) &= P^3(x) G(x, \lambda), \quad P(x) = \frac{1}{\sqrt{\phi'(x)}} \end{aligned} \quad (7.3.130)$$

We assume that

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} g_n(z), \quad q(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(z) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty \quad (7.3.131)$$

and restrict our attention to (7.3.129).

We assume a complete asymptotic expansion of a particular solution of (7.3.129) and (7.3.131) to have the form

$$v = C(z, \lambda) + \lambda^{2/3} A(z, \lambda) T(\xi) + \lambda^{1/3} B(z, \lambda) T'(\xi), \quad \xi = \lambda^{2/3} z \quad (7.3.132)$$

where $T(\xi)$ is defined in (7.3.124) as the solution of

$$T'' + \xi T = 1, \quad T = \frac{1}{\xi} \quad \text{as} \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (7.3.133)$$

Since

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= C' + \lambda^{2/3} A' T + \lambda^{1/3} (\lambda A + B') T' + \lambda B T'' \\ &= C' + \lambda B + \lambda^{2/3} (A' - \lambda z B) T + \lambda^{1/3} (\lambda A + B') T' \\ \frac{d^2 v}{dz^2} &= C'' + 2\lambda B' + \lambda^2 A + \lambda^{2/3} (A'' - \lambda^2 A z - \lambda B - 2\lambda z B') T \\ &\quad + \lambda^{1/3} (2\lambda A' - \lambda^2 z B + B'') T' \end{aligned}$$

(7.3.129) becomes

$$\begin{aligned} [(\lambda^2 z + \lambda q) C + C'' + 2\lambda B' + \lambda^2 A - \lambda^2 g] + \lambda^{2/3} [A'' - \lambda B - 2\lambda z B' + \lambda q A] T \\ + \lambda^{1/3} [2\lambda A' + B'' + \lambda q B] T' = 0 \end{aligned} \quad (7.3.134)$$

In order for (7.3.134) to be an identity, each of the coefficients in square brackets must vanish; that is

$$\begin{aligned} (\lambda^2 z + \lambda q) C + \lambda^2 A - \lambda^2 g + 2\lambda B' + C'' &= 0 \\ 2\lambda z B' + \lambda B - A'' - \lambda q A &= 0 \\ 2\lambda A' + \lambda q B + B'' &= 0 \end{aligned} \quad (7.3.137)$$

To solve (7.3.135) through (7.3.137), we assume formal expansions of the form

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(z), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(z), \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} C_n \quad (7.3.138)$$

and equate coefficients of like powers of λ to obtain

$$z C_n = g_n - A_n - 2B'_{n-1} - C''_{n-2} - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1} C_k \quad (7.3.139)$$

$$2z B'_n + B_n - q_0 A_n = A''_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} A_k \quad (7.3.140)$$

$$2A'_n + q_0 B_n = -B''_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} B_k \quad (7.3.141)$$

where all coefficients with negative subscripts are defined to be zero. Letting

$$\begin{aligned} M_z A_n &= A''_n(z) + \sum_{k=0}^n q_{n-k+1}(z) A_k(z) \\ u_n(z) &= A_n(z) + i\sqrt{z} B_n(z) \end{aligned} \quad (7.3.142)$$

we combine (7.3.140) and (7.3.141) into

$$2\sqrt{z}u'_n - iq_0u_n = iM_zA_{n-1} - \sqrt{z}M_zB_{n-1} \quad (7.3.143)$$

whose general solution is

$$u_n = (\alpha_n + i\beta_n) e^{i\theta(z)} + \frac{i}{2} \int_0^z e^{i\theta(z)-i\theta(\tau)} [\tau^{-1/2}M_\tau A_{n-1} + iM_\tau B_{n-1}] d\tau \quad (7.3.144)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

where α_n and β_n are arbitrary constants and

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau \quad (7.3.145)$$

Since coefficients with negative subscripts are zero, (7.3.144) reduces for $n = 0$ to

$$u_0 = (\alpha_0 + i\beta_0) e^{i\theta} \quad (7.3.146)$$

Hence

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_0 \cos \theta - \beta_0 \sin \theta \\ \sqrt{z}B_0 &= \alpha_0 \sin \theta + \beta_0 \cos \theta \end{aligned} \quad (7.3.147)$$

Since $\theta(0) = 0, \beta_0 \equiv 0$ in order that B_0 be bounded as $z \rightarrow 0$. Now (7.3.139) reduces for $n = 0$ to

$$zC_0 = g_0 - A_0 \quad (7.3.148)$$

In order that C_0 be bounded as $z \rightarrow 0$

$$A_0(0) = g_0(0) = \alpha_0 \quad (7.3.149)$$

Therefore the first approximation to v is

$$v = \frac{g_0(z) - g_0(0) \cos \theta}{z} + \lambda^{2/3} g_0(0) \cos \theta T(\xi) + \lambda^{1/3} g_0(0) z^{-1/2} \sin \theta T'(\xi) \quad (7.3.150)$$

which reduces to (7.3.125) when $q_0 = 0$ (i.e., $\theta = 0$).

In general, for $\mathbf{B}_n$ to be regular at $z = 0$, we require that $\beta_n = 0$, while for C_n to be regular at $z = 0$, we require that

$$\alpha_n = A_n(0) = g_n(0) - 2B'_{n-1}(0) - C''_{n-2}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(0)C_k(0) \quad (7.3.151)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Hence

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \alpha_n \cos \theta(z) - \frac{1}{2} \int_0^z \tau^{-1/2} \sin[\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau A_{n-1} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^z \cos[\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau B_{n-1} d\tau \end{aligned} \quad (7.3.152)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z}B_n(z) &= \alpha_n \sin \theta(z) + \frac{1}{2} \int_0^z \tau^{-1/2} \cos[\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau A_{n-1} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^z \sin[\theta(z) - \theta(\tau)] M_\tau B_{n-1} d\tau \end{aligned} \quad (7.3.153)$$

This general solution was obtained by Tumarkin (1959) and justified by Clark (1963).

7.3.8. An Inhomogeneous Problem with a Secondorder Turning Point

In their investigation of toroidal membranes under internal pressure, Sanders and Liepins (1963) encountered an inhomogeneous problem with a turning point of second order of the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 q(x)y = \lambda^2 G(x) \quad (7.3.154)$$

where $q(x)$ has a zero of order two at $x = \mu$. To determine a first approximation to a particular solution of this equation, we let

$$z = \phi(x), \quad \frac{1}{2}z^2 = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\phi'}} \quad (7.3.155)$$

in (7.3.154) and obtain

$$\frac{d^2v}{dz^2} + (\lambda^2 z^2 - \delta)v = \lambda^2 g(z) \quad (7.3.156)$$

where δ and g are defined by (7.3.37) and (7.3.117). Since $\delta = O(1)$ and λ is large, a particular solution to (7.3.156) is given approximately by

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 z^2 v = \lambda^2 g(z) \quad (7.3.157)$$

To find an approximate particular solution to (7.3.157), we express $g(z)$ as the sum of three terms according to

$$g(z) = g(0) + g'(0)z + [g(z) - g(0) - g'(0)z] \quad (7.3.158)$$

and determine particular solutions corresponding to these three terms. A particular solution corresponding to the last term is approximately given by

$$v_1 = \frac{g(z) - g(0) - g'(0)z}{z^2} \quad (7.3.159)$$

uniformly for all z if $g''(0)$ exists. To find particular solutions corresponding to the other two terms in $g(z)$, we let $\xi = \lambda^{1/2}z$ thereby transforming (7.3.157) into

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \xi^2 v = \lambda g(0) + \lambda^{1/2} g'(0)\xi \quad (7.3.160)$$

Sanders and Liepins (1963) defined the two functions $T_1(\xi)$ and $T_2(\xi)$ by

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{d\xi^2} + \xi^2 T_1 &= 1, & T_1 &= \frac{1}{\xi^2} & \text{as } |\xi| \rightarrow \infty \\ \frac{d^2 T_2}{d\xi^2} + \xi^2 T_2 &= \xi, & T_2 &= \frac{1}{\xi} & \text{as } |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.3.161)$$

In terms of these functions, a particular solution of (7.3.160) may be written as

$$v_2 = \lambda g(0)T_1(\xi) + \lambda^{1/2} g'(0)T_2(\xi) \quad (7.3.162)$$

Therefore a particular solution of (7.3.157) is approximately given by

$$v = \frac{g(z) - g(0) - g'(0)z}{z^2} + \lambda g(0)T_1(\xi) + \lambda^{1/2} g'(0)T_2(\xi) \quad (7.3.163)$$

Transforming back to x and y , we can obtain a uniformly valid first approximation to the original equation.

7.3.9. Turning Point Problems About Singularities

We consider the asymptotic expansions of the solutions of

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q(x) + r(x)] y = 0 \quad (7.3.164)$$

for large λ under the conditions

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0(x - \mu)^\alpha [1 + O(x - \mu)] \\ r(x) &= r_0(x - \mu)^{-2} [1 + O(x - \mu)] \quad \text{as } x \rightarrow \mu \end{aligned} \quad (7.3.165)$$

The problems considered in the previous sections ($r_0 = 0$ and $\alpha \geq 0$) are special cases of the present problem where $r_0 \neq 0$ and α may be negative. As $x \rightarrow \mu$, (7.3.164) tends to

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\lambda^2 q_0(x - \mu)^\alpha + \frac{r_0}{(x - \mu)^2} \right] y = 0 \quad (7.3.166)$$

Therefore we choose

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\lambda^2 z^\alpha + \frac{r_0}{z^2} \right) v = 0 \quad (7.3.167)$$

as the related equation with solutions expressed in the form

$$\begin{aligned} v &= z^{1/2} \mathcal{C}_v \left(\gamma z^\beta \right) \\ \beta \gamma &= \lambda, \quad \beta = \frac{\alpha + 2}{2}, \quad v = \frac{\sqrt{1 - 4r_0}}{2 + \alpha} \end{aligned} \quad (7.3.168)$$

where the cylindrical functions $\mathcal{C}_v(t)$ satisfy the differential equation

$$\frac{d^2 \mathcal{C}_v}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d \mathcal{C}_v}{dt} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) \mathcal{C}_v = 0 \quad (7.3.169)$$

The Bessel, Neumann, and Hankel functions ($J_v(t)$, $Y_v(t)$, $H_v^1(t)$, and $H_v^2(t)$) are special cylindrical functions.

Investigation of turning point problems about singularities was started by Langer (1935). The other principal contributors to the investigation of this problem were Cashwell (1951), Olver (1954), Swanson (1956), Kazarinoff and McKelvey (1956), Erdlyi (1960) , and Wasow (1965).

To determine the asymptotic expansions of the solutions of (7.3.164), we introduce the transformation

$$z = \phi(x), \quad v = \psi(x)y(x), \quad \psi(x) = \sqrt{\phi'} \quad (7.3.170)$$

thereby transforming (7.3.164) into

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left\{ \frac{\lambda^2 q(x)}{\phi'^2} + \frac{1}{\phi'^2} \left[r(x) + \frac{2\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{\psi} \right] \right\} v = 0 \quad (7.3.171)$$

In order that this equation be approximately identical to (7.3.167), we require that so that

$$\phi^\alpha \phi'^2 = q(x) \quad (7.3.172)$$

$$\frac{2}{\alpha+2}\phi^{(\alpha+2)/2} = \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau \quad (7.3.173)$$

Hence (7.3.171) becomes

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \left(\lambda^2 z^{\alpha} + \frac{r_0}{z^2} \right) v = F(z)v \quad (7.3.174)$$

where

$$F = \frac{r_0}{\phi^2} - \frac{1}{\phi'^2} \left[r(x(z)) + \frac{2\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{\psi} \right] \quad (7.3.175)$$

As $x \rightarrow \mu$

$$\frac{2}{\alpha+2}\phi^{(\alpha+2)/2} \rightarrow \frac{2}{\alpha+2}\sqrt{q_0}(x-\mu)^{(\alpha+2)/2}$$

so that

$$\phi \rightarrow q_0^{1/(\alpha+2)}(x-\mu), \quad \phi' \rightarrow q_0^{1/(\alpha+2)}, \quad \psi \rightarrow q_0^{1/2(\alpha+2)} \quad (7.3.176)$$

and

$$F = O\left(\frac{1}{x-\mu}\right) \quad (7.3.177)$$

Hence a first approximation to v is given by (7.3.167) whose solution is given by (7.3.168). Therefore y is given approximately by

$$y = \frac{\left[\int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau \right]^{1/2}}{\sqrt[4]{q(x)}} \mathcal{C}_{\nu} \left[\lambda \int_{\mu}^x \sqrt{q(\tau)} d\tau \right] \quad (7.3.178)$$

Higher approximations to (7.3.174) can be obtained by using Olver's approach (Section 7.3.5) by assuming that

$$v = A(z, \lambda)\zeta_1(z; \lambda) + B(z, \lambda)\zeta_2(z; \lambda) \quad (7.3.179)$$

where ζ_1 and ζ_2 are the independent solutions of (7.3.167).

7.3.10. Turning Point Problems of Higher Order

Most of the interest in turning point problems for differential equations of order higher than two arose from the hydrodynamic stability of parallel flows. The linear stability problem for a parallel flow can be reduced to the solution of the so-called Orr-Sommerfeld equation (e.g., Lin, 1955)

$$\phi^{iv} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi = i\alpha R \{ [U(y) - c] (\phi'' - \alpha^2\phi) - U''(y)\phi \} \quad (7.3.180)$$

for the disturbance amplitude $\phi(y)$. In this equation, $U(y)$ is the velocity profile of the undisturbed flow which is a known function. The parameters α and R are positive constants representing, respectively, the disturbance wave number and a flow Reynolds number. The parameter c is a complex constant whose real part c_r determines the wave speed, while its imaginary part c_i determines the damping or growth rate of the disturbance. This equation is supplemented by four homogeneous boundary conditions to form an eigenvalue problem for the

eigenfunction ϕ and the eigenvalues c_r and c_i if α and R are known. The system is unstable if $c_i > 0$, stable if $c_i < 0$, and neutrally stable if $c_i = 0$.

For large αR , two independent solutions of this problem can be obtained in the form

$$\phi = \phi_0(y) + (\alpha R)^{-1} \phi_1(y) + \cdots \quad (7.3.181)$$

while the remaining two solutions can be obtained in the form

$$\phi = e^{\pm \sqrt{\alpha R} \tau} [(U - c)^{-5/4} + (\alpha R)^{-1/2} f_1(y) + \cdots] \quad (7.3.182)$$

where $\zeta = \int_{y_0}^y \sqrt{i(U - c)} dy$. The above solution breaks down near the zeros of $U - c$, which are turning points of (7.3.180).

First-order uniformly valid asymptotic solutions were obtained for (7.3.180) by Tollmien (1947) and Wasow (1953), while complete uniformly valid expansions were obtained by Langer (1957, 1959a), Rabenstein (1959), and Lin and Rabenstein (1960, 1969). K. Tam (1968) obtained uniformly valid expansions for (7.3.180) using the method of multiple scales. Turning point problems for equations of the n th order were treated by Sibuya (1963a, b).

9.7.4 7.4. Wave Equations

In this section we describe some of the available techniques for determining approximate solutions of linear wave problems and their related elliptic problems. In our description of these techniques, we use the wave problem

$$c^2(\mathbf{r}) \nabla^2 v - v_{tt} - \omega_0^2(\mathbf{r}) v = c^2(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (7.4.1)$$

If we let

$$v = u(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (7.4.2)$$

we obtain

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = g(\mathbf{r}) \quad (7.4.3)$$

where k and n are the wave number and refractive index given by

$$k = \frac{\omega}{c_0}, \quad n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{r})}{\omega^2} \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \quad (7.4.4)$$

with c_0 a reference speed. In this problem we assume that g is deterministic, while n can be a random function so that the results may be applied to wave propagation in a random medium.

For a constant n the homogeneous problem admits a plane wave solution of the form

$$u = A e^{i n k \cdot \tau} \quad (7.4.5)$$

with constant A , while the inhomogeneous problem has the integral

$$u = - \int_V g(\xi) \frac{e^{i n k |r - \xi|}}{4\pi |\mathbf{r} - \xi|} d\xi \quad (7.4.6)$$

where ξ is a variable vector ranging over the scattering volume V . However, if n is not a constant, we seek asymptotic expansions to the solutions of (7.4.3). The choice of an asymptotic technique to obtain an approximate solution depends on the value of k and the spatial variation

of n . If n deviates slightly from a constant, we can use the so-called Born expansion developed by physicists and the Neumann expansion developed by mathematicians, renormalization techniques, or the Rytov technique. If k is large or n is a slowly varying function of position, we can use the geometrical optics technique. Although these techniques were developed for deterministic problems, they can also be used for stochastic problems. For the latter problems we also describe the so-called smoothing technique which is the counterpart of the method of averaging discussed in Chapter 5. For an account of the applications of these techniques and for more references, we refer the reader to the books by Chernov (1960), Tatarski (1961), Babich (1970, 1971), and the survey article by Frisch (1968).

7.4.1. The Born or Neumann Expansion and the Feynman Diagrams

This technique is applicable when n deviates slightly from a constant. In this case we assume that k and n have been normalized so that the constant part of n is unity, thereby allowing n^2 to be written as

$$n^2 = 1 + \epsilon\chi(\mathbf{r}) \quad (7.4.7)$$

with ϵ small and $\chi = O(1)$. For the statistical problem we assume that χ is a centered random function of $\mathbf{r}$ so that its mean, denoted by $\langle\chi\rangle$, is equal to zero. To obtain a Born expansion (Born, 1926), we let

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m \quad (7.4.8)$$

Substituting this expansion into (7.4.3), using (7.4.7), and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$L(u_0) = g \quad (7.4.9)$$

$$L(u_m) = -k^2\chi u_{m-1} \text{ for } m \geq 1 \quad (7.4.10)$$

where the operator L is defined by

$$L = \nabla^2 + k^2 \quad (7.4.11)$$

Equations (7.4.9) and (7.4.10) can be solved successively. Thus for a given m , the right-hand side of (7.4.10) is known from the previous solution. Hence its solution is given by

$$u_m(\mathbf{r}) = -k^2 \int_V \chi(\mathbf{r}_m) u_{m-1}(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}_m, \quad m \geq 1 \quad (7.4.12)$$

where $\mathbf{r}_m$ is a variable vector ranging over the scattering volume V , and G_0 is the free-space Green's function

$$G_0(\mathbf{r}, \xi) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\xi|}}{4\pi|\mathbf{r}-\xi|} \quad (7.4.13)$$

If $g \equiv 0$, (7.4.9) admits the following plane wave solution

$$u_0 = Ae^{ik \cdot \mathbf{r}} \quad (7.4.14)$$

where A is a constant. Then from (7.4.12)

$$u_1 = -Ak^2 \int_V \chi(\mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (7.4.15)$$

$$u_2 = Ak^4 \int_V \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (7.4.16)$$

$$u_m = A(-1)^m k^{2m} \int_V \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) \\ \times e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \cdots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_m \quad (7.4.17)$$

In this expansion, ϵu_1 is called the first Born approximation, while $\epsilon^m u_m$ is called the m th Born approximation.

If χ is a centered random function of $\mathbf{r}$, the mean of u can be obtained by averaging (7.4.8). The result is

$$\langle \mathbf{u} \rangle = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + A \epsilon^2 k^4 \int_V \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \cdots \\ + A(-\epsilon)^m k^{2m} \int_V \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle \\ \times e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \cdots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_m + \cdots \quad (7.4.18)$$

The averaged quantities $\langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle$ depend on the configuration of the points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ because for most random media there exists a correlation length l (i.e., the values of χ at points of separation larger than l are uncorrelated). To express the dependence on the correlation length, we expand these averaged quantities in the following cluster (cumulant) expansions

$$\langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \rangle = R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \chi(\mathbf{r}_3) \rangle = R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \chi(\mathbf{r}_3) \chi(\mathbf{r}_4) \rangle = R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) \\ + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \quad (7.4.19) \\ \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) \rangle = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = m} R(\xi_1, \dots, \xi_{k_1}) R(\zeta_1, \dots, \zeta_{k_2}) \cdots \\ \times R(\eta_1, \dots, \eta_{k_m})$$

where $k_i \geq 2$. Thus the summation in the last equation is extended over all possible partitions of the set $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ into clusters of at least two points. If χ is a centered Gaussian random function, all correlation functions vanish except the two-point correlation functions. Using (7.4.19) in (7.4.18), we obtain an expression for $\langle u \rangle$ which exhibits the dependence on the k -point correlation functions.

If $g \neq 0$ the particular solution of (7.4.9) is

Then from (7.4.12)

$$u_m(\mathbf{r}) = (-1)^m k^{2m} \int_V g(\mathbf{r}_0) \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) \\ \times G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \cdots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \quad (7.4.21)$$

or in operator form

$$u_m = (-k^2 M \chi)^m M g \quad (7.4.22)$$

where the operator M is defined in (7.4.20). Therefore

$$u(\mathbf{r}) = M g + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m (-k^2 M \chi)^m M g \quad (7.4.23)$$

This series is also called the Neumann series by mathematicians. It can also be obtained by converting (7.4.3) into the integral equation

$$u = M g - \epsilon k^2 M \chi u \quad (7.4.24)$$

and solving it by iteration.

From (7.4.23) we can define Green's function G for (7.4.3) as

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = & G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \epsilon k^2 \int \chi(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 \\ & + \epsilon^2 k^4 \int \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ & + \cdots + (-1)^m \epsilon^m k^{2m} \int \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_m) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_m) \\ & \times G_0(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{m-1}) \cdots G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_m + \cdots \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

or in operator form as

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} (G_0 \mathcal{L})^m G_0 \quad \text{with} \quad \mathcal{L} \phi \rightarrow -\epsilon k^2 \chi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (7.4.26)$$

This series was represented by Frisch (1968) by what he called "bare" diagrams using the following conventions: G_0 is represented by a solid line and $\mathcal{L}$ is represented by a dot. Then G is represented by the diagram series

$$G = \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_0} + \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \cdots$$

This series has a multiple scattering physical interpretation. The m th term corresponds to a wave which propagates freely from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}_1$, is scattered at $\mathbf{r}_1$ by the inhomogeneities, propagates freely to $\mathbf{r}_2$, is scattered at $\mathbf{r}_2$, and so on. Frish (1968) represented the double Green's function (the tensor product of G and its complex conjugate) by

$$G \otimes \bar{G} = G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \bar{G}(\xi; \xi_0)$$

in the following "bare" double-diagram series

$$G \otimes \bar{G} = \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_0} \quad \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} \quad \overline{\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_0} + \cdots$$

$$\overline{\xi \quad \xi_0} \quad \overline{\xi \quad \xi_1 \quad \xi_0} + \cdots$$

where each double diagram is the tensor product of the operator corresponding to the upper line, with the complex conjugate of the operator corresponding to the lower line.

If χ is a centered random process, $\langle G \rangle$ can be represented by the following "dressed" diagram series (Frisch, 1968).

$$\langle G \rangle = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \dots \quad (7.4.2)$$

In this diagram series the following conventions were used:

- (1) Points belonging to a given cluster were connected by a dotted line.
- (2) To every "bare" diagram involving k factors of χ , we associated as many "dressed" diagrams as there are different partitions of $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k$ into clusters of at least two points.
- (3) To calculate a "dressed" diagram, the solid lines are replaced by G_0 , the cluster of dotted lines ending at $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$ by the factors

$$(-\epsilon k^2)^s R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s),$$

and the integration is performed over all intermediate points. Thus

$$= \epsilon^2 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

$$\frac{r_4 r_1}{r_3 r_0} = \epsilon^4 k^8 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_4; \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) \quad (7.4.30)$$

$$\times R(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \quad (7.4.31)$$

Similarly, we can express the covariance $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$ in the following "dressed" double-diagram series

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \quad (7.4.3)$$

where, for example

$$= \epsilon^4 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) \bar{G}_0(\xi; \xi_1) \bar{G}_0(\xi_1; \xi_0) \times R(\mathbf{r}_1, \xi_1) d\mathbf{r}_1 d\xi_1$$

$$= \epsilon^4 k^4 \bar{G}_0(\xi; \xi_0) \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) \\ \times R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

For a Gaussian random function, only two-point correlation functions are nonvanishing, hence diagrams such as 3 and 7 in (7.4.29) and 5 in (7.4.32) vanish.

Representation of formal perturbation series by diagrams was first used by Feynman (1948). These diagrams are called Feynman diagrams and are widely used in statistical thermodynamics (see, for example, Prigogin, 1962), the many-body problem (e.g., Van Hove, Hugenholtz, and Howland, 1961), and quantum electrodynamics (e.g., Balescu, 1963). The first use of Feynman diagrams for solving linear stochastic equations was made by Kraichnan (1961). Feynman diagrams were introduced for the solution of wave propagation in random media by Bourret (1962a, b), Furutsu (1963), and Tatarski (1964) for the case of a Gaussian process, and by Frisch (1965, 1968) for the general case.

The expansions obtained in this section were shown to be divergent by Frisch (1968). Moreover, he also showed that these expansions contain secular terms which restrict the validity of these asymptotic expansions to small arguments. Since $\langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \cdots \chi(\mathbf{r}_{2m}) \rangle$ is the sum of $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$ two-point correlation functions, this number increases rapidly with increasing m and this is another reason why (7.4.29) and (7.4.32) are divergent. Shkarofsky (1971) modified Born's expansion for backscattering from turbulent plasmas to obtain saturation and cross-polarization. A technique for making such expansions more uniformly valid was developed by Rayleigh (1917) to make a similar expansion which he obtained for first scattering from a thin slab valid for many slabs. This technique is called renormalization, and it has been developed further and extended by several researchers, as discussed in the next section.

7.4.2. Renormalization Techniques

To illustrate the nature of the nonuniformity that might arise in the Born (Neumann) expansion and explore methods of remedying it, we discuss the simple example

$$u'' + k^2(\epsilon)u = 0, \quad u(0) = 1 \quad (7.4.34)$$

where k is constant and given by

$$k = \sum_{n=0}^N \epsilon^n k_n \quad (7.4.35)$$

Outgoing waves are given exactly by

$$u = e^{ik(\epsilon)x} = \exp \left(ix \sum_{n=0}^N \epsilon^n k_n \right) \quad (7.4.36)$$

However, the Born expansion can be obtained from (7.4.34) to be

$$u = e^{ik_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(ix \sum_{n=1}^N \epsilon^n k_n \right)^m \\ = e^{ik_0 x} \left[1 + i\epsilon k_1 x + \epsilon^2 \left(ik_2 x - \frac{1}{2} k_1^2 x^2 \right) \right. \\ \left. + \epsilon^3 \left(ik_3 x - k_1 k_2 x^2 - \frac{1}{6} ik_1^3 x^3 \right) + \cdots \right] \quad (7.4.37)$$

It is clear that this expansion is valid only for short distances, and it breaks down when $k_1 x = O(\epsilon^{-1})$ or larger. The origin of the nonuniformity can be seen by comparing this Born expansion with the exact solution (7.4.36). The Born expansion can be obtained from the exact solution by expanding $\exp\left(ix \sum_{n=1}^N \epsilon^n k_n\right)$ in Taylor series in terms of $ix \sum_{n=1}^N \epsilon^n k_n$, then expanding $\left(\sum_{n=1}^N \epsilon^n k_n\right)^m$ in powers of ϵ and collecting coefficients of like powers of ϵ . Although the Taylor series expansion of $\exp \phi$ in terms of ϕ converges uniformly and absolutely for all values of ϕ , a finite number of terms cannot be used to represent $\exp \phi$ with a given accuracy for all values of ϕ . Consequently, any uniformly valid expansion of $\exp \phi$ for all ϕ must be $\exp \phi$ itself. Thus to determine an expansion from (7.4.37) valid for x as large as $O(\epsilon^{-1})$, we must sum the sequence

$$1 + i\epsilon k_1 x + \cdots + (i\epsilon k_1 x)^m / m! + \cdots$$

Its sum is $\exp(ik_1 x)$, and (7.4.37) becomes

$$\begin{aligned} u &= \exp[i(k_0 + \epsilon k_1)x] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(ix \sum_{n=2}^N \epsilon^n k_n \right)^m \\ &= \exp[i(k_0 + \epsilon k_1)x] \left(1 + i\epsilon^2 k_2 x + i\epsilon^3 k_3 x - \frac{1}{2} \epsilon^4 k_2^2 x^2 + \cdots \right) \end{aligned} \quad (7.4.38)$$

This expansion breaks down when $k_2 x = O(\epsilon^{-2})$. To increase the range of validity of this expansion to values of $x = O(\epsilon^{-2})$, we must sum the sequence $\sum_{m=0}^{\infty} (i\epsilon^2 k_2 x)^m / m!$. An effective technique of summing these sequences without knowing their explicit functional dependence is the method of multiple scales of Chapter 6. Another technique for effecting the summation of the secular terms is the renormalization technique.

The renormalization technique was originally developed by Rayleigh (1917) to generalize his first scattering from a thin slab to scattering from many slabs. He obtained an expansion of the form

$$u = e^{ik_0 x} (1 + i\epsilon \mu x) \quad (7.4.39)$$

for first scattering from one slab. To obtain a solution valid for many slabs, he recast this expansion into an exponential; that is

$$u = \exp[i(k_0 + \epsilon \mu)x] \quad (7.4.40)$$

In this manner he effectively summed the sequence $\sum_{m=1}^{\infty} (i\epsilon \mu x)^m / m!$ of secular terms. The process of summing expansions to make them "more" uniformly valid is called renormalization. This technique was rediscovered by Pritulo (1962) as described in Section 3.4.

To make a more uniformly valid expansion from a two-term Born expansion $u = u_0 + \epsilon u_1$, we recast it into the following exponential

If $u_0 = A_0 \exp iS_0(\mathbf{r})$, then

$$u = u_0 e^{\epsilon u_1 / u_0} \quad (7.4.41)$$

$$u = A e^{iS(r)} \quad (7.4.42)$$

where $A = A_0 \exp[\epsilon \text{Real}(u_1/u_0)]$ and $S = S_0 + \epsilon \text{Imaginary}(u_1/u_0)$.

This renormalization technique has been extended to obtain the kinetic equations for weakly nonlinear systems (see, for example, Van Hove, 1955, 1957; Prigogin, 1962; Balescu, 1963, and

Al'tshul' and Karpman, 1966). According to this technique, sequences of secular terms are separated and summed with or without the use of Feynman diagrams. The summation of the principal sequences of secular terms leads to quasi-linear equations.

The renormalization technique has also been widely used in the study of wave propagation in random media (e.g., Tatarski, 1961, Chapter 6; Keller, 1962; Karal and Keller, 1964). Thus to determine a more uniformly valid expansion for $\langle G \rangle$ of (7.4.29), we recast it into an exponential

$$\langle G \rangle = G_0 e^\psi \quad (7.4.43)$$

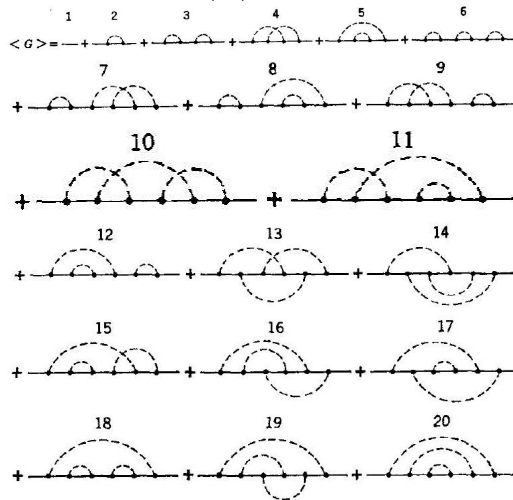
Hence the first renormalization gives

$$\psi = \frac{G_2}{G_0} \quad (7.4.44)$$

where

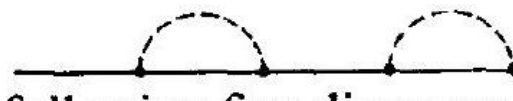
$$G_2 = \epsilon^2 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (7.4.45)$$

Diagrammatic summation techniques have been used to determine renormalization equations to any order by Bourret (1962a, b), Furutsu (1963), Tatarski (1964), and Frisch (1965). Tatarski (1964) arranged the diagrams for $\langle G \rangle$ and $\langle G \otimes \vec{G} \rangle$ in such a manner that he could recognize that they were the Neumann expansions of two integral equations with two kernels having an infinite number of terms. For a centered Gaussian index of refraction, the diagrammatic expansion of $\langle G \rangle$ is

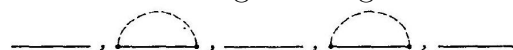


To obtain an integral equation for $\langle G \rangle$ with a kernel consisting of an infinite series, we look at the topology of the diagrams in (7.4.46). Let us make the following definitions.

- (1) A diagram without terminals is a diagram stripped of its external solid lines, such as diagram 2 without terminals and diagram 4 without terminals
- (2) A diagram without terminals is connected if it cannot be cut into two or more diagrams without cutting any dotted lines. Diagrams 4, 5, 10, 11, and 13 through 20 are connected, while diagrams 3, 6, 7, 8, 9, and 12 are unconnected. Unconnected diagrams can be factored; for example,



can be written as the product of the following five diagrams



(3) The mass operator Q denoted by $\bullet$ is the sum of all possible connected diagrams contributing to $\langle G \rangle$; that is

All unconnected diagrams composed of two connected diagrams occur in the sum of diagrams ..., while all unconnected diagrams composed of three connected diagrams occur in the sum of diagrams

From this we note that $\langle G \rangle$, which is denoted by $-$, is governed by the following Dyson equation (Tatarski, 1964)

or in analytic form

$$\langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (7.4.49)$$

A similar equation has been used extensively in quantum electrodynamics, quantum field theory, and the many-body problem, and it was first introduced by Dyson (1949). If χ is homogeneous, the mass operator Q is invariant under translations, hence it is a convolution operator whose Fourier transform $Q(\mathbf{k})$ is a multiplication operator of ordinary functions. Hence, taking the Fourier transform of (7.4.49), we obtain

$$\langle G(x) \rangle = \frac{1}{k^2 - \kappa^2} + \frac{1}{k^2 - \kappa^2} Q(x) \langle G(x) \rangle \quad (7.4.50)$$

because

$$G_0(x) = \frac{1}{k^2 - \kappa^2} \quad (7.4.51)$$

Solving (7.4.50) for $\langle G(x) \rangle$, we obtain

$$\langle G(x) \rangle = \frac{1}{k^2 - \kappa^2 - Q(x)} \quad (7.4.52)$$

Thus if Q is known, $\langle G \rangle$ can be obtained by inverting $\langle G(x) \rangle$. However, the exact expression for Q is as difficult to find as $\langle G \rangle$. Thus one approximates Q . The simplest approximation based on the Dyson equation retains only the first term in the mass operator; that is

or in analytic form

$$\langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \epsilon^2 k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (7.4.54)$$

This equation is called the first renormalization equation, and it was introduced in diagrammatic form by Bourret (1962a, b).

It should be mentioned that (7.4.49) and (7.4.54) cannot be solved by iteration, because this would lead to secular terms. An approximate solution to (7.4.54) is given by Varvatsis and Sancer (1971)

$$\langle G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) e^{\epsilon^2 G_2/G_0} \quad (7.4.55)$$

where

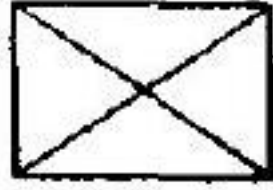
$$G_2 = k^4 \int G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (7.4.56)$$

This solution is valid for homogeneous as well as inhomogeneous random media. It is the same solution that would be obtained if we had recast $\langle G \rangle = G_0 + \epsilon^2 G_2$ into an exponential.

Using diagrammatic techniques, Tatarski (1964) and Frisch (1968) obtained the following Bethe-Salpeter equation for a centered Gaussian and general refractive index

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} \langle G \otimes \bar{G} \rangle$$

where the intensity operator



consists of all connected diagrams without terminals in the expansion of $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$; that is

$$\text{---} \otimes \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

This equation was first introduced by Salpeter and Bethe (1951) for relativistic bound-state problems.

7.4.3. Rytov's Method

To obtain an approximate solution of

$$\nabla^2 u + k^2[1 + \epsilon\chi(\mathbf{r})]u = 0 \quad (7.4.59)$$

we follow Rytov (1937) by assuming that (see also Tatarski, 1961, pp. 121-128; Chernov 1960, pp. 58-67)

$$u = e^w \quad (7.4.60)$$

thereby transforming (7.4.59) into

$$\nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \psi + k^2(1 + \epsilon\chi) = 0 \quad (7.4.61)$$

Now we assume that ψ possesses the following asymptotic expansion

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n(\mathbf{r}) \quad (7.4.62)$$

Substituting (7.4.62) into (7.4.61) and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain

$$\nabla^2 \psi_0 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 = -k^2 \quad (7.4.63)$$

$$\nabla^2 \psi_1 + 2\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_0 = -k^2 \chi \quad (7.4.64)$$

$$\nabla^2 \psi_n + \sum_{m=0}^n \nabla \psi_m \cdot \nabla \psi_{n-m} = 0, \quad n \geq 2 \quad (7.4.65)$$

These equations can be solved successively. The resulting expansion corresponds exactly to the Born expansion $u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n$ of (7.4.59). In fact, the Rytov expansion can be obtained from the Born series by recasting the latter into an exponential. Setting

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n = \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \psi_m \right) \quad (7.4.66)$$

expanding the exponential for small ϵ , and equating coefficients of like powers of ϵ , we obtain for the first terms

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{\psi_0}, & u_1 &= e^{\psi_0} \psi_1, & u_2 &= e^{\psi_0} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \psi_1^2 \right) \\ u_3 &= e^{\psi_0} \left(\psi_3 + \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{6} \psi_1^3 \right) \end{aligned} \quad (7.4.67)$$

Thus the Rytov expansion is a renormalized Born expansion, hence it should be more uniformly valid than the Born expansion. However, this conclusion is controversial (Hufnagel and Stanley, 1964; deWolf 1965, 1967; Brown, 1966, 1967; Fried 1967; Heidbreder, 1967; Taylor, 1967; Strohbehn, 1968; Sancer and Varvatsis, 1969, 1970).

7.4.4. The Geometrical Optics Approximation

The object is to obtain an asymptotic solution for

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0 \quad (7.4.68)$$

for large wave number k (i.e., small wavelength $\lambda = 2\pi/k$). For large k , (7.4.68) has an asymptotic expansion of the form (Keller, 1958)

$$u = e^{ikS(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^{-m} u_m(\mathbf{r}) \quad (7.4.69)$$

Substituting (7.4.69) into (7.4.68) and equating coefficients of like powers of k , we obtain

$$\begin{aligned} \nabla S \cdot \nabla S &= n^2(\mathbf{r}) && \text{(eiconal equation)} \\ 2\nabla S \cdot \nabla u_0 + u_0 \nabla^2 S &= 0 && \text{(transport equations)} \\ 2\nabla S \cdot \nabla u_m + u_m \nabla^2 S &= -\nabla^2 u_{m-1} && \text{for } m \geq 1 \end{aligned} \quad (7.4.72)$$

Equation (7.4.70) can be solved using the method of characteristics; that is

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} &= 2\lambda \nabla S \\ \frac{dS}{d\sigma} &= 2\lambda n^2 \\ \frac{d}{d\sigma}(\nabla S) &= \lambda \nabla (n^2) \end{aligned} \quad (7.4.73)$$

where σ is a parameter and λ is a proportionality function. Elimination of ∇S from the first and third equations gives

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{2\lambda} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) = 2\lambda n \nabla n \quad (7.4.74)$$

Then the solution of the second equation in (7.4.73) is

$$S = S_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} 2\lambda n^2[\mathbf{r}(\tau)] d\tau \quad (7.4.75)$$

where $\mathbf{r}(\sigma)$ is the solution of (7.4.74) subject to the initial conditions $\mathbf{r}(\sigma_0) = \mathbf{r}_0$, $d\mathbf{r}(\sigma_0)/d\sigma = \dot{\mathbf{r}}_0$. Choosing $2\lambda = n^{-1}$ and σ to be the arc length along the rays, we rewrite (7.4.74) and (7.4.75) as

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left[n(\mathbf{r}(\sigma)) \frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} \right] &= \nabla n \\ S &= S_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n[\mathbf{r}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (7.4.77)$$

Equation (7.4.71) becomes

$$2n[\mathbf{r}(\sigma)] \frac{du_0}{d\sigma} + u_0 \nabla^2 S[\mathbf{r}(\sigma)] = 0$$

along the rays. Its solution is

$$u_0 = u_0[\mathbf{r}(\sigma_0)] \exp \left\{ - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\nabla^2 S[\mathbf{r}(\tau)]}{2n[\mathbf{r}(\tau)]} d\tau \right\} \quad (7.4.78)$$

Similarly, the solution of (7.4.72) is

$$u_m = c \frac{u_0[\mathbf{r}(\sigma)]}{u_0[\mathbf{r}(\sigma_0)]} - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\nabla^2 u_{m-1}[\mathbf{r}(\tau)]}{2n[\mathbf{r}(\tau)]} \frac{u_0[\mathbf{r}(\sigma)]}{u_0[\mathbf{r}(\tau)]} d\tau \quad (7.4.79)$$

where c is a constant to be determined from the initial conditions.

The expansion obtained in this section is not valid at a caustic (i.e., an envelope of rays), shadow boundaries, foci of the rays, and source points. In such regions neighboring rays intersect and the cross-sectional area of a tube of rays becomes zero. Since the energy is conserved in a tube of rays, the amplitude of the field must be infinite in these regions. The unboundedness of the field at a caustic is shown below, and an expansion valid everywhere including a caustic is obtained in the next section.

To show the breakdown of the expansion of this section at or near a caustic, we specialize it to the case $n(\mathbf{r}) = 1$. In this case the rays are straight lines according to (7.4.76), and $S = S_0 - \sigma_0 + \sigma$ according to (7.4.77). Now we express the solution of (7.4.71) and (7.4.72) in terms of a coordinate system with respect to the caustic which we assume to be smooth and convex. Figure 7-1 shows a point P outside the caustic and two rays passing through it. If we assign a direction to the caustic, this induces a direction for each ray which must be tangent to it at some point. Thus each point P outside the caustic lies on two rays—one has left the caustic and the other is approaching the caustic.

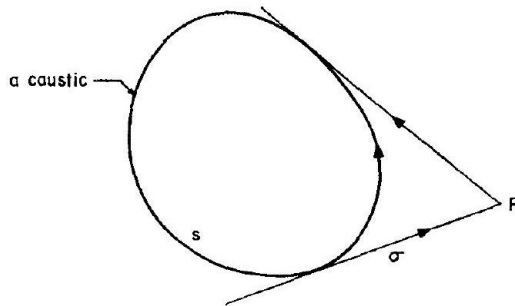


Figure 7-1

In two dimensions we let s measure the arc length along the caustic and σ measure the length from the point of tangency to the point P . Thus the position of P is determined by s_1 and σ_1 or s_2 and σ_2 . In terms of these coordinates, the position vector $\mathbf{r}$ of P can be expressed as

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \sigma \mathbf{e}_1 \quad (7.4.80)$$

where $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$ is the equation of the caustic, and $\mathbf{e}_1 = d\mathbf{r}_0/ds$ is a unit vector tangent to the caustic. Differentiating (7.4.80), we have

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 ds + \mathbf{e}_1 d\sigma + \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{e}_2 ds$$

because $d\mathbf{e}_1/ds = \rho^{-1} \mathbf{e}_2$ where ρ^{-1} is the curvature of the caustic. Changing the variables from σ and s to

$$\begin{aligned} \xi &= s \\ \eta &= s + \sigma \end{aligned} \quad (7.4.81)$$

we obtain

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 d\eta + \frac{\eta - \xi}{\rho} \mathbf{e}_2 d\xi \quad (7.4.82)$$

Hence

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \mathbf{e}_1 + \frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \mathbf{e}_2 \quad (7.4.83)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\eta - \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\eta - \xi) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] + \frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\rho}{\eta - \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (7.4.84)$$

Since from (7.4.81)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

we rewrite (7.4.83) and (7.4.84) as

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathbf{e}_1 + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \mathbf{e}_2 \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left[\frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.4.85)$$

If we take the special case $S(s, \sigma_0) = s + \sigma_0$, then

$$S(s, \sigma) = s + \sigma \quad (7.4.86)$$

which is double-valued corresponding to either the ray that has left or the one that is approaching the caustic. Using (7.4.85) and (7.4.86) in (7.4.78) and (7.4.79), we obtain

$$u_0(s, \sigma) = u_0(s, \sigma_0) \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}} \quad (7.4.87)$$

$$u_m(s, \sigma) = u_m(s, \sigma_0) \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}} - \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \nabla^2 u_{m-1}(s, \tau) d\tau \quad (7.4.88)$$

which are unbounded as $\sigma \rightarrow 0$ (i.e., a caustic). A modified expansion valid everywhere including the neighborhood of the caustic is obtained in the next section.

7.4.5. A Uniform Expansion at a Caustic

To determine an expansion valid at the caustic, we first must determine the size of the region of nonuniformity and the form of the solution in this region. To do this we let

$$u = \psi(\mathbf{r}, k) e^{ikS(\mathbf{r})} \quad (7.4.89)$$

in (7.4.68) with $n(\mathbf{r}) = 1$ and obtain

$$k^2 \psi [1 - (\nabla S)^2] + ik (2\nabla S \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 S) + \nabla^2 \psi = 0 \quad (7.4.90)$$

Assuming that the k^2 term is the leading term, we obtain

$$\nabla S \cdot \nabla S = 1 \quad (\text{eiconal equation}) \quad (7.4.91)$$

$$ik (2\nabla S \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 S) + \nabla^2 \psi = 0 \quad (7.4.92)$$

We take the solution of (7.4.91) as $S = s + \sigma$. Hence (7.4.92) becomes

$$\left\{ ik \left(2 \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left[\frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] \right\} \psi = 0 \quad (7.4.93)$$

To analyze (7.4.93) near the caustic, we introduce the stretching transformation

$$\tau = k^\lambda \sigma, \quad \lambda > 0$$

and obtain

$$ik^{1+\lambda} \left(2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \psi + \left\{ \frac{k^{2\lambda}}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\rho k^{2\lambda}}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial s} - k^\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial s} - k^\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] \right\} \psi = 0 \quad (7.4.94)$$

The parameter λ is determined by requiring that the highest power of k within the braces (terms neglected in the leading term of the straightforward expansion of the previous section) be equal to the power of k in the first term (i.e., the leading term in the ray expansion). That is, we let

$$1 + \lambda = 4\lambda \text{ or } \lambda = \frac{1}{3} \quad (7.4.95)$$

Then as $k \rightarrow \infty$, (7.4.94) tends to

$$i \left(2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\psi}{\tau} \right) + \frac{\rho^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (7.4.96)$$

Letting

$$\psi = e^{-i\tau^3/3\rho^2} V(z), \quad z = \frac{\tau^2}{\rho\sqrt[3]{4\rho}} \quad (7.4.97)$$

we obtain

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + zV = 0 \quad (7.4.98)$$

whose solutions are the Airy functions $Ai(-z)$ and $Bi(-z)$ (see Section 7.3.1). Had we analyzed the behavior of the solution near a shadow boundary, we would have found that it must be represented by Weber or parabolic cylinder functions. Now we can either match this inner expansion with the outer expansion obtained in the previous section and with another outer expansion inside the caustic (Buchal and Keller, 1960), or form a single uniformly valid expansion imitating the expansions for turning point problems (see Section 7.3).

Following Kravtsov (1964a, b), Ludwig (1966), and Zauderer (1970b), we assume an asymptotic expansion of the form

$$u = e^{ik\theta(\mathbf{r})} \left\{ g(\mathbf{r}, k) V[k^{2/3}\phi(\mathbf{r})] + \frac{1}{ik^{1/3}} h(\mathbf{r}, k) V'[k^{2/3}\phi(\mathbf{r})] \right\} \quad (7.4.99)$$

where θ and ϕ are determined from the analysis and $V(z)$ is given by (7.4.98). Substituting (7.4.99) into (7.4.68), using the fact that $V''' + zV' + V = 0$, and equating the coefficients of V and V' to zero, we obtain

$$\begin{aligned} & -k^2 g [(\nabla\theta)^2 + \phi(\nabla\phi)^2 - 1] - 2k^2 \phi h \nabla\theta \cdot \nabla\phi \\ & + ik [2\nabla\theta \cdot \nabla g + g\nabla^2\theta + 2\phi\nabla\phi \cdot \nabla h + \phi h \nabla^2\phi + h(\nabla\phi)^2] + \nabla^2 g = 0 \\ & -k^2 h [(\nabla\theta)^2 + \phi(\nabla\phi)^2 - 1] - k^2 g \nabla\theta \cdot \nabla\phi \end{aligned} \quad (7.4.100)$$

$$+ ik [2\nabla\phi \cdot \nabla g + g\nabla^2\phi + 2\nabla\theta \cdot \nabla h + h\nabla^2\theta] + \nabla^2 h = 0 \quad (7.4.101)$$

The coefficients of k^2 in (7.4.100) and (7.4.101) vanish if

$$\begin{aligned} (\nabla\theta)^2 + \phi(\nabla\phi)^2 &= 1 \\ \nabla\theta \cdot \nabla\phi &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.102)$$

To solve the resulting equations, we let

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, k) &= g_0(\mathbf{r}) + k^{-1}g_1(\mathbf{r}) + \cdots \\ h(\mathbf{r}, k) &= h_0(\mathbf{r}) + k^{-1}h_1(\mathbf{r}) + \cdots \end{aligned} \quad (7.4.103)$$

and equate coefficients of like powers of k^{-1} . The first-order equations are

$$\begin{aligned} 2\nabla\theta \cdot \nabla g_0 + g_0\nabla^2\theta + 2\phi\nabla\phi \cdot \nabla h_0 + \phi h_0\nabla^2\phi + h_0(\nabla\phi)^2 &= 0 \\ 2\nabla\phi \cdot \nabla g_0 + g_0\nabla^2\phi + 2\nabla\theta \cdot \nabla h_0 + h_0\nabla^2\theta &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.104)$$

Equations (7.4.102) are equivalent to the eiconal equation (7.4.70), while (7.4.104) are equivalent to the transport equation (7.4.71). Similar expansions were obtained by Fowkes (1968, Part II) by using the method of multiple scales.

The system of equations (7.4.102) is a nonlinear system of equations which is elliptic where $\phi < 0$ (shadow region), hyperbolic where $\phi > 0$ (illuminated region), and parabolic where $\phi = 0$ (caustic curve or surface). For a convex analytic caustic, the systems (7.4.102) and (7.4.104) can be solved by expanding θ and ϕ in power series in terms of a coordinate system with respect to the caustic.

To see the connection between the system (7.4.102) and the eiconal equation (7.4.70), we multiply the second equation in (7.4.102) by $\pm 2\sqrt{\phi}$ (illuminated region where $\phi > 0$ is considered) and add the result to the first of these equations to obtain

$$(\nabla\theta \pm \sqrt{\phi}\nabla\phi)^2 = 1$$

or

$$(\nabla S)^2 = 1 \quad (7.4.105)$$

where

$$S^\pm = \theta \pm \frac{2}{3}\phi^{3/2} \quad (7.4.106)$$

Similarly, we multiply the second equation in (7.4.104) by $\pm\sqrt{\phi}$, add the result to the first of these equations, and use $\nabla\theta \cdot \nabla\phi = 0$ to obtain where

$$2\nabla S^\pm \cdot \nabla\psi^\pm + \left[\nabla^2 S^\pm \mp \frac{1}{2}\phi^{-1/2}(\nabla\phi)^2 \right] \psi^\pm = 0 \quad (7.4.107)$$

$$\psi^\pm = g_0 \pm \sqrt{\phi}h_0 \quad (7.4.108)$$

Equation (7.4.107) differs from the transport equation (7.4.71) only by the term $\pm(1/2)\phi^{-1/2}(\nabla\phi)^2$ which makes the coefficient of $\psi^\pm$ bounded near the caustic.

Replacing V and V' by their asymptotic expansions for large argument, we recover the geometrical optics expansion of the previous section ($\phi > 0$, illuminated region). Replacing V and V' by their asymptotic expansions for large argument for the case $\phi < 0$, we obtain an expansion in the shadow region which can be interpreted in terms of complex rays, phases, and transport coefficients.

Uniform asymptotic expansions for wave propagation and diffraction problems were reviewed by Ludwig (1970b) and Babich (1970, 1971). The role of coordinate systems in rendering the expansions uniformly valid was investigated by Zauderer (1970a).

A single uniformly valid expansion for a point source problem was obtained by Babich (1965), while three matched expansions for this problem were presented by Avila and Keller (1963).

Problems of diffraction by convex objects were treated by Zauderer (1964b), Buslaev (1964), Grimshaw (1966), Ludwig (1967), and Lewis, Bleistein and Ludwig (1967) among others. Diffraction by a transparent object was analyzed by Rulf (1968).

Uniform expansions for the problem of diffraction near the concave side of an object (whispering gallery modes) were obtained by Kravtsov (1964b), Matkowsky (1966), and Ludwig (1970a) among others.

Characteristic transition regions in which two caustics are near each other are analogous to second-order turning points. Their uniform expansions involve Weber or parabolic cylinder functions. Some of these problems were treated by Kravtsov (1965), Babich and Kravtsova (1967), Weinstein (1969), and Zauderer (1970a, b).

Diffraction by a thin screen (Fresnel diffraction) was investigated by Wolfe (1967), Kersten (1967), and Ahluwalia, Lewis, and Boersma (1968).

Multiple transition regions arise from the tangential intersection of two or more caustics and shadow boundaries, such as near terminated caustics (Levey and Felsen, 1967), cusps on caustics (Ludwig, 1966), and points of diffraction for smooth objects (Ludwig, 1967). Problems involving transition regions were treated by Zauderer (1964a, 1970a), Fock (1965), Rulf (1967), and Bleistein (1967) among others.

7.4.6. The Method of Smoothing

To apply this technique to (7.4.3) with $n^2(\mathbf{r})$ a centered random function, we first convert it to the integral equation

$$u = Mg - \epsilon k^2 M \chi u \quad (7.4.109)$$

where the operator M is defined by

$$Mg = \int_V g(\mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \quad (7.4.110)$$

with G_0 the free-space Green's function. Frisch (1968) pointed out that many other linear equations of mathematical physics, such as the Liouville equation for an ensemble of classic interacting particles, the Hopf equation for turbulence, and the Fokker-Planck equation, can be put in the above integral equation form.

In general, we are not interested in the function u but in its projection Pu on a subspace of the original space over which u is defined. For example, in the problem of wave propagation in a random medium, $Pu = \langle u \rangle$, while in the case of N interacting particles, Pu is the N -particle velocity distribution function obtained by integrating u over all position coordinates. Let

$$Pu = u_c, \quad \text{and} \quad u_i = (I - P)u \quad (7.4.111)$$

For wave propagation in a random media, u_c is the coherent part of the field (mean part) while u_i is the incoherent part (fluctuating part). For a deterministic g and a centered random χ

$$Pg = g, \quad PM = MP, \quad P\chi P = 0 \quad (7.4.112)$$

Applying the operator P from the left on (7.4.109), we obtain

$$\begin{aligned} u_c &= Mg - \epsilon k^2 MP\chi(Pu + u_i) \\ &= Mg - \epsilon k^2 MP\chi u_i \end{aligned} \quad (7.4.113)$$

Applying the operator $I - P$ from the left on (7.4.109) also, we obtain

$$u_i = -\epsilon k^2 M(I - P)\chi(u_c + u_i) = -\epsilon k^2 M(I - P)\chi u_c - \epsilon k^2 M(I - P)\chi u_i \quad (7.4.114)$$

We solve (7.4.114) by formal iteration for u_i in terms of u_c to obtain

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n u_c \quad (7.4.115)$$

Substituting for u_i into (7.4.113) gives

$$u_c = Mg - \left\{ \epsilon k^2 MP\chi \sum_{n=1}^{\infty} [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n \right\} u_c$$

Since $u_c = Pu_c$, this equation can be written as

$$u_c = Mg + MQu_c \quad (7.4.116)$$

where

$$Q = - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon k^2 P \chi [-\epsilon k^2 M(I - P)\chi]^n P \quad (7.4.117)$$

For random operators (7.4.116) is just the Dyson equation (7.4.49) with Q the mass operator.

This technique was called the method of smoothing by Frisch (1968) because it is the counterpart of the method of averaging (Chapter 5) in which the dependent variables have short- and long-period parts. This

technique was first introduced by Primas (1961), Ernst and Primas (1963), and Tatarski and Gertsenshtein (1963) for random equations, and by Zwanzig (1964) for the Liouville equation.

The first-order smoothing is given by (7.4.116), with $n = 1$ in (7.4.117); that is

$$Q = \epsilon^2 k^4 P \chi M(I - P)\chi P = \epsilon^2 k^4 P \chi M \chi P$$

Hence

$$u_c = Mg + \epsilon^2 k^4 M P \chi M \chi P u_c \quad (7.4.118)$$

which coincides with the Bourett equation (7.4.54) for linear random media, and with the Landau equation for the Liouville problem (see, for example, Prigogin 1962). For linear random media this first approximation was also obtained by Keller (1962) and Kubo (1963).

9.7.5 Exercises

7.1. Determine asymptotic expansions for large x for the solutions of

- (a) $y'' - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$
- (b) $y'' - \left(4x^2 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$
- (c) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
- (d) $y'' + \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$
- (e) $y'' + xy' + y = 0$

7.2. Determine asymptotic expansions for large x for the solutions of

- (a) $y'' \pm \left(\frac{1}{4x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$
- (b) $y'' \pm \left(\frac{9}{4}x + 1\right)y = 0$
- (c) $y'' + xy' + \frac{25}{4}x^3 y = 0$
- (d) $y'' + x^{-1/3}y' + x^{-2}y = 0$

7.3. Consider the equation

$$y'' - \lambda^2 x^{-2} y = 0$$

(a) Show that the exact solution is

$$y = ax^{m_1} + bx^{m_2}$$

where $m_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}}$.

- (b) Determine the first WKB approximation.
 - (c) Compare this approximation with the exact solution (Jeffreys, 1962).
- 7.4. Determine a first approximation to the eigenvalue problem

$$u'' + \lambda^2 f(x)u = 0, \quad f(x) > 0$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

for large λ .

7.5. Consider the problem

$$u'' + \left[f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n g_n(x) \right] u = 0$$

Let

$$u = w(x)e^{\phi(x,\epsilon)}, \quad \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \phi_n(x)$$

where

$$w'' + f(x)w = 0$$

Determine an equation for ϕ and then determine the ϕ_n (Brull and Soler, 1966).

7.6. Determine a uniform asymptotic expansion for

$$\ddot{u} + \omega^2(\epsilon t)u = f(\epsilon t)$$

where ϵ is a small parameter and f is a bounded nonperiodic function of t .

7.7. Consider the problem

$$\ddot{u} + \omega^2(\epsilon t)u = k \cos \phi$$

where $\phi = \lambda(\epsilon t)$. Determine uniform asymptotic expansions for the cases (a) λ is not near ω , and (b) $\lambda = \omega$ for some $t = t_0 > 0$ (Kevorkian, 1971).

7.8. Consider the problem

$$\ddot{u} - i[\omega_1(\epsilon t) + \omega_2(\epsilon t)]\dot{u} - \omega_1(\epsilon t)\omega_2(\epsilon t)u = f(\epsilon t)$$

where overdots denote differentiation with respect to t and ϵ is a small parameter. Determine uniform asymptotic approximations to the solution of this equation if (a) $f(\epsilon t) = 0$, (b) $f(\epsilon t)$ is a bounded nonperiodic function of t , (c) $f(\epsilon t) = k \exp(i\phi)$ with $\phi = \lambda(\epsilon t) \neq \omega_i$, and (d) $f(\epsilon t)$ has the same form as in (c) but $\lambda = \omega_1$ at some $t = t_0$.

7.9. Determine a uniform asymptotic expansion for the general solution of

$$\epsilon^2 y'' + \epsilon(2x+1)y' + 2xy = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

7.10. Bessel functions $J_n(nx)$, $Y_n(nx)$, $H_n^{(1,2)}(nx)$ are solutions of the differential equation

$$x^2 y'' + xy' + n^2(x^2 - 1)y = 0$$

Determine a uniform asymptotic expansion for the general solution of this equation for large n .

7.11. Determine uniform asymptotic expansions for small ϵ for the solutions of

$$y'' + \frac{x(1+x) - \epsilon\alpha}{(1+x)^2}y = 0, \quad -1 < x < \infty$$

where α is a constant.

7.12. Consider the Graetz problem for heat transfer in a duct

$$u'' + \lambda^2 (1 - x^2) f(x) u = 0$$

$$u(1) = u(-1) = 0$$

where $\lambda \gg 1$ and $f(x) = f(-x) > 0$. Determine a first approximation to λ and the eigenfunctions using (a) the method of matched asymptotic expansions (Sellers, Tribus, and Klein 1956), and (b) the method of multiple scales or Langer's transformation (Nayfeh, 1965b).

7.13. Given that $f(x) > 0$ and $\lambda \gg 1$, determine first approximations to the following eigenvalue problems

(a) $y'' + \lambda^2(1 - x)f(x)y = 0$

$y(0) = 0$ and $y(\infty) < \infty$

(b) $xy'' + y' + \lambda^2 xf(x)y = 0$

$y(1) = 0$ and $y(0) < \infty$

(c) $y'' + \lambda^2(1 - x)^n f(x)y = 0$, n is a positive integer

$y(0) = 0$ and $y(\infty) < \infty$

(d) $xy'' + y' + \lambda^2 x^n f(x)y = 0$, n is a positive integer

$y(1) = 0$ and $y(0) < \infty$

(e) $y'' + \lambda^2(x - 1)^n(2 - x)^m f(x)y = 0$, m and n are positive integers $y < \infty$ for all x .

7.14. Consider the Graetz problem for heat transfer in a pipe

$$ru'' + u' + \lambda^2 r(1 - r^2) f(r)u = 0$$

$$u(1) = 0, \quad u(0) < \infty$$

where $\lambda \gg 1$ and $f(r) > 0$. (a) Determine an expansion valid away from $r = 0$ and $r = 1$; (b) determine expansions valid near $r = 0$ and $r = 1$; (c) match these three expansions, hence determine λ , and form a uniformly valid composite expansion (Sellers, Tribus, and Klein, 1956).

7.15. Consider Exercise 7.14 again. (a) Determine an expansion valid away from $r = 0$ using Langer's transformation; (b) determine an expansion valid away from $r = 1$ using Olver's transformation; (c) match these two expansions to determine λ , (d) form a composite uniformly valid expansion; and (e) compare these results with those of Exercise 7.14.

7.16. Consider the problem

$$y'' - \lambda^2(x - 1)(2 - x)y = 0$$

Determine an approximate solution to y if $\lambda \gg 1$, and $y < \infty$ for all x .

7.17. Consider the problem

$$u'' + \lambda^2(1 - x)^n(x - \mu)^m f(x)u = 0$$

$$u(1) = u(\mu) = 0$$

where $\lambda \gg 1$, $f(x) > 0$, n and m are positive integers, and $\mu < 1$. Determine expansions valid away from $x = \mu$ and $x = 1$ using Olver's transformation, match them to determine λ , and then form a composite expansion.

7.18. Consider the problem

$$ru'' + \mu u' + \lambda r^n(1 - r)^m f(r)u = 0, \quad u(1) = 0 \text{ and } u(0) < \infty$$

where $\lambda \gg 1$, $f(r) > 0$, μ is a real number, and n and m are positive integers. Determine expansions valid away from $r = 0$ and 1 using Olver's transformation, match them to determine λ , and then form a composite expansion (Nayfeh, 1967a).

7.19. Given that $f(x) > 0$ and $\lambda \gg 1$, determine first approximations to the eigenvalue problems

(a) $xy'' + y' + \lambda^2 x(1 - x)f(x)y = 0$

(b) $xy'' + y' + \lambda^2 x^n(1-x)^m f(x) = 0$, m and n are positive integers subject to the condition that $y < \infty$ for $x \geq 0$.

7.20. How would you go about determining a particular solution for

$$u'' + \lambda^2 z^3 u = \lambda^2 g(z)$$

when $\lambda \gg 1$ if (a) $g(0) \neq 0$, (b) $g(0) = 0$ but $g'(0) \neq 0$, (c) $g(0) = g'(0) = 0$ but $g''(0) \neq 0$, and (d) $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$?

This Page Intentionally Left Blank

9.7.6 References And Author Index

- Ablowitz, M. J., and D. J. Benney, (1970). The evolution of multi-phase modes for nonlinear dispersive waves. *Stud. Appl. Math.*, 49, 225-238. [234]
- Abraham-Shrauner, B. (1970a). Suppression of runaway of electrons in a Lorentz plasma. I. Harmonically time varying electric field. *J. Plasma Phys.*, 4, 387-402. [235]
- Abraham-Shrauner, B. (1970b). Suppression of runaway of electrons in a Lorentz plasma. II. Crossed electric and magnetic fields. *J. Plasma Phys.* 4, 441-450. [235]
- Ackerberg, R. C., and R. E. O'Malley, Jr. (1970). Boundary layer problems exhibiting resonance. *Stud. Appl. Math.*, 49, 277-295. [233]
- Ahluwalia, D. S., R. M. Lewis, and J. Boersma, (1968). Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen. *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 783-807 [380]
- Akins, R. G. See Chang, Akins, and Bankoff.
- Akinsete, V. A., and J. H. S. Lee, (1969). Nonsimilar effects in the collapsing of an empty spherical cavity in water. *Phys. Fluids*, 12, 428-434 [78]
- Albright, N. W. (1970). Quasilinear stabilization of the transverse instability. *Phys. Fluids*, 13 1021-1030.[235]
- Alfriend, K. T. (1970). The stability of the triangular Lagrangian points for commensurability of order two. *Celestial Mech.*, 1, 351-359. [233]
- Alfriend, K. T. (1971a). Stability and motion in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems for two-to-one commensurability. *Celestial Mech.*, 3, 247-265. [233]
- Alfriend, K. T. (1971b). Stability of and motion about L_4 at three-to-one commensurability. *Celestial Mech.*, 4, 60-77. [233]
- Alfriend, K. T. See Davis and Alfriend.
- Alfriend, K. T., and R. H. Rand, (1969). Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. *AIAA J.*, 7, 1024-1028. [233, 260, 262, 276]
- Al'tshul', L. M., and V. I. Karpman, (1966). Theory of nonlinear oscillations in a collisionless plasma. *Soviet Phys. JETP (English transl.)*, 22, 361-369. [369]
- Alzheimer, W. E., and R. T. Davis, (1968). Unsymmetrical bending of prestressed annular plates. *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 4, 905-917. [35, 128]
- Amazigo, J. C., B. Budiansky, and G. F. Carrier (1970). Asymptotic analyses of the buckling of imperfect columns on nonlinear elastic foundations. *Int. J. Solids Structures*, 6, 1341-1356. [233]
- Anderson, W. J. See Spriggs, Messiter, and Anderson.
- Asano, N. (1970). Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media. III. *J. Phys. Soc. Japan*, 29, 220-224. [78]
- Asano, N. and T. Taniuti, (1969). Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media. I. *J. Phys. Soc. Japan*, 27, 1059-1062.
- Asano, N., and T. Taniuti (1970). Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media II. *J. Phys. Soc. Japan*, 29, 209-214. [78]
- Ashley, H. (1967). Multiple scaling in flight vehicle dynamic analysis - a preliminary look.

AIAA Paper No. 67-560. [233]

Avila, G. S. S., and J. B. Keller, (1963). The high frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium. *Comm. Pure Appl. Math.*, 16, 363-381. [380]

Babich, V. M. (1965). A point source in an inhomogeneous medium. *Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 5, 949-951; English transl., *USSR Computer Math. Math. Phys.*, 5, 247-251. [380]

Babich, V. M. (1970). *Mathematical Problems in Wave Propagation Theory, Part I*. Plenum, New York. [361, 380]

Babich, V. M. (1971). *Mathematical Problems in Wave Propagation Theory. Part II*. Plenum, New York. [361, 380]

Babich, V. M., and T. S. Kravtsova, (1967). Propagation of wave film type oscillations of quantized thickness. *PMM*, 31, 204-210. [380]

Balescu, R. (1963). *Statistical Mechanics of Charged Particles*. Wiley, New York. [367, 369]

Ball, R. H. (1964). Nonlinear theory of waves in a cold homogeneous plasma without magnetic field. *Stanford Microwave Laboratory Rept. No. 1200*. [234]

Bankoff, S. G. See Chang, Akins, and Bankoff.

Barakat, R., and A. Houston, (1968). Nonlinear periodic capillary-gravity waves on a fluid of finite depth. *J. Geophys. Res.*, 73 6545-6554. [77]

Barcion, V. (1970). Some inertial modifications of the linear viscous theory of steady rotating fluid flows. *Phys. Fluids*, 13, 537-544. [235]

Barrar, R. B. (1970). Convergence of the von Zeipel procedure. *Celestial Mech.*, 2, 494-504. [192]

Barua, S. N. (1954). Secondary flow in a rotating straight pipe. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A227, 133-139. [79]

Bauer, H. F. (1968). Nonlinear response of elastic plates to pulse excitations. *J. Appl. Mech.*, 35, 47-52. [58]

Bellman, R. (1955). Research problems. *Bull. Am. Math Soc.*, 61, 192. [22]

Bellman, R. (1964). *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering*. Holt, New York. [309]

Benney, D. J. (1965). The flow induced by a disk oscillating about a state of steady rotation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 18, 333-345. [235]

Benney, D. J. (1966). Long waves on liquid films. *J. Math. and Phys.* 45, 150-155. [41]

Benney, D. J. (1967). The asymptotic behavior of nonlinear dispersive waves. *J. Math. and Phys.*, 46, 115-132. [234]

Benney, D. J. See Ablowitz and Benney.

Benney, D. J., and A. C. Newell, (1967). Sequential time closures for interacting random waves. *J. Math. and Phys.*, 46, 363-393. [234]

Benney, D. J., and A. C. Newell, (1969). Random wave closures. *Stud. Appl. Math.*, 48, 29-53. [234]

Benney, D. J., and G. J. Roskes, (1969). Wave instabilities. *Stud. Appl. Math.*, 48, 377-385. [235]

Benney, D. J. and P. G. Saffman, (1966). Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A.289, 301-320. [234]

Bethe, H. A. See Salpeter and Bethe.

Bisshopp, F. (1969). A modified stationary principle for nonlinear waves. *J. Diff. Equations*, 5, 592-605. [216]

Bleistein, N. (1967). Uniform asymptotic expansions of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities. *J. Math. Mech.*, 17, 533-559. [380]

Bleistein, N. See Lewis, Bleistein, and Ludwig.

Boersma, J. See Ahluwalia, Lewis, and Boersma.

Bogoliubov, N. N. See Krylov and Bogoliubov.

- Bogoliubov, N. N., and Y. A. Mitropolski, (1961). Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations. Gordon and Breach, New York. [168, 174.]
- Bohlin, K. P. (1889). Uber eine neue Annaherungsmethode in der Störungstheorie, Akad Handl. Bihang., 14, (Afdl, Stokholm). [56]
- Born, M. (1926). Quantum mechanics of impact processes. Z. Phys., 38, 803-827. [362]
- Bourret, R. C. (1962a). Propagation of randomly perturbed fields. Can. J. Phys., 40, 782-790. [367, 369, 372]
- Bourret, R. C. (1962b) Stochastically perturbed fields, with applications to wave propagation in random media. Nuovo Cimento, 26, 1-31. [] 367, 369, 372]
- Brau, C. A. (1967). On the stochastic theory of dissociation and recombination of diatomic molecules in inert dilutens. J. Chem. Phys, 47, 1153-1163. [235]
- Breakwell, J. V., and L. M. Perko, (1966). Matched asymptotic expansions, patched conics, and the computation of interplanetary trajectories. In Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 17, Method in Astrodynamics and Celestial Mechanics (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, Eds.), Academic, New York, pp. 159-182. [138]
- Breakwell, J. V., and R. Pringle, Jr.(1966). Resonances affecting motion near the earth-moon equilateral libration points. In Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 17, Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, Eds.), Academic, New York, pp. 55-74. [199]
- Bretherton, F. P. (1962). Slow viscous motion round a cylinder in a simple shear. J. Fluid Mech., 12, 591-613. [110]
- Bretherton, F. P. (1964). Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations. J. Fluid Mech., 20, 457-479. [217, 227, 267, 298]
- Bretherton, F. P. (1968). Propagation in slowly varying waveguides Proc. Roy. Soc. (London), A 302, 555-576. [216]
- Bretherton, F. P., and C. J. R. Garrett (1968). Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proc. Roy. Soc. (London), A302, 529-554. [216]
- Brillouin, L. (1926). Remarques sur la mecanique ondulatoire. J. Phys. Radium, 7, 353-368. [114, 315, 339]
- Brofman, S. See Ting and Brofman.
- Brofman, W. (1967). Approximate analytical solution for satellite orbits subjected to small thrust or drag. AIAA J., 5, 1121-1128. [233]
- Bromberg, E. (1956). Nonlinear bending of a circular plate under normal pressure. Comm. Pure Appl. Math., 9, 633-659. [144, 146]
- Brown, W. P., Jr. (1966). Validity of the Rytov approximation in optical propagation calculations. J. Opt. Soc. Am., 56, 1045-1052. [373]
- Brown, W. P., Jr. (1967). Validity of the Rytov approximation. J. Opt. Soc. Am. 57, 1539-1543. [373]
- Brull M. A., and A. I. Soler, (1966). A new perturbation technique for differential equations with small parameters. Quart. Appl. Math., 24, 143-151. [383]
- Buchal, R. N., and J. B. Keller, (1960). Boundary layer problems in diffraction theory. Comm. Pure Appl. Math., 13, 85-144. [378]
- Budiansky, B. See Amazigo, Budiansky, and Carrier.
- Burnside, R. R. (1970). A note on Lighthill's method of strained coordinates. SIAM J. Appl. Math., 18, 318-321. [79, 107]
- Buslaev, N. S. (1964). On formulas of short wave asymptotics in the problem of diffraction by convex bodies. Akad. Nauk SSSR Trudy Mat. Inst. Steklov, 73, 14-117. [380]
- Butler, D. S., and R. J. Gribben (1968). Relativistic formulation for non-linear waves in a non-uniform plasma. J. Plasma Phys, 2, 257-281. [234]
- Caldirola, P., O. De Barbieri, and C. Maroli, (1966). Electromagnetic wave propagation in a

- weakly ionized plasma. I. *Nuovo Cimento*, B42, 266-289. [236]
- Campbell, J. A., and W. H. Jefferys, (1970). Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit. *Celestial Mech.* 2, 467-473. [202]
- Carlini, F. (1817). Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero. *Memoria di Francesco Carlini*, Milano; also *Jacobi's Ges Werke*, 7, 189-245; also *Astron. Nachrichten*, 30, 197-254. [315]
- Carrier, G. F. (1953). Boundary layer problems in applied mechanics. *Advan. Appl. Mech.*, 3, 1-19. [119]
- Carrier, G. F. (1954). Boundary layer problems in applied mathematics. *Comm. Pure Appl. Math.* , 7, 11-17 [114]
- Carrier, G. F. (1966). Gravity waves on water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, 24, 641-659. [234]
- Carrier, G. F. (1970). Singular perturbation theory and geophysics. *SIAM Rev.*, 12, 175-193. [110]
- Carrier, G. F. See Amazigo, Budiansky, and Carrier.
- Cashwell, E. D. (1951). The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular. *Pacific J. Math.*, 1, 337-353. [358]
- Caughey, T. K. See Tso and Caughey.
- Caughey, T. K., and H. J. Payne, (1967). On the response of a class of self-excited oscillators to stochastic excitation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2, 125-151. [235]
- Cesari, L. (1971). *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. [309]
- Chang, K. S., R. G. Akins, and S. G. Bankoff, (1966). Free convection of a liquid metal from a uniformly heated vertical plate. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 5, 26-37. [79]
- Chen, C. S. (1971). Parametric excitation in an inhomogeneous plasma. *J. Plasma Phys.*, 5, 107-113. [235]
- Chen, C. S., and G. J. Lewak, (1970). Parametric excitation of a plasma. *J. Plasma Phys.*, 4, 357-369. [235]
- Cheng, H. and T. T. Wu (1970). An aging spring. *Stud. Appl. Math.*, 49, 183-185. [232]
- Cheng, H. K., J. W. Kirsch, and R. S. Lee, (1971). On the reattachment of a shock layer produced by an instantaneous energy release. *J. Fluid Mech.*, 48, 241-263, [235]
- Cheng, S. I. See Goldberg and Cheng.
- Chernov, L. A. (1960). *Wave Propagation in a Random Medium*. Dover, New York. [361, 373]
- Cherry, T. M. (1927). On the transformation of Hamiltonian systems of linear differential equations with constant or periodic coefficients. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 26, 211-230. [199]
- Cherry, T. M. (1949). Uniform asymptotic expansions. *J. London Math. Soc.*, 24, 121-130. [346]
- Cherry, T. M. (1950). Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. *Trans. Am. Math. Soc.*, 68, 224-257. [346]
- Chong, T. H., and L. Sirovich, (1971). Non-linear effects in steady supersonic dissipative gas dynamics. Part 1 -Two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, 50, 161-176. [235]
- Chu, B. T. (1963). Analysis of a self-sustained thermally driven nonlinear vibration. *Phys. Fluids*, 6 1638-1644. [89]
- Chu, B. T., and S. J. Ying, (1963). Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with travelling shock waves. *Phys. Fluid* 6, 1625-1637. [89]
- Chu, V. H., and C. C. Mei (1970). On slowly-varying Stokes waves. *J. Fluid Mech.*, 41, 873-887. [234]
- Chudov, L. A. (1966). Some shortcomings of classical boundary layer theory. NASA (transl.) TT F-360, TT 65-50138. [145]
- Clare, T. A. (1971). Resonance instability for finned configurations having nonlinear aerody-

- dynamic properties. *J. Spacecraft Rockets*, 8, 278-283. [305]
- Clark, R. A. (1958). Asymptotic solutions of toroidal shell problems. *Quart. Appl. Math.*, 16, 47-60. [353]
- Clark, R. A. (1963). Asymptotic solutions of a nonhomogeneous differential equation with a turning point. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 12, 34-51. [353, 356]
- Clark, R. A. (1964). Asymptotic solutions of elastic shell problems. in *Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications* (C. H. Wilcox, Ed.), Wiley, New York, pp. 185-209. [353]
- Coakley, T. J. (1968). Dynamic stability of symmetric spinning missiles. *J. Spacecraft Rockets*, 5, 1231-1232. [321]
- Cochran, J. A. (1962). Problems in singular perturbation theory. Ph. D. Thesis, Stanford University. [232, 233, 234, 280, 285]
- Coddington, E. A., and N. Levinson, (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York. [60, 62]
- Coffey, T. P., Jr. (1969). Invariants to all orders in classical perturbation theory. *J. Math. Phys.*, 10, 426-438. [199]
- Cole, J. D. (1968). *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell, Waltham, Mass.
- Cole, J. D. See Lagerstrom and Cole.
- Cole, J. D., and J. Kevorkian, (1963). Uniformly valid asymptotic approximations for certain nonlinear differential equations. *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics* (J. P. LaSalle and S. Lefschetz, Eds.), Academic, New York, pp. 113-120. [231, 232, 273]
- Comstock, C. (1968). On Lighthill's method of strained coordinates. *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 596-602. [79, 107]
- Comstock, C. (1971). Singular perturbations of elliptic equations. I. *SIAM J. Appl. Math.*, 20, 491-502. [234]
- Contopoulos, G. (1963). On the existence of a third integral of motion. *Astron. J.*, 68, 1-14. [199]
- Crane, L. J. (1959). A note on Stewartson's paper "On asymptotic expansions in the theory of boundary layers." *J. Math. and Phys.*, 38, 172-174. [79]
- Crapper, G. D. (1970). Nonlinear capillary waves generated by steep gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 40, 149-159. [217]
- Crawford, F. W. See Galloway and Crawford.
- Crocco, L. See Sirignano and Crocco.
- Das, K. P. (1971). Interaction among three extraordinary waves in a hot electron plasma. *Phys. Fluids*, 14, 124-128. [234]
- Davidson, R. C. (1967). The evolution of wave correlations in uniformly turbulent, weakly nonlinear systems. *J. Plasma Phys.*, 1, 341-359. [234]
- Davidson, R. C. (1968). Nonlinear oscillations in a Vlasov-Maxwell plasma. *Phys. Fluids*, 11, 194-204. [234]
- Davidson, R. C. (1969). General weak turbulence theory of resonant fourwave processes. *Phys. Fluids*, 12, 149-161. [234]
- Davis, R. T. See Alzheimer and Davis; Wingate and Davis.
- Davis, R. T., and K. T. Alfriend, (1967). Solutions to van der Pol's equation using a perturbation method. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2, 153-162. [232]
- Davison, L. (1968). Perturbation theory of nonlinear elastic wave propagation. *Int. J. Solids Structures*, 4, 301-322. [90, 91, 94]
- De Barbieri, O. See Caldirola, De Barbieri, and Maroli.
- De Barbieri, O., and C. Maroli, (1967). On the dynamics of weakly ionized gases. *Ann. Phys.*, 42, 315-333. [236]
- De Bruijn, N. G. (1958). *Asymptotic Methods in Analysis*. North-Holland, Amsterdam; Inter-

- science, New York. [18]
- Deprit, A. (1969). Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mech.*, 1, 12-30. [199, 201, 202, 205, 212]
- Dewar, R. L. (1970). Interaction between hydromagnetic waves and a time-dependent, inhomogeneous medium. *Phys. Fluids*, 13, 2710-2720. [217]
- DeWolf, D. A. (1965). Wave propagation through quasi-optical irregularities. *J. Opt. Soc. Am.*, 55, 812-817. [373]
- DeWolf, D. A. (1967). Validity of Rytov's approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 1057-1058. [373]
- DiPrima, R. C. (1969). Higher order approximations in the asymptotic solution of the Reynolds equation for slider bearings at high bearing numbers. *J. Lubrication Technology*, 91, 45-51. [125]
- Dirac, P. A. M. (1926). On the theory of quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A112, 661-677. [161]
- Dobrowolny, M., and A. Rogister, (1971). Non-linear theory of hydromagnetic waves in a high β plasma. *J. Plasma Phys.*, 6, 401-412. [235]
- Dorodnicyn, A. A. (1947). Asymptotic solution of van der Pol's equation. *J. Appl. Math. Mech.*, 11, 313-328; *Am. Math. Soc. Transl.*, 88, 1953. [114]
- Dougherty J. P. (1970). Lagrangian methods in plasma dynamics. I. General theory of the method of the averaged Lagrangian. *J. Plasma Phys*, 4, 761-785. [217]
- Drazin, P. G. (1969). Nonlinear internal gravity waves in a slightly stratified atmosphere. *J. Fluid Mech.*, 36, 433-446. [216]
- Dyson, F. J. (1949). The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Phys. Rev.*, 75, 486-502. [371]
- Eckhaus, W. (1965). *Studies in Nonlinear Stability Theory*. Springer-Verlag, New York. [162]
- Eckstein, M. C. See Shi and Eckstein.
- Eckstein, M. C. and Y. Y. Shi (1967). Low-thrust elliptic spiral trajectories of a satellite of variable mass. *AIAA J.*, 5, 1491-1494. [233]
- Eckstein, M. C., Y. Y. Shi, and J. Kevorkian, (1966a). A uniformly valid asymptotic representation of satellite motion around the smaller primary in the restricted three-body problem. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, Eds.), Academic, New York, pp. 183-198. [233, 276]
- Eckstein, M. C., Y. Y. Shi, and J. Kevorkian, (1966b). Satellite motion for arbitrary eccentricity and inclination around the smaller primary in the restricted three-body problem. *Astron. J.*, 71, 248-263. [233]
- Eckstein, M. C., Y. Y. Shi, and J. Kevorkian (1966c). Use of the energy integral to evaluate higher-order terms in the time history of satellite motion. *Astron. J.*, 71, 301-305. [233]
- Einaudi, F. (1969). Singular perturbation analysis of acoustic-gravity waves. *Phys. Fluids*, 12, 752-756. [78]
- Einaudi, F. (1970). Shock formation in acoustic gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 75, 193-200. [78]
- Emanuel, G. (1966). Unsteady, diffusing, reacting tubular flow with application to the flow in a glow discharge tube. *Aerospace Corporation Rept. No. TR-669 (6240-20)-9*. [99]
- Emery, V. J. (1970). Eikonal approximation for nonlinear equations. *J. Math. Phys.*, 11, 1893-1900. [234]
- Erdlyi, A. (1956). *Asymptotic Expansions*. Dover, New York. (18, 309, 337)
- Erdlyi, A. (1960). Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities. *J. Math. Phys.*, 1, 16-26. [358]
- Erdlyi, A. (1961). An expansion procedure for singular perturbations. *Atti. Accad. Sci.*

- Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 95, 651-672. [113, 121]
- Ernst, R. R., and H. Primas (1963). Nuclear magnetic resonance with stochastic high-frequency fields. *Helv. Phys. Acta.*, 36, 583-600. [382]
- Espedal, M. S. (1971). The effects of ion-ion collision on an ion-acoustic plasma pulse. *J. Plasma Phys.*, 5, 343-355. [78]
- Euler, L. (1754). *Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae*, 5, 205-237; *Opera Omnia*, Ser. 1. 14, 585-617. [11]
- Evensen, D. A. (1968). Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions. *AIAA J.*, 6, 370-372. [106]
- Evgrafov, M. A., and M. B. Fedoryuk, (1966). Asymptotic behavior of solutions of the equation $w''(z) - p(z', \lambda) w(z) = 0$ as $\lambda \rightarrow \infty$ in the complex z -plane. *Usp. Mat. Nauk*, 21, 3-50. [345]
- Faa De Bruno, F. (1857). Note sur une nouvelle formule de calcul differentiel. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1, 359-360. [192]
- Fedoryuk, M. B. See Evgrafov and Fedoryuk.
- Felsen, L. B. See Levey and Felsen.
- Feshchenko, S. F., N. I. Shkil', and L. D. Nikolenko, (1967). *Asymptotic Methods in the Theory of Linear Differential Equations*. American Elsevier, New York. [309, 319]
- Feynman, R. P. (1948). Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Modern Phys.*, 20, 367-387. [366]
- Fife, P. See Pierson and Fife.
- Fock, V. A. (1965). *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*. Pergamon, New York. [380]
- Fowkes, N. D. (1968). A singular perturbation method. Parts I and II. *Quart. Appl Math.*, 26, 57-69, 71-85. [232, 234, 379, 285]
- Fowler, R. H., and C. N. H. Lock, (1921). Approximate solutions of linear differential equations. *Proc. London Math. Soc.*, 20, 127-147. [321, 322]
- Fowler, R. H., E. G. Gallop, C. N. H. Lock, and H. W. Richmond (1920). The aerodynamics of a spinning shell. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 221, 295-387. [321, 322]
- Fox, P. A. (1953). On the use of coordinate perturbations in the solution of physical problems. Project DIC 6915 Technical Rept. No. 1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. [98]
- Fox, P. A. (1955). Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics. *J. Math. and Phys.*, 34, 133-151. [57, 87, 89]
- Fraenkel, L. E. (1969). On the method of matched asymptotic expansions, Parts I-III. *Proc. Cambridge Phil Soc.*, 65, 209-231, 233-251, 263-284. [119]
- Freeman, N. C., and R. S. Johnson, (1970). Shallow water waves on shear flows. *J. Fluid Mech.*, 42, 401-409. [234]
- Fried, D. L. (1967). Test of the Rytov approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 268-269. [373]
- Friedrichs, K. O. (1942). *Theory of viscous fluids*. Fluid Dynamics. Brown University Press, Providence, R. I., Chapter 4. [119]
- Friedrichs, K. O. (1955). Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bull. Am. Math. Soc.*, 61, 485-504. [18]
- Frieman, E. A. (1963). On a new method in the theory of irreversible processes. *J. Math. Phys.*, 4, 410-418. [230]
- Frieman, E. A., and P. Rutherford, (1964). Kinetic theory of a weakly unstable plasma. *Ann. Phys.*, 28, 134-177. [235]
- Frisch, U. (1965). *Wave Propagation in Random Media*. Institut d'Astrophysique, Paris. [367, 369]
- Frisch, U. (1968). Wave propagation in random media. *Probability Methods in Applied Mathematics*, Vol. 1 (A. T. Bharucha-Reid, Ed.), Academic, New York, pp. 75-198. [309, 361, 364,

365, 367, 372, 380, 381]

Frobenius, G. (1875). *Veber die regulen Integrale der linearen Differentialgleichungen.* J. Reine Angew. Math., 80, 317-333. [310]

Furutsu, K. (1963). On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium. J. Res. Natl. Bur. Standards, Sec. D, 67, 303-323. [367, 369]

Gallop, E. G. See Fowler, Gallop, Lock, and Richmond.

Galloway, J. J., and F. W. Crawford, (1970). Lagrangian derivation of wave-wave coupling coefficients. Proc. 4th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Rome (CHEN), 161. [217]

Galloway, J. J. and H. Kim, (1971). Lagrangian approach to non-linear wave interactions in a warm plasma. J. Plasma Phys., 6 53-72. [217]

Gans, R. (1915). Propagation of light through an inhomogeneous media. Ann. Phys., 47, 709-736. [114, 339]

Garrett, C. J. R. (1968). On the interaction between internal gravity waves and a shear flow. J. Fluid Mech. 34, 711-720. [216]

Garrett, C. J. R. See Bretherton and Garrett.

Germain, P. (1967). Recent evolution in problems and methods in aerodynamics. J. Roy. Aeron. Soc., 71, 673-691. [110, 235]

Gertsenshtein, M. E. See Tatarski and Gertsenshtein.

Giacaglia, G. E. O. (1964). Notes on von Zeipel's method. NASA X-547-64-161. [191]

Golay, M. J. E. (1964). Normalized equations of the regenerative oscillator-noise, phase-locking, and pulling. Proc. IEEE, 52, 1311-1330. [258]

Goldberg, P., and G. Sandri, (1967). Power series of kinetic theory. Parts I and II. Phys. Rev., L154, 188-209. [236]

Goldburg, A., and S. I. Cheng, (1961). The anomaly in the application of Poincar-Lighthill-Kuo and parabolic coordinates to the trailing edge boundary layer. J. Math. Mech., 10, 529-535. [79]

Goldstein H. (1965). *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, Mass. [181]

Goldstein. S. (1929). The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers. Proc. Roy. Soc. (London). A-123, 225-235. [141]

Goldstein, S. (1931). A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc., 33, 246-252. [346]

Goldstein, S. (1969). Applications of singular perturbations and boundary-layer theory to simple ordinary differential equations. In *Contributions to Mechanics* (D. Abir, Ed.), Pergamon, Oxford, pp. 41-67. [317]

Good, R. H. See Miller and Good.

Goodrich, R. F., and N. D. Kazarinoff, (1963). Diffraction by thin elliptic cylinders. Michigan Math. J., 10, 105-127. [346]

Gorelik, G., and A. Witt, (1933). Swing of an elastic pendulum as an example of two parametrically bound linear vibration systems. J. Tech. Phys. (USSR,) 3, 244-307. [185]

Green, G. (1837). On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. Trans. Cambridge Phil. Soc., 6, 457-462. [314]

Green, G. S., and A. K. Weaver, (1961). The estimation of the three-dimensional gyrations of a ballistic missile descending through the atmosphere. Royal Aircraft Establishment Tech. Note G. W. 596 (London). [321]

Gretler, W. (1968). Eine indirekte Methode zur Berechnung der ebenen Unterschallstromung. J. Meanique, 7, 83-96. [89]

Gribben, R. J. See Butler and Gribben.

Grimshaw, R. (1966). High-frequency scattering by finite convex regions. Comm. Pure Appl. Math., 19, 167-198. [380]

- Grimshaw, R. (1970). The solitary wave in water of variable depth. *J. Fluid Mech.* 42, 639-656. [216]
- Guiraud, J. P. (1965). Acoustique geomtrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. *J. Mcanique*, 4, 215-267. [89]
- Gundersen, R. M. (1967). Self-sustained thermally driven nonlinear oscillations in one-dimensional magnetohydrodynamic flow. *Int. J. Eng. Sci*, 5, 205-211. [89]
- Glydn, H. (1893). Nouvelles recherches sur les sries employes dans les thories des plants. *Acta Math.* 9, 1-168. [56]
- Han, L. S. (1965). On the free vibration of a beam on a nonlinear elastic foundation. *J. Appl. Mech.*, 32, 445-447. [58, 105]
- Hanks, T. C. (1971). Model relating heat-flow value near, and vertical velocities of mass transport beneath, ocean rises. *J. Geophys. Res.*, 76, 537-544. [156]
- Hasegawa, H. S. See Savage and Hasegawa.
- Hassan, S. D. See Nayfeh and Hassan.
- Heidbreder, G. R. (1967). Multiple scattering and the method of Rytov. *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 1477-1479. [373]
- Henrard, J. (1970). On a perturbation theory using Lie transforms. *Celestial Mech.*, 3, 107-120. [202]
- Heynatz, J. T. See Zierep and Heynatz.
- Hirschfelder, J. O. (1969). Formal Rayleigh-Schrödinger perturbation theory for both degenerate and non-degenerate energy states. *Int. J. Quantum Chem*, 3, 731-748. [71]
- Holstein, V. H. (1950). Uber die aussere and innere Reibungsschicht bei Storungen laminarer Stromungen. *ZAMM*, 30, 25-49. [353]
- Holt, M. (1967). The collapse of an imploding spherical cavity. *Rev. Roumaine, Sci. Tech. Ser. Mec. AppL*, 12, 407-415. [78]
- Holt, M., and N. J. Schwartz, (1963). Cavitation bubble collapse in water with finite density behind the interface. *Phys. Fluids.*, 6, 521-525. [78]
- Hoogstraten, H. W. (1967). Uniformly valid approximations in two-dimensional subsonic thin airfoil theory. *J. Eng. Math.*, 1, 51-65. [99]
- Hoogstraten, H. W. (1968). Dispersion of non-linear shallow water waves. *J. Eng. Math.*, 2, 249-273. [234]
- Hori, G. I. (1966). Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18, 287-296, [199, 201, 202, 212]
- Hori, G. I. (1967). Nonlinear coupling of two harmonic oscillations. *Publ Astron. Soc. Japan*, 19, 229-241. [199, 201, 212]
- Hori, G. I. (1970). Comparison of two perturbation theories based on canonical transformations. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 22, 191-198. [202]
- Horn, J. (1899). Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkurlichen Parameter. *Math. Ann.* 52, 271-292. [316]
- Horn, J. (1903). Untersuchung der Intergrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelt successive Annaherungen. *Arch. Math. Phys.*, 4, 213-230. [312]
- Hoult, D. P. (1968). Euler-Lagrange relationship for random dispersive waves. *Phys. Fluids*, 11, 2082-2086. [234]
- Houston, A. See Barakat and Houston.
- Howe, M. S. (1967). Nonlinear theory of open-channel steady flow past a solid surface of finite-wave-group shape. *J. Fluid Mech.* 30, 497-512. [216]
- Howland, L. See Van Hove, Hugenholtz, and Howland.
- Hsieh, P. F., and Y. Sibuya, (1966). On the asymptotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 16, 84-103.

[345]

Hufnagel, R. E., and N.R. Stanley (1964). Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media. *J. Opt. Soc. Am.*, 54, 52-61. [373]

Hugenholtz, N. See Van Hove, Hugenholtz, and Howland.

Imai, I. (1948). On a refinement of the W. K. B. method. *Phys. Rev.*, 74, 113. [324, 350]

Imai, I. (1950). Asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order. *Phys. Rev.*, 80, 1112. [350]

Ince, E. L. (1926). *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, London. [5, 314]

Jacobi, C. G. J. (1849). Versuch einer Berechnung der grossen Ungleichheit des Saturns nach einer strengen Entwicklung. *Astron. Nachr.* 28, 65-94. [312]

Jacobs, S. J. (1967). An asymptotic solution of the tidal equations. *J. Fluid Mech.*, 30, 417-438. [234]

Jahsman, W. E. (1968). Collapse of a gas-filled spherical cavity. *J. Appl. Mech.*, 35, 579-587. [78]

Jakob, M. (1949). *Heat Transfer*, Vol. 1. Wiley, New York. [342]

Jefferys, W. H. See Campbell and Jefferys.

Jeffreys, H. (1924a). On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. *Proc. London Math. Soc.*, 23, 428-436. [114, 339]

Jeffreys, H. (1924b). On certain solutions of Mathieu's equation. *Proc. London Math. Soc.* 23, 437-476. [114, 339]

Jeffreys, H. (1962). *Asymptotic Approximations*. Oxford University Press, Oxford. [309, 342, 382]

Johansen, K. F., and T. R. Kane, (1969). A simple description of the motion of a spherical pendulum. *J. Appl. Mech.*, 36, 408-411. [224]

Johnson, R. S. See Freeman and Johnson.

Kain, M. E. See Kane and Kahn.

Kamel, A. A., (1969a). Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mech.*, 1, 190-199. [199, 202, 206, 212]

Kamel, A. A. (1969b). Perturbation theory based on Lie transforms and its application to the stability of motion near sun-perturbed earth-moon triangular libration points. SUDAAR Rept. No. 391, Stanford University. [199, 202, 206]

Kamel, A. A. (1970). Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations. *Celestial Mech.*, 3, 90-106. [199, 201, 202, 206]

Kamel, A. A. (1971). Lie transforms and the Hamiltonization of non-Hamiltonian systems. *Celestial Mech.*, 4, 397-405. [202]

Kamel, A. A. See Nayfeh and Kamel.

Kane, T. R. See Johansen and Kane.

Kane, T. R., and M. E. Kahn, (1968). On a class of two-degree-of-freedom oscillations. *J. Appl. Mech.*, 35, 547-552. [185]

Kaplun, S. (1954). The role of coordinate systems in boundary-layer theory. *Z. Angew. Math. Phys.*, 5, 111-135; also Chapter 1 of Kaplun (1967). [50, 114]

Kaplun, S. (1957). Low Reynolds number flow past a circular cylinder. *J. Math. Mech.*, 6, 595-603; also Chapter 3 of Kaplun (1967). [114]

Kaplun, S. (1967). *Fluid Mechanics and Singular Perturbations* (a collection of papers by S. Kaplun, edited by P. A. Lagerstrom, L. N. Howard, and C. S. Liu), Academic, New York. [114, 119]

Kaplun, S., and P. A. Lagerstrom, (1957). Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers. *J. Math. Mech.*, 6, 585-593; also Chapter 2 of Kaplun (1967). [114]

Karal, F. C., and J. B. Keller, (1964). Elastic, electromagnetic, and other waves in a ran-

- dom medium. *J. Math. Phys.*, 5, 537-547. [369]
- Karpman, V. I. See Al'tshul' and Karpman.
- Karpman, V. I., and E. M. Krushkal' (1969). Modulated waves in nonlinear dispersive media. *Soviet Phys.*, 28, 277-281. [216]
- Kawakami, I. (1970). Perturbation approach to nonlinear Vlasov equation. *J. Phys. Soc. Japan*, 28, 505-514. [216]
- Kawakami, I., and T. Yagishita, (1971). Perturbation approach to nonlinear Vlasov equation. II. Nonlinear plasma oscillation of finite amplitude. *J. Phys. Soc. Japan*. 30, 244-253. [216]
- Kazarinoff, N. D., (1958). Asymptotic theory of second order differential equations with two simple turning points. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2, 129-150. [344]
- Kazarinoff, N. D. See Goodrich and Kazarinoff.
- Kazarinoff, N. D., and R. W. Mc Kelvey, (1956). Asymptotic solution of differential equations in a domain containing a regular singular point. *Can. J. Math.*, 8, 97-104. [358]
- Keller, J. B. (1958). A geometrical theory of diffraction, calculus of variations and its applications. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 8, 27-52. [374]
- Keller, J. B. (1962). Wave propagation in random media. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13, 227-246. [369, 382]
- Keller, J. B. (1968). Perturbation Theory. Lecture notes, Mathematics Department, Michigan State University. [58, 150]
- Keller, J. B. See Avila and Keller, Buchal and Keller; Karal and Keller; Lynn and Keller; Millman and Keller.
- Keller, J. B., and S. Kogelman, (1970). Asymptotic solutions of initial value problems for nonlinear partial differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 18, 748-758. [234]
- Keller, J. B., and M.H. Millman, (1969). Perturbation theory of nonlinear electromagnetic wave propagation. *Phys. Rev.*, 181, 1730-1747. [77]
- Keller, J. B., and L. Ting, (1966). Periodic vibrations of systems governed by nonlinear partial differential equations. *Comm. Pure. Appl. Math.* 19, 371-420. [77]
- Kelly, R. E. (1965). Stability of a panel in incompressible, unsteady flow. *AIAA J.*, 3, 1113-1118. [233]
- Kelly, R. E. (1967). On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time. *J. Fluid Mech.*, 27, 657-689. [235]
- Kelly, R. E. See Maslowe and Kelly.
- Kemble, E. C. (1935). A contribution to the theory of the B.W.K. method. *Phys. Rev.*, 48, 549-561. [339]
- Kersten, P. H. M. (1967). Diffraction of an electromagnetic wave by a plane screen. Ph. D. Thesis. Technische Hochschull, Eindhoven. [380]
- Kevorkian, J. (1966a). The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations. *Space Mathematics*. Part 3. (J.B. Rosser, Ed.) American Mathematical Society, Providence, R.I., pp. 206-275. [231, 232, 233, 273]
- Kevorkin, J. (1966b). von Zeipel method and the two-variable expansion procedure. *Astron. J.*, 71, 878-885. [231]
- Kevorkian, J. (1971). Passage through resonance for a one-dimensional oscillator with slowly varying frequency. *SIAM J. Appl. Math.*, 20, 364-373. [233, 383]
- Kevorkian, J. See Cole and Kevorkian; Eckstein, Shi, and Kevorkian; Lagerstrom and Kevorkian.
- Kiang, R. L. (1969). Nonlinear theory of inviscid Taylor instability near the cutoff wave number. *Phys. Fluids*, 12, 1333-1339. [235]
- Kim, H. See Galloway and Kim.
- Kirchhoff, G. (1877). *Zur Theorie des Condensators*, Berlin, Akad., Monatsber. pp. 144-162. [114]

- Kirsch, J. W. See Cheng, Kirsch, and Lee.
- Klein, J. S. See Sellers, Tribus, and Klein.
- Klimas, A., R. V., Ramnath, and G. Sandri, (1970). On the compatibility problem for the uniformization of asymptotic expansions. *J. Math. Anal. Appl.*, 32, 482-504. [232]
- Kogelman, S. See Keller and Kogelman.
- Kraichnan, R. H. (1961). Dynamics of nonlinear stochastic systems. *J. Math. Phys.*, 2, 124-148. [367]
- Kramers, H. A. (1926). Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. *Z. Phys.*, 39, 828-840. [114, 315, 339]
- Kravtsov, Y. A. (1964a). A modification of the geometrical optics method. *Radiofizika*, 7, 664-673 (in Russian). [378]
- Kravtsov, Y. A. (1964b). Asymptotic solutions of Maxwell's equations near a caustic. *Radiofizika*, 7, 1049-1056 (in Russian). [378, 380]
- Kravtsov, Y. A. (1965). Modification of the method of geometrical optics for a wave penetrating a caustic. *Radiofizika*, 8, 659-667. [380]
- Kravtsova, T. S. See Babich and Kravtsova.
- Krushkal', E. M. See Karpman and Krushkal'.
- Kruskal, M. (1962). Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic. *J. Math. Phys.*, 3, 806-828. [168]
- Krylov, N., and N. N. Bogoliubov (1947). *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, N. J. [165, 174]
- Kubo, R. (1963). Stochastic Liouville equation. *J. Math. Phys.*, 4, 174-183. [382]
- Kuiken, H. K. (1970). Inviscid film flow over an inclined surface originated by strong fluid injection. *J. Fluid Mech.*, 42, 337-347. [99]
- Kuo, Y. H. (1953). On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers. *J. Math and Phys.*, 32, 83-101. [78]
- Kuo, Y. H. (1956). Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds. *J. Aeron. Sci.*, 23, 125-136. [78]
- Kuzmak, G. E. (1959). Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients. *J. Appl. Math. Mech.*, 23, 730-744. [232, 287]
- Lacina, J. (1969a). New canonical perturbation method for complete set of integrals of motion. *Czech. J. Phys.*, B19, 130-133. [199]
- Lacina, J. (1969b). New canonical perturbation method for complete set of integrals of motion. *Ann. Phys.*, 51, 381-391. [199]
- Lagerstrom, P. A. See Kaplun and Lagerstrom.
- Lagerstrom, P. A., and J. D. Cole, (1955). Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations. *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 817-882. [140]
- Lagerstrom, P. A., and J. Kevorkian, (1963a). Earth-to-moon trajectories in the restricted three-body problem. *J. Mcanique*, 2, 189-218. [138]
- Lagerstrom, P. A., and J. Kevorkian, (1963b): Matched-conic approximation to the two fixed force-center problem. *Astron. J.* 68, 84-92. [44, 138]
- Landahl, M. T. See Rubbert and Landahl.
- Langer, R. E. (1931). On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33, 23-64. [339, 340, 345]
- Langer, R. E. (1934). The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order. *Thans. Am. Math. Soc.*, 36, 90-106. [339, 340]
- Langer, R. E. (1935). On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. *Trans. Am. Math. Soc.*, 37, 397-416. [358]

- Langer, R. E. (1949). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. *Trans. Am. Math. Soc.*, 67, 461-490. [346, 348]
- Langer, R. E. (1957). On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics. *Trans. Am. Math. Soc.*, 84, 144-191. [360]
- Langer, R. E. (1959a). Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type. *Trans. Am. Math. Soc.*, 92, 371-410. [360]
- Langer, R. E. (1959b). The asymptotic solutions of a linear differential equation of the second order with two turning points. *Trans. Am. Math. Soc.*, 90, 113-142. [344]
- Laplace, P. S. (1805). On the figure of a large drop of mercury, and the depression of mercury in a glass tube of a great diameter. In *Celestial Mechanics* (transl. by Nathaniel Bowditch, Boston, 1839), Chelsea, New York, 1966. [114]
- Latta, G. E. (1951). Singular perturbation problems. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology. [114, 145]
- Latta, G. E. (1964). *Advanced Ordinary Differential Equations*. Lecture notes, Stanford University. [317]
- Ledovskaja, L. B. See Zabreiko and Ledovskaja.
- Lee, D. H., and L. M. Sheppard, (1966). An approximate second-order wing theory. *AIAA J.*, 4, 1828-1830. [78, 89]
- Lee, J. H. S. See Akinsete and Lee.
- Lee, R. S. See Cheng, Kirsch, and Lee.
- Légaras, J. (1951). Application de la méthode de Lighthill au coulement plan supersonique. *Compt. Rend.*, 233, 1005-1008. [78, 86]
- Légaras, J. (1953). Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'étude des ondes de choc. *O.N.E.R.A. Publ. No. 66*. [78, 86]
- Lesser, M. B. (1970). Uniformly valid perturbation series for wave propagation in an inhomogeneous medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47, 1297-1302. [90]
- Le Verrier, U. J. J. (1856). Sur la détermination des longitudes terrestres. Paris, *Compt. Rend.*, 43, 249-257. [168]
- Levey, H. C. (1959). The thickness of cylindrical shocks and the PLK method. *Quart. Appl. Math.*, 17, 77-93. [52, 99, 100]
- Levey, L., and L. B. Felsen, (1967). On transition functions occurring in the theory of diffraction in inhomogeneous media. *J. Inst. Mat. Appl*, 3, 76-97. [380]
- Levinson, N. (1969). Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations. *Stud. Appl. Math.*, 48, 285-297. [21, 22]
- Levinson, N. See Coddington and Levinson.
- Lewak, G. J. (1969). More uniform perturbation theory of the Vlasov equation. *J. Plasma Phys.*, 3, 243-253. [78]
- Lewak, G. J. (1971). Interaction of electrostatic waves in collisionless plasmas. *J. Plasma Phys.*, 5, 51-63. [235]
- Lewak, G. J. See Chen and Lewak; Zawadzki and Lewak.
- Lewis, R. M. See Ahluwalia, Lewis, and Boersma.
- Lewis, R. M., N. Bleistein, and D. Ludwig, (1967). Uniform asymptotic theory of creeping waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, 295-328. [380]
- Lick, W. (1969). Two-variable expansions and singular perturbation problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 17, 815-825. [89]
- Lick, W. (1970). Nonlinear wave propagation in fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2 (M. van Dyke, W. G. Vincinti, and J. V. Wehausen, Eds.), Annual Reviews, Palo Alto, Calif., pp. 113-136. [235]

Liepins, A. A. See Sanders and Liepins.

Lighthill, M. J. (1949a). A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. *Phil. Mag.*, 40, 1179-1201. [42, 57, 77, 80, 87, 108]

Lighthill, M. J. (1949b). The shock strength in supersonic "conical fields." *Phil. Mag.*, 40, 1202-1223. [78]

Lighthill, M. J. (1951). A new approach to thin airfoil theory. *Aeron. Quart.*, 3, 193-210. [98]

Lighthill, M. J. (1961). A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. *Z. Flugwiss.*, 9, 267-275. [57, 77, 99]

Lighthill, M. J. (1965). Contributions to the theory of waves in non-linear dispersive systems. *J. Inst. Math. Appl.*, 1, 269-306. [216]

Lighthill, M. J. (1967). Some special cases treated by the Whitham theory. *Proc. Roy. Soc.*, (London), A299, 28-53. [216]

Lin, C. C. (1954). On a perturbation theory based on the method of characteristics. *J. Math and Phys.*, 33, 117-134. [57, 87, 89]

Lin, C. C. (1955). *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge. [360]

Lin, C. C., and A. L. Rabenstein (1960). On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order. *Trans. Am. Math. Soc.*, 94, 24-57. [360]

Lin, C. C., and A. L. Rabenstein (1969). On the asymptotic theory of a class of ordinary differential equations of the fourth order. II. Existence of solutions which are approximated by the formal solutions. *Stud. Appl. Math.*, 48, 311-340. [360]

Lindstedt, A. (1882). Ueber die Integration einer fur die storungstheorie wichtigen Differentialgleichung. *Astron. Nach.*, 103, Col. 211-220. [56]

Lindzen, R. S. (1971). Equatorial planetary waves in shear: Part I. *J. Atmos. Sci.*, 28, 609-622. [234]

Liouville, J. (1837). Second mmoire sur le dveloppement des fonctions en sries dont divers termes sont ssujettis a satisfaire une mme quation diffrentielle du second ordre contenant un paramtre variable. *J. Math. Pure Appl.*, 2, 16-35. [314]

Lock, C. N. H. See Fowler and Lock; Fowler, Gallop, Lock, and Richmond.

Lowell, S. C. (1970). Wave propagation in monatomic lattices with anharmonic potential. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A318, 93-106. [217]

Ludwig, D. (1966). Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Comm. Pure Appl. Math.*, 19, 215-250. [378, 380]

Ludwig, D. (1967). Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, 103-138. [380]

Ludwig, D. (1970a). Diffraction by a circular cavity. *J. Math. Phys.*, 11, 1617-1630. [380]

Ludwig, D. (1970b). Uniform asymptotic expansions for wave propagation and diffraction problems. *SIAM Rev.*, 12, 325-331. [380]

Ludwig, D. See Lewis, Bleistein and Ludwig.

Luke, J. C. (1966). A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A292, 403-412. [234, 301]

Lynn, R. Y. S., and J. B. Keller (1970). Uniform asymptotic solutions of second order linear ordinary differential equations with turning points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23, 379-408. [345]

Lyusternik, L. A. See Visik and Lyusternik.

Mc Goldrick, L. F. (1970). On Wilton's ripples: A special case of resonant interactions. *J. Fluid Mech.*, 42, 193-200. [234]

Mc Intyre, J. E. (1966). Neighboring optimal terminal control with discontinuous forcing functions. *ALAA J.*, 4, 141-148. [79]

Mc Kelvey, R. W. (1955). *The solution of second order linear ordinary differential equations*

- about a turning point of order two. *Trans. Am. Math. Soc.*, 79, 103-123. [346]
- Mc Kelvey, R. W. See Kazarinoff and Mc Kelvey.
- Mc Namara, B., and K. J. Whiteman (1967). Invariants of nearly periodic Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.*, 8, 2029-2038. [199]
- Mahony, J. J. (1962). An expansion method for singular perturbation problems. *J. Australian Mat. Soc.*, 2, 440-463. [232, 303]
- Malkus, W. V. R., and G. Veronis (1958). Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 4, 225-260. [77]
- Maroli, C. (1966). Kinetic theory of high-frequency resonance gas discharge breakdown. *Nuovo Cimento*, B41, 208-224. [236]
- Maroli, C. See Caldirola, De Barbieri, and Maroli; De Barbieri and Maroli.
- Maroli, C., and R. Pozzoli (1969). Penetration of high-frequency electromagnetic waves into a slightly ionized plasma. *Nuovo Cimento*, B61, 277-289. [235]
- Maslowe, S. A., and R. E. Kelly (1970). Finite amplitude oscillations in a Kelvin-Helmholtz flow. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 5, 427-435. [77]
- Matkowsky, B. J. (1966). Asymptotic solution of partial differential equations in thin domains. Ph. D. Thesis, New York University. [380]
- Matkowsky, B. J., See Reiss and Matkowsky.
- Maxwell, J. C. (1866). On the viscosity or internal friction of air and other gases. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 156, 249-268. [114]
- Mei, C. C. See Chu and Mei.
- Meirovitch, L. (1970). *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York. [181]
- Melnik, R. E. (1965). Newtonian entropy layer in the vicinity of a conical symmetry plane. *AIAA J.*, 3, 520-522. [79]
- Mendelson, K. S. (1970). Perturbation theory for damped nonlinear oscillations. *J. Math. Phys.*, 11, 3413-3415. [224]
- Mersman, W. A. (1970). A new algorithm for the Lie transformation. *Celestial Mech.*, 3, 81-89. [202]
- Mersman, W. A. (1971). Explicit recursive algorithms for the construction of equivalent canonical transformations. *Celestial Mech.*, 3, 384-389. [202]
- Messiter, A. F. See Spriggs, Messiter, and Anderson.
- Mettler, E. (1959). Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. *Ingenieur-Archiv.*, 28, 213-228. [168, 188]
- Meyer, J. W. (1971). Rayleigh scattering of a laser beam from a massive relativistic two-level atom. *Phys. Rev.*, A3, 1431-1443. [235]
- Miller, S. C., and R. H. Good (1953). A WKB-type approximation to the Schrödinger equation. *Phys. Rev.*, 91, 174-179. [344]
- Millman, M. H. See Keller and Millman.
- Millman, M. H., and J. B. Keller (1969). Perturbation theory of nonlinear boundary-value problems. *J. Math. Phys.*, 10, 342-361. [77]
- Mitchell, C. E. (1971). Analysis of a combustion instability problem using the technique of multiple scales. *AIAA J.*, 9, 532-533. [235]
- Mitropolski, Y. A. (1965). *Problems of the Asymptotic Theory of Non-stationary Vibrations*. Daniel Davey, New York. [174]
- Mitropolski, Y. A. See Bogoliubov and Mitropolski.
- Montgomery, D., and D. A. Tidman (1964). Secular and nonsecular behavior for the cold plasma equations. *Phys. Fluids*, 7, 242-249. [178]
- Moriguchi, H. (1959). An improvement of the WKB method in the presence of turning points and the asymptotic solutions of a class of Hill equations. *J. Phys. Soc. Japan*, 14, 1771-1796. [342, 345, 350]

- Morino, L. (1969). A perturbation method for treating nonlinear panel flutter problems. *AIAA J.*, 7, 405-411. [234]
- Morris, W. D. (1965). Laminar convection in a heated vertical tube rotating about a parallel axis. *J. Fluid Mech.*, 21, 453-464. [79]
- Morrison, H. L. See Richmond and Morrison.
- Morrison, J. A. (1966a). Comparison of the modified method of averaging and the two variable expansion procedure. *SIAM Rev.*, 8, 66-85. [231]
- Morrison, J. A. (1966b). Generalized method of averaging and the von Zeipel method. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, Eds.), Academic, New York, pp. 117-138. [168, 191]
- Mortell, M. P. (1968). Traveling load on a cylindrical shell. *J. Acoust. Soc. Am.*, 44, 1664-1670. [233]
- Mortell, M. P. (1969). Waves on a spherical shell. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 144-149. [233]
- Mortell, M. P. (1971). Resonant thermal-acoustic oscillations. *Int. J. Eng. Sci.*, 9, 175-192. [89]
- Mortell, M. P., and E. Varley (1971). Finite amplitude waves in bounded media: Nonlinear free vibrations of an elastic panel. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A318, 169-196. [90]
- Morton, B. R. (1959). Laminar convection in uniformly heated horizontal pipes at low Rayleigh numbers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 12, 410-426. [79]
- Mulholland, R. J. (1971). Nonlinear oscillations of a third-order differential equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 6, 279-294. [105]
- Murphy, C. H. (1963). Free flight motion of symmetric missiles. Ballistic Research Laboratories Rept. No. 1216, Aberdeen Proving Grounds, Md. [321]
- Murray, J. D. (1968). On the effect of drainage on free surface oscillations. *Appl. Sci. Res.*, 19, 234-249. [234]
- Musa, S. A. (1967). Integral constraints in weakly nonlinear periodic systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 15, 1324-1327. [232]
- Musen, P. (1965). On the high order effects in the methods of Krylov-Bogoliubov and Poincaré. *J. Astron. Sci.*, 12, 129-134. [168, 192, 199]
- Nair, S., and S. Nemat-Nasser (1971). On finite amplitude waves in heterogeneous elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.*, 9, 1087-1105. [94]
- Nayfeh, Adnan, and S. Nemat-Nasser (1971). Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation. *Acta Mechanica*, 12, 53-69. [45, 136]
- Nayfeh, A. H. (1964). A generalized method for treating singular perturbation problems. Ph. D. Thesis, Santford University. [232, 276, 280, 285, 295]
- Nayfeh, A. H. (1965a). A comparison of three perturbation methods for the earth-moonspaceship problem. *AIAA J.*, 3, 1682-1687. [82, 103, 233, 295, 297]
- Nayfeh, A. H. (1965b). An expansion method for treating singular perturbation problems. *J. Math. Phys.*, 6, 1946-1951. [232, 234, 276, 280, 285, 384]
- Nayfeh, A. H. (1965c). A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems. *J. Math. and Phys.*, 44, 368-374. [230, 232]
- Nayfeh, A. H. (1965d). Nonlinear oscillations in a hot electron plasma. *Phys Fluids.*, 8, 1896-1898. [230, 234]
- Nayfeh, A. H. (1966). Take-off from a circular orbit by a small thrust. In *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics* (R. L. Duncombe and V. G. Szebehely, Eds.), Academic, New York, pp. 139-157. 199, 109, 233, 3051
- Nayfeh, A. H. (1967a). Asymptotic solutions of an eigenvalue problem with two turning points-heat transfer in a tube. *J. Math and Phys.*, 46, 349-354. [385]
- Nayfeh, A. H. (1967b). The van der Pol oscillator with delayed amplitude limiting. *Proc.*

IEEE, 55, 111-112. [231, 232, 258]

Nayfeh, A. H. (1968). Forced oscillations of the van der Pol oscillator with delayed amplitude limiting. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 15, 192-200. [230, 232, 258]

Nayfeh, A. H. (1969a). A multiple time scaling analysis of reentry vehicle roll dynamics. *AIAA J.*, 7, 2155-2157. [233, 320]

Nayfeh, A. H. (1969b). On the nonlinear Lamb-Taylor instability. *J. Fluid Mech.*, 38, 619-631. [235]

Nayfeh, A. H. (1970a). Characteristic exponents for the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. *ALAA J.*, 8, 1916-1917. [68]

Nayfeh, A. H. (1970b). Finite amplitude surface waves in a liquid layer. *J. Fluid Mech.*, 40, 671-684. [234]

Nayfeh, A. H. (1970c). Nonlinear stability of a liquid jet. *Phys. Fluids*, 13, 841-847. [99, 235]

Nayfeh, A. H. (1970d). Triple and quintuple-dimpled wave profiles in deep water. *Phys. Fluids*, 13, 545-550. [234]

Nayfeh, A. H. (1971a). Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 48, 385-395. [234]

Nayfeh, A. H. (1971b). Two-to-one resonances near the equilateral libration points. *AIAA J.*, 9, 23-27. [233]

Nayfeh, A. H., and S. D. Hassan (1971). The method of multiple scales and nonlinear dispersive waves. *J. Fluid Mech.*, 48, 463-475. [234, 298]

Nayfeh, A. H., and A. A. Kamel (1970a). Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. *AIAA J.*, 8, 221-223. [64, 66]

Nayfeh, A. H. and A. A. Kamel (1970b). Three-to-one resonances near the equilateral libration points. *AIAA J.*, 8, 2245-2251. [233]

Nayfeh, A. H., and W. S. Saric, (1971a). Nonlinear Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech.*, 46, 209-231. [235]

Nayfeh, A. H., and W. S. Saric (1971b). Nonlinear resonances in the motion of rolling re-entry bodies. *AIAA Paper No. 71-47*. [233, 305]

Nayfeh, A. H., and W. S. Saric (1972a). An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics. *AIAA J.*, 10, 1004-1011. [233, 291, 292, 306]

Nayfeh, A. H., and W. S. Saric (1972b). Nonlinear waves in a Kelvin-Helmholtz flow. *J. Fluid Mech.*, 55, 311-327. [234]

Nemat-Nasser, S. See Adnan Nayfeh and Nemat-Nasser; Nair and Nemat-Nasser.

Neubert, J. A. (1970). Asymptotic solution of the stochastic Helmholtz equation for turbulent water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 48, 1203-1211. [234]

Newell, A. C. (1968). The closure problem in a system of random gravity waves. *Rev. Geophys.*, 6, 1-31. [234]

Newell, A. C. (1969). Rossby wave packet interactions. *J. Fluid Mech.*, 35, 255-271. [234]

Newell, A. C. See Benney and Newell.

Newell, A. C., and J. A. Whitehead (1969). Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38, 279-303. [235]

Nienhuis, G. (1970). On the microscopic theory of Brownian motion with a rotational degree of freedom. *Physica*, 49, 26-48. [236]

Nikolenko, L. D. See Feshchenko, Shkil', and Nikolenko.

Noerdlinger, P. D., and V. Petrosian (1971). The effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles. *Astrophys. J.*, 168, 1-9. [232]

Ockendon, J. R. (1966). The separation of Newtonian shock layers. *J. Fluid Mech.*, 26, 563-572. [79]

Olver, F. W. J. (1954). The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel functions of large

- order. Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A., 247, 307-368. [341, 348, 358]
- Olver, F. W. J. (1959). Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders. J. Res. Natl. Bur. Standards, 63B, 131-169. [345]
- O'Malley, R. E., Jr. (1968a). A boundary value problem for certain nonlinear second order differential equations with a small parameter. Arch. Rat. Mech. Anal, 29, 66-74. [233]
- O'Malley, R. E., Jr. (1968b). Topics in singular perturbations. Advan. Math., 2, 365-470. [110, 233]
- O'Malley, R. E., Jr. (1971). Boundary layer methods for nonlinear initial value problems. SIAM Rev., 13, 425-434. [145]
- O'Malley, R. E., Jr. See Ackerberg and O'Malley.
- Oseen, C. W. (1910). ber die Stokesche Formel und ber eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Ark. Mat. Astron. Fys., 6, No. 29. [140]
- Oswatitsch, V. K. (1965). Ausbreitungsprobleme. ZAMM, 45, 485-498. [89]
- Pandey, B. C. (1968). Study of cylindrical piston problem in water using PLK method. ZAMP, 19, 962-963. [86]
- Parker, D. F. (1969). Nonlinearity, relaxation and diffusion in acoustics and ultrasonics. J. Fluid Mech., 39, 793-815. [234]
- Parker, D. F., and E. Varley (1968). The interaction of finite amplitude deflection and stretching waves in elastic membranes and strings. Quart. J. Mech. Appl. Math., 21, 329-352. [90]
- Payne, H. J. See Caughey and Payne.
- Pearson, J. R. A. See Proudman and Pearson.
- Pedlowsky, J. (1967). Fluctuating winds and the ocean circulation. Tellus, 19, 250-257. [77]
- Perko, L. M. (1969). Higher order averaging and related methods for perturbed periodic and quasi-periodic systems. SIAM J. Appl. Math., 17, 698-724. [231]
- Perko, L. M. See Breakwell and Perko.
- Pertosian, V. See Noerdlinger and Petrosian.
- Peyret, R. (1966). coulement quasi unidimensionnel dans un accélérateur de plasma ondes progressives. J. Mécanique, 5, 471-515. [234]
- Peyret, R. (1970). tude de l'écoulement d'un fluide conducteur dans un canal par la méthode des cellules multiples. J. Mécanique, 9, 61-97. [235]
- Pierson, W. J., and P. Fife (1961). Some nonlinear properties of long-crested periodic waves with lengths near 2.44 centimeters. J. Geophys. Res, 66, 163-179. [77]
- Pike, E. R. (1964). On the related-equation method of asymptotic approximation. Quart. J. Mech. Appl. Math., 17, 105-124, 369-379. [242, 344]
- Poincaré, H. (1892). New Methods of Celestial Mechanics, Vol. I-III (English transl.), NASA TTF-450, 1967. [10, 56]
- Potter, M. C. See Reynolds and Potter.
- Pozzoli, R. See Maroli and Pozzoli.
- Prandtl, L. (1905). ber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proceedings Third Internat. Math. Congr., Heidelberg, pp. 484-491. Motion of fluids with very little viscosity. Tech. Memo N.A.C.A. (English transl.), No. 452, 1928. [113]
- Prasad, R. (1971). Effect of ion motion on parametric oscillations of a cold plasma in a magnetic field. J. Plasma Phys, 5, 291-302. [235]
- Prigogin, I. (1962). Nonequilibrium Statistical Mechanics. Wiley, New York. [367, 369, 382]
- Primas, H. (1961). ber quantenmechanische Systeme mit einem stochastischen Hamiltonoperator. Helv. Phys. Acta, 34, 36-57. [382]
- Primas, H. See Ernst and Primas.
- Pringle, R. Jr. See Breakwell and Pringle.
- Pritulo, M. F. (1962). On the determination of uniformly accurate solutions of differential equations by the method of perturbation of coordinates. J. Appl. Math. Mech., 26, 661-667.

[57, 95, 369]

Proudman, I. (1960). An example of steady laminar flow at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 9, 593-602. [54, 156]

Proudman, I., and J. R. A. Pearson (1957). Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2, 237-262. [114, 141, 144]

Puri, K. K. (1971). Effect of viscosity and membrane on the oscillations of superposed fluids. *J. Appl. Phys.*, 42, 995-1000. [235]

Rabenstein, A. L. (1959). The determination of the inverse matrix for a basic reference equation for the theory of hydrodynamic stability. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2, 355-366. [360]

Rabenstein, A. L. See Lin and Rabenstein.

Rajappa, N. R. (1970). Nonlinear theory of Taylor instability of superposed fluids. *J. Phys. Soc. Japan*, 28, 219-224. [77]

Ramanathan, G. V., and G. Sandri (1969). Model for the derivation of kinetic theory. *J. Math. Phys.*, 10, 1763-1773. [236]

Ramnath, R. V. (1970a). A new analytical approximation for the Thomas-Fermi model in atomic physics. *J. Math. Anal. Appl.*, 31, 285-296. [235]

Ramnath, R. V. (1970b). Transition dynamics of VTOL aircraft. *AIAA J.*, 8, 1214-1221. [233]

Ramanth, R. V. (1971). On a class of nonlinear differential equations of astrophysics. *J. Math. Anal. Appl.*, 35, 27-47. [235]

Ramnath, R. V. See Klimas, Ramnath, and Sandri.

Ramnath, R. V., and G. Sandri (1969). A generalized multiple scales approach to a class of linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 28, 339-364. [232]

Rand, R. H. See Alfried and Rand.

Rand, R. H., and S. F. Tseng (1969). On the stability of a differential equation with application to the vibrations of a particle in the plane. *J. Appl. Mech.*, 36, 311-313. [104]

Rao, P. S. (1956). Supersonic bangs. *Aeron. Quart.*, 7, 135-155. [78]

Rarity, B. S. H. (1969). A theory of the propagation of internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, 39, 497-509. [216]

Rasmussen, M. L. (1970). Uniformly valid approximations for non-linear oscillations with small damping. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 5, 687-696. [232]

Rayleigh, Lord (1912). On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A86, 208-226. [114, 339]

Rayleigh, Lord, (1917). On the reflection of light from a regularly stratified medium. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A93, 565-577. [95, 367, 368]

Rehm, R. G. (1968). Radiative energy addition behind a shock wave. *Phys. Fluids*, 11, 1872-1883. [89]

Reiss, E. L. (1971). On multivariable asymptotic expansions. *SIAM Rev.*, 13, 189-196. [232]

Reiss, E. L., and B. J. Matkowsky (1971). Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column. *Quart. Appl. Math.*, 29, 245-260. [233]

Reissner, E., and H. J. Weinitschke (1963). Finite pure bending of circular cylindrical tubes. *Quart. Appl. Math.*, 20, 305-319. [54]

Reynolds, W. C., and M. C. Potter (1967). Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 27, 465-492. [162]

Richmond, H. W. See Fowler, Gallop, Lock, and Richmond.

Richmond, O., and H. L. Morrison (1968). Application of a perturbation technique based on the method of characteristics to axisymmetric plasticity. *J. Appl. Mech.*, 35, 117-122. [90]

Rogister, A. (1971). Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high- β plasma. *Phys. Fluids* 14, 2733-2739. [235]

Rogister, A. See Dobrowolny and Rogister.

Roskes, G. J. See Benney and Roskes.

- Ross, L. W. (1970). Perturbation analysis of diffusion-coupled biochemical reaction kinetics. *SIAM J. Appl. Math.*, 19, 323-329. [79]
- Rubbert, P. E., and M. T. Landahl (1967). Solution of the transonic airfoil problem through parametric differentiation. *AIAA J.*, 5, 470-479. [235]
- Rulf, B. (1967). Relation between creeping waves and lateral waves on a curved interface. *J. Math. Phys.*, 8, 1785-1793. [380]
- Rulf, B. (1968). Uniform asymptotic theory of diffraction at an interface. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21, 67-76. [380]
- Rutherford, P. See Frieman and Rutherford.
- Rytov, S. M. (1937). Diffraction of light by ultrasonic wave. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.* No. 2, 223-259 (in Russian). [373]
- Saffman, P. G. See Benney and Saffman.
- Sakurai, A. (1965). Blast wave theory. In *Basic Developments in Fluid Dynamics*, Vol. I (M. Holt, Ed.), Academic, New York, pp. 309-375. [78]
- Sakurai, T. (1968). Effect of the plasma impedance on the time variation of the inverse pinch. *J. Phys. Soc. Japan*, 25, 1671-1679. [78]
- Salpeter, E. E., and H. A. Bethe (1951). A relativistic equation for bound-state problems. *Phys. Rev.*, 84, 1232-1242. [372]
- Sancer, M. I. See Varvatsis and Sancer.
- Sancer, M. I., and A. D. Varvatsis (1969). An investigation of the renormalization and Rytov methods as applied to propagation in a turbulent medium. Northrop Corporate Laboratories. Rept. No. 69-28R. [373]
- Sancer, M. I., and A. D. Varvatsis (1970). A comparison of the Born and Rytov methods. *Proc. IEEE*, 58, 140-141. [373]
- Sanders, J. L., Jr., and A. A. Liepins (1963). Toroidal membrane under internal pressure. *AIAA J.*, 1, 2105-2110. [356, 357]
- Sandri, G. (1965). A new method of expansion in mathematical physics. *Nuovo Cimento*, B36, 67-93. [230]
- Sandri, G. (1967). Uniformization of asymptotic expansions. In *Nonlinear Partial Differential Equations: A Symposium on Methods of Solutions* (W. F. Ames, Ed.), Academic, New York, pp. 259-277. [230]
- Sandri, G. See Goldberg and Sandri; Klimas, Ramnath, and Sandri; Ramanathan and Sandri; Ramnath and Sandri.
- Saric, W. S. See Nayfeh and Saric.
- Savage, J. C., and H. S. Hasegawa (1967). Evidence for a linear attenuation mechanism. *Geophysics*, 32, 1003-1014. [78]
- Schechter, H. B. (1968). The effect of three-dimensional nonlinear resonances on the motion of a particle near the earth-moon equilateral libration points. *Second Compilation of Papers on Trajectory Analysis and Guidance Theory*. NASA PM-67-21, 229-344. [199]
- Schrödinger, E. (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem. *Ann. Phys.*, 80, 437-490. [56, 71]
- Schwartz, N. J. See Holt and Schwartz.
- Schwertassek, V. R. (1969). Grenzen von Mitnahmeberichen. *ZAMM*, 49, 409-421. [232]
- Scott, A. C. (1970). Propagation of magnetic flux on a long Josephson tunnel junction. *Nuovo Cimento*, B69, 241-261. [221]
- Scott, P. R. (1966). Equations of the oscillator with delayed amplitude limiting. *Proc. IEEE*, 54, 898-899. [258]
- Searl, J. W. (1971). Expansions for singular perturbations. *J. Inst. Math. Appl*, 8, 131-138. [233]
- Sellers, J. R., M. Tribus, and J. S. Klein (1956). Heat transfer to laminar flow in a round tube

- or flat conduit-The Graetz problem extended. Trans. ASME, 78, 441-448. [384]
- Sethna, P. R. (1963). Transients in certain autonomous multiple-degree-of-freedom nonlinear vibrating systems. J. Appl. Mech., 30, 44-50. [168]
- Sethna, P. R. (1965). Vibrations of dynamical systems with quadratic nonlinearities. J. Appl. Mech., 32, 576-582. [188, 225]
- Shabbar, M. (1971). Side-band resonance mechanism in the atmosphere supporting Rossby waves. J. Atmos. Sci, 28, 345-349. [234]
- Shen, C. N. (1959). Stability of forced oscillations with nonlinear second-order terms. J. Appl. Mech., 26, 499-502. [104]
- Sheppard, L. M. See Lee and Sheppard.
- Shi, Y. Y. See Eckstein and Shi; Eckstein, Shi, and Kevorkian.
- Shi, Y. Y., and M. C. Eckstein (1966). Ascent or descent from satellite orbit by low thrust. AIAA J. 4, 2203-2209. [233]
- Shi, Y. Y., and M. C. Eckstein (1968). Application of singular perturbation methods to resonance problems. Astron. J., 73, 275-289: [233, 276]
- Shkarofsky, I. P. (1971). Modified Born back scattering from turbulent plasmas: Attenuation leading to saturation and cross-polarization. Radio Sci, 6, 819-831. [367]
- Shkil', N. I. See Feshchenko, Shkil', and Nikolenko.
- Shniad, H. (1970). The equivalence of von Zeipel mappings and Lie transforms. Celestial Mech., 2, 114-120. [202]
- Shrestha, G. M. See Tenrill and Shrestha.
- Sibuya, Y. (1958). Sur rduction analytique d'un systme d'equations diffrentielles ordinaires linaires contenant un paramtre. J. Fac. Science, Univ. Tokyo, 7, 527-540. [327]
- Sibuya, Y. (1963a). Asymptotic solutions of a linear ordinary differential equation of n th order about a simple turning point. In International Sympostum Differential Equations and Nondinear Mechanics (J. P. La Salle and S. Lefschetz, Eds.), Academic, New York, pp. 485-488. [360]
- Sibuya, Y. (1963b). Simplification of a linear ordinary differential equation of the n th order at a turning point. Arch. Rat. Mech. Anal., 13, 206-221. [360]
- Sibuya, Y. (1967). Subdominant solutions of the differential equation $y'' - \lambda^2(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)y = 0$. Acta. Math., 119, 235-271. [345]
- Sibuya, Y. See Hirsch and Sibuya.
- Simmons, W. F. (1969). A variational method for weak resonant wave interactions. Proc. Roy. Soc. (London), A309, 551-575. [216]
- Sirignano, W. A., and L. Crocco (1964). A shock wave model of unstable rocket combustors. ALAA J., 2, 1285-1296. [78]
- Sirovich, L. See Chong and Sirovich.
- Sivasubramanian, A. See Tang and Sivasubramanian.
- Soler, A. I. See Brull and Soler.
- Spriggs, J. H. A. F. Messiter, and W. J. Anderson (1969). Membrane flutter paradox-An explanation by singular-perturbation methods. AIAA J., 7, 1704-1709. [234]
- Stanley, N. R. See Hufnagel and Stanley.
- Steele, C. R. (1965). On the asymptotic solution of nonhomogeneous ordinary differential equations with a large parameter. Quart. Appl. Math., 23, 193-201. [353]
- Stern, D. P. (1970a). Direct canonical transformations. J. Math. Phys., 11, 2776-2781. [199]
- Stern, D. P. (1970b). Kruskal's perturbation method. J. Math Phys, 11, 2771-2775. [169]
- Stern, D. P. (1971a). A new formulation of canonical perturbation theory. Celestial Mech., 3, 241-246. [199]
- Stern, D. P. (1971b). Classical adiabatic theory. J. Math. Phys. 12, 2231-2242. [169]
- Stern, D. P. (1971c). The canonization of nice variables. J. Math. Phys., 12, 2226-2231. [91]
- Stewartson, K., and J. T. Stuart, (1971). A non-linear instability theory for a wave system in

plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 48, 529-545. [235]

Stoker, J. J. (1957) *Water Waves*. Wiley, New York. [57, 77]

Stokes, G. G. (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 9, 8-106. [30]

Stokes, G. G. (1857). On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments. *Cambridge Phil. Thans.*, 10, 106-128; *Coll. Papers*, 4, 77-109. [312]

Stone, P. H. (1969). The meridional structure of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, 26, 376-389. [234]

Strohbehn, J. W. (1968). Comments on Rytov's method. *J. Opt. Soc. Am.*, 58, 139-140. [373]

Struble, R. A. (1962). *Nonlinear Differential Equations*. McGraw-Hill, New York. [171, 223]

Stuart, J. T. (1958). On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 4, 1-21. [162]

Stuart, J. T. (1960a). Nonlinear effects in hydrodynamic stability. *Proc. Xth Int. Cong. Appl. Mech.* Stresa, Italy. [162]

Stuart, J. T. (1960b). On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 9, 353-370. [162]

Stuart, J. T. (1961). On three-dimensional nonlinear effects in the stability of parallel flows. *Advan. Aeron. Sci.*, 3, 121-142. Pergamon, Oxford. [162]

Stuart, J. T. See Stewartson and Stuart.

Sturrock, P. A. (1957). Nonlinear effects in electron plasmas. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A242, 277-299. [230]

Sturrock, P. A. (1958). A variational principle and an energy theorem for small amplitude disturbances of electron beams and of electron-ion plasmas. *Ann. Phys.*, 4, 306-324. [216]

Sturrock, P. A. (1962). *Plasma Hydromagnetic*, Stanford University Press, Stanford, California. [216]

Sturrock, P. A. (1963). Nonlinear theory of electromagnetic waves in plasmas. Stanford University Microwave Laboratory Rept. No. 1004. [230]

Swanson, C. A. (1956). Differential equations with singular points. Tech. Rept. 16, Contract Nonr.-220(11), Department of Mathematics, California Institute of Technology. [358]

Sweet, J. (1971). Impulse of a ring with nonlinear material behavior. *AIAA J.*, 9, 332-334. [58]

Tam, C. K. W. (1969). Amplitude dispersion and nonlinear instability of whistlers. *Phys. Fluids*, 12, 1028-1035. [234]

Tam, C. K. W. (1970). Nonlinear dispersion of cold plasma waves. *J. Plasma. Phys.*, 4, 109-125. [234]

Tam, K. K. (1968). On the asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation by the method of multiple scales. *J. Fluid Mech.*, 34, 145-158. [233, 360]

Tang, T. W., and A. Sivasubramanian, (1971). Nonlinear instability of modulated waves in a magnetoplasma. *Phys. Fluids*, 14, 444-446. [217]

Taniuti, T. See Asano and Taniuti.

Tatarski, V. I. (1961). *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. McGraw-Hill, New York. [361, 369, 373]

Tatarski, V. I. (1964). Propagation of electromagnetic waves in a medium with strong dielectric-constant fluctuations. *Soviet Phys. JETP (English transl.)*, 19, 946-953. [367, 369, 371, 372]

Tatarski, V. I., and M. E. Gertsenshtein, (1963). Propagation of waves in a medium with strong fluctuation of the refractive index. *Soviet Phys. JETP (English transl.)*, 17, 458-469. [382]

Taussig, R. T. (1969). Macroscopic quasilinear theory of high-frequency radiation in a cold plasma. *Phys. Fluids*, 12, 914-922. [234]

- Taylor, L. S. (1967). On Rytov's method. *Radio Sci.*, 2, 437-441. [373]
- Temple, G. (1958). Linearization and delinearization. *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Edinburgh*, pp. 233-247. [94]
- Terrill, R. M., and G. M. Shrestha, (1965). Laminar flow through a channel with uniformly porous walls of different permeability. *Appl. Sci. Res.*, A15, 440-468. [54, 156]
- Thome, J. (1883). *ber Integrale zweiter Gattung*. *J. Reine Angew. Math.*, 95, 241-250. [311, 326]
- Tidman, D. A. See Montgomery and Tidman.
- Timoshenko, S., and S. Woinowsky-Krieger, (1959). *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York. [36]
- Ting, L. See Keller and Ting.
- Ting, L., and S. Brofman, (1964). On take-off from circular orbit by small thrust. *ZAMM*, 44, 417-428. [233]
- Tollmien, W. (1947). Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. *ZAMM*, 25/27, 33-50, 70-83. [300]
- Tribus, M. See Sellers, Tribus, and Klein.
- Tseng, S. F. See Rand and Tseng.
- Tsien, H. S. (1956). The Poincar-Lighthill-Kuo method. *Advan. Appl. Mech.*, 4, 281-349. [78, 80, 99]
- Tso, W. K., and T. K. Caughey, (1965). Parametric excitation of a nonlinear system. *J. Appl. Mech.*, 32, 899-902. [224]
- Tumarkin, S. A. (1959). Asymptotic solution of a linear nonhomogeneous second order differential equation with a transition point and its application to the computations of toroidal shells and propeller blades. *Appl. Math. Mech. (Prikl. Mat. Mech., ASME transl.)* 23, 1549-1565. [353, 356]
- Usher, P. D. (1968). Coordinate stretching and interface location. II. A new PL expansion. *J. Computer Phys.*, 3, 29-39. [95]
- Usher, P. D. (1971). Necessary conditions for applicability of Poincar-Lighthill perturbation theory. *Quart. Appl. Math.*, 28, 463-471. [79]
- Vaglio-Laurin, R. (1962). On the PLK method and the supersonic blunt-body problem. *J. Aeron. Sci.*, 29, 185-206. [99]
- Van der Corput, J. G. (1956). Asymptotic developments I. Fundamental theorems of asymptotics. *J. Anal. Math.*, 4, 341-418. [18]
- Van der Corput, J. G. (1962). *Asymptotic Expansions*. Lecture notes, Stanford University. [12]
- Van der Pol, B. (1922). On a type of oscillation hysteresis in a simple triode generator. *Phil. Mag.*, 43, 177-193. [3]
- Van der Pol, B. (1926). On oscillation hysteresis in a simple triode generator. *Phil. Mag.*, 43, 700-719. [164]
- Van der Pol, B. (1927). *ber Relaxations schwingungen*. *Jahrb. Drahtl. Telegr. Teleph.*, 28, 178-184. [34]
- Van Dyke, M. D. (1952). A study of second-order supersonic flow theory. N.A.C.A. Rept. No. 1081. [27]
- Van Dyke, M. (1964). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic, New York. [110, 114, 119, 130]
- Van Hove, L. (1955). Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation. *Physica*, 21, 517-540. [369]
- Van Hove, L. (1957). The approach to equilibrium in quantum statistics. *Physica*, 23, 441-480. [369]
- Van Hove, L., N. Hugenholtz, and L. Howland, (1961). *Quantum Theory of Many Particle*

- Systems. Benjamin, New York. [367]
- Van Wijngaarden, L. (1968). On the oscillations near and at resonance in open pipes. *J. Eng. Math.*, 2, 225-240. [89]
- Van Wijngaarden, L. See Verhagen and Van Wijngaarden.
- Varley, E. See Mortell and Varley; Parker and Varley.
- Varvatsis, A. D. See Sancer and Varvatsis.
- Varvatsis, A. D., and M. I. Sancer, (1971). On the renormalization method in random wave propagation. *Radio Sci.*, 6, 87-97. [372]
- Vasil'eva, A. B. (1959). On repeated differentiation with respect to the parameter of solutions of systems of ordinary differential equations with a small parameter in the derivative. *Mat. Sb.*, 48, 311-334 (in Russian). [114, 121]
- Vasil'eva, A. B. (1963). Asymptotic behavior of solutions of certain problems for ordinary nonlinear differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives. *Usp. Mat. Nauk*, 18, 15-86 (in Russian); *Russian Math. Surveys*, 18, (1963) 13-81. [114]
- Verhagen, J. H. G., and L. Van Wijngaarden, (1965). Non linear oscillations of fluid in a container. *J. Fluid Mech.*, 22, 737-751. [89]
- Veronis, G. See Malkus and Veronis.
- Visik, M. I., and L. A. Lyusternik, (1957). Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Usp. Mat. Nauk*, 12, 3-122 (in Russian); *Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 20, 239-364, 1962. [114, 144]
- Volosov, V. M. (1961). Higher approximations in averaging. *Soviet Math. Dokl.*, 2, 221-224. [168]
- Volosov, V. M. (1962). Averaging in systems of ordinary differential equations. *Russian Math. Surveys*, 7, 1-126. [168]
- Von Zeipel, H. (1916). Movements of minor planets. *Ark. Mat. Astron. Fysik*, Stockholm, 11, No. 1, 1-58, No. 7, 1-62. [189]
- Voss, W. (1933). Bedingungen für das Auftreten des Ramsauereffektes. *Z. Phys.*, 83, 581-618. [346]
- Wasow, W. A. (1953). Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. *Ann. Math.*, 58, 222-252. [360]
- Wasow, W. A. (1955). On the convergence of an approximation method of M. J. Lighthill. *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 751-767. [79]
- Wasow, W. A. (1965). *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* Wiley, New York. [110, 309, 318, 358]
- Wasow, W. A. (1968). Connection problems for asymptotic series. *Bull. Am. Math. Soc.*, 74, 831-853. [309]
- Watson, G. N. (1944). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Macmillan, New York. [353]
- Watson, J. (1960). On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 9, 371-389. [162]
- Weaver, A. K. See Green and Weaver.
- Weinitchke, H. J. See Reissner and Weinitschke.
- Weinstein, L. A. (1969). *Open Resonators and Open Waveguides*. Golem Press, Boulder, Colorado. [380]
- Wentzel, G. (1926). Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingung für die Zwecke der Wellenmechanik. *Z. Phys.*, 38, 518-529. [114, 315, 339]
- Weyl, H. (1942). On the differential equations of the simplest boundary-layer problems. *Ann. Math.*, 43, 381-407. [114]
- Whitehead, A. N. (1889). Second approximations to viscous fluid motion. *Quart. J. Math.*,

23, 143-152. [31]

Whitehead, J. A. See Newell and Whitehead.

Whiteman, K. J. See Mc Namara and Whiteman.

Whitham, G. B. (1952). The flow pattern of a supersonic projectile. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5, 301-348. [57, 78, 87]

Whitham, G. B. (1953). The propagation of weak spherical shocks in stars. *Comm. Pure Appl. Math.*, 6, 397-414. [57, 78, 87]

Whitham, G. B. (1965a). A general approach to linear and nonlinear waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.*, 22, 273-283. [216, 221]

Whitham, G. B. (1965b). Nonlinear dispersive waves. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A283, 238-261. [226]

Whitham, G. B. (1967a). Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.*, 27, 399-412. [216]

Whitham, G. B. (1967b). Variational methods and applications to water waves. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A299, 6-25. [216]

Whitham, G. B. (1970). Two-timing, variational principles and waves. *J. Fluid Mech.*, 44, 373-395. [216]

Whittaker, E. T. (1914). On the general solution of Mathieu's equation. *Edinburgh Math. Soc. Proc.*, 32, 75-80. [62]

Whittaker, E. T. (1916). On the adelpic integral of the differential equations of dynamics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 37, 95-116. [199]

Whittaker, E. T. (1937). *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge. [199]

Wilcox, C. H. (1964). *Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications*. Wiley, New York. [309]

Wilcox, C. H. (1966). *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics*. Wiley, New York. [71]

Wingate, R. T., and R. T. Davis, (1970). Perturbation solution of a hyperbolic equation governing longitudinal wave propagation in certain nonuniform bars. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47, 1334-1337. [234]

Witt, A. See Gorelik and Witt.

Woinowsky-Krieger, S. See Timoshenko and Woinowsky-Krieger.

Wolfe, P. (1967). A new approach to edge diffraction. *SIAM J. Appl. Math.*, 15, 1434-1469. [380]

Wu, T. T. See Cheng and Wu.

Wu, Y. T. (1956). Two-dimensional sink flow of a viscous, heat-conducting, compressible fluid; cylindrical shock waves. *Quart. Appl. Math.*, 13, 393-418. [100]

Yagishita, T. See Kawakami and Yagishita.

Ying, S.J. See Chu and Ying.

Yuen, M. C. (1968). Nonlinear capillary instability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, 33, 151-163. [99]

Zabreiko, P. P., and L. B. Ledovskaja, (1966). Higher approximations of the BogolinbovKrylov averaging method. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 171, 1453-1456. [168]

Zauderer, E. (1964a). Wave propagation around a convex cylinder. *J. Math. Mech.*, 13, 171-186. [380]

Zauderer, E. (1964b). Wave propagation around a smooth object. *J. Math. Mech.*, 13, 187-199. [380]

Zauderer, E. (1970a). Boundary layer and uniform asymptotic expansions for diffraction problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 19, 575-600. [380]

Zauderer, E. (1970b). Uniform asymptotic solutions of the reduced wave equation. *J. Math.*

Anal. Appl., 30, 157-171. [378, 380]

Zawadzki, E. M., and G. J. Lewak, (1971). Penetration to second order of an electrostatic field into a warm plasma. J. Plasma Phys., 5, 73-87. [78]

Zierep, V. J., and J. T. Heynatz, (1965). Ein analytisches Verfahren zur Berechnung der nicht-linearen Wellenausbreitung. ZAMM, 45, 37-46. [89]

Zwaan, A. (1929). Intensitäten im Ca-Funkenspektrum. Ph. D. Thesis, Utrecht. [339]

Zwanzig, R. (1964). On the intensity of three generalized master equations. Physica, 30, 1109-1123. [382]

10 Asymptotic Methods by Bogolibov, Mitropolsky

10.1 Introduction

1.

The study of oscillatory processes is of basic importance in widely diverse branches of mechanics, physics and engineering. The apparently diverse and dissimilar oscillatory processes like vibrations of plants and machinery, electromagnetic oscillations in radio engineering and optics, automatic oscillations in control systems and servomechanisms, sonic and ultrasonic oscillations have been brought together through the methods of mathematical physics into a general science of oscillations.

It is noteworthy that the role of the study of oscillations is rapidly increasing with the development of science and engineering. Not to speak of such disciplines as radioengineering and acoustics which are completely 'occupied' with the study of oscillations, let us take the example of machine building. Till recently no special importance was given to the study of oscillations in this sphere. Calculations of their strength were based on statistical notions about the dependence of deformations on load. However, with attempts to increase the number of revolutions and reduce the overall dimensions of the machine in order to speed up the process of machine building, it remained no longer possible to neglect the role of oscillations.

A large number of breakdowns, resulting from the excitation of oscillations because of an increase in the actual loads, made it necessary on the part of designers and engineers to study carefully the possible vibrations of the machine units and calculate their intensity.

We can clearly locate the origin of the science of oscillations in the classical mechanics of the motion of a pendulum during the times of Galileo, Huygens and Newton. There are beginnings of the theory of small oscillations in the works of Lagrange. After further developments the theory acquired the name of the "theory of linear oscillations", i.e. of oscillations characterisable by linear differential equations with constant coefficients and with homogeneous or free terms which are themselves certain functions of time.

In the works of a number of scholars differential equations were used as a powerful tool for analysis. Thus, A.N. Krylov and his followers at whose hands the theory of oscillations of successfully, applied this tool for solving problems in the toss gyroscope and in artillery.

The simplicity of the fundamental principles of the theory of linear differential equations helped towards a great development in the theory of linear oscillations, imparted generality to its theoretical formulations and clarity to the physical meaning of the latter. Such basic concepts of the theory as natural frequency, attenuation ratio, resonance, normal vibrators, etc. acquired wide popularity and became indispensable tools for investigations in almost all the departments of physics and engineering. The linear property of the differential operators, interpretable in terms of the principle of superposition of the oscillations, and the transition of the harmonic time functions to the harmonic functions with the same frequency through the application of these operators, permitted the reduction of an analysis of the effect of forces in a

linear oscillating system to an analysis of the effect of forces of the simplest type with harmonic dependence on time. In the same way the 'spectral' approach to the oscillatory processes was worked out which acquired stupendous importance even in fields outside the theory of oscillations proper.

The technique for calculations in the concrete linear oscillating systems, under the stimulating influence of electrical engineering, has been improved by propounding the so-called symbolic method with its several variants, say for instance, the method of complex amplitudes. Its basic idea is that since the operators of differentiation in combination with constant coefficients are subject to the same laws, distributive, associative and commutative, as ordinary numbers, the operators of differentiation with respect to time can be replaced by certain symbols and a system of linear differential equations with constant coefficients can be replaced by one of linear algebraic equations. By solving these we can obtain the "symbolic solution" that can be later interpreted with the help of a defined formula.

In the case of oscillating systems with an infinite number of degrees of freedom (or, as they are also called, systems with distributed parameters) represented by partial differential equations involving derivatives with respect to independent variables other than time also, the symbolic method yields equations with a reduced number of variables and thus simplifies the case substantially.

After the pioneering work of Heaviside the symbolic method came to be applied with success mainly in the field of electrical engineering for solving numerous problems. However, for a long time since then, doubts were expressed by mathematicians regarding its validity and its basic principles. It was only in the twenties of the present century, after the appearance of the works by Carson, Deich, Bromwich and others, that the mathematical side of the symbolic method began to be clarified with the help of Laplace transformations and the powerful tools of the theory of the functions of a complex variable.

Extensive literature is being devoted at the present time to the theory and the applications of the symbolic method.

In the Soviet Union, work in this field has been done by A.M. Efros and A.M. Danilevskii, N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov, A.I. Lurye and others.

As the theory of linear oscillations has been worked out in detail, for reasons mentioned above, and as its mathematical apparatus functions, so to say, almost automatically, the investigators in this line attempted to fit the oscillatory processes studied by them, as far as possible, into linear schemes, neglecting the non-linear terms without proper justification. Here the point that is often missed is that such a linearization may lead to real errors not only of a quantitative but also of a qualitative nature.

In the initial stages of development of the theory of oscillations it was only in a few cases that linearization was not resorted to and the non-linear oscillations were examined as such (Ostrogradskii, Helmholtz, Rayleigh). It should, however, be noted that in the last century there already existed a mathematical apparatus which, if developed to the necessary extent and generalised, might have served as the tool for investigating the non-linear oscillations, at least the oscillations sufficiently close to the linear ones.

An oscillation is treated as sufficiently close to a linear one when, though the corresponding differential equation be non-linear, there is a parameter z in the equation such that for a zero value of z the equation degenerates into a linear differential equation with constant coefficients. In this case it is assumed that the parameter ε is 'small', i.e. it may be taken as sufficiently small in absolute magnitude. When we talk of such a mathematical theory we have in our mind the theory of perturbation worked out by the astronomers for studying planetary motion. Here the objects under study are the motions represented by differential equations

4 ASYMPTOTIC METHODS IN THE THEORY OF NON-LINEAR OSCILLATIONS with a small parameter. When the motions integrable by elementary means degenerate into of

the 'two-body problem'. i.e. into the usual equation

Such problems, particularly the famous "three-body problem" had been discussed during the initial stages of the development of celestial mechanics. However, there immediately arose the difficulty that it was impossible to use the usual method of expansions would be suited to the study parameter for arriving at results which intervals of time. In fact, the of motion during sufficiently prolo small parameter lead to approximate usual expansions in powers of antities, characterizing the motion, in formulae for the unknown qus depending harmonically on time, secular cases which terms like

also, with time ' t ' appearing outside the sine or cosine symbol. Consequently the intensity of the secular terms increases rapidly with the increasing values of t . Thus it is clear, even without a further analysis, that the range of application of the approximate formulae is limited to very small intervals of time.

This difficulty may be fully illustrated by the trivial case of the attenuated motion described by the equation

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon x \quad (2)$$

with a small positive parameter t . The solution of this equation is

$$x = Ce^{-\varepsilon t} \quad (3)$$

Now, had we applied the usual method of expansions in powers of t for solving this equation, we would have got

$$x = C \left(1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \dots \right) \quad (4)$$

Confining ourselves to one, two or three terms, etc., i.e. to the formulae of first, second or third and the like approximations, we cannot judge whether our quantity is attenuated with an increase in time or not. Hence these formulae are applicable only when $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$, and during this time x does not undergo any appreciable changes.

The above mentioned property of the ordinary expansions in powers of a small parameter is also revealed in the analysis of the method suggested by Poisson for solving problems of the pendulum oscillations.

The method of Poisson is this. Suppose we have to find a solution of a non-linear equation containing a small parameter ε , which we can represent in the form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (5)$$

In this case the solution which satisfies the equation to an accuracy of the order ε^{n+1} , can be sought in the form :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n \quad (6)$$

Substituting series (6) into the left-hand-side of equation (5) we write out the result in powers of ε , neglecting terms containing powers of ε higher than the n th. Thereafter we equate the coefficients of like powers of the parameter ε .

In this way we obtain the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 &= 0 \\ d^2 x_1 + \omega^2 x_1 &= f(x_0, dx_0) \\ dt^2 + \omega^2 \\ d^2 x_2 + \omega^2 x_2 &= f'_x(x_0, dx_0) x_1 + f'_x(x_0, dx_0) x'_1 \\ dt^2 + \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

However, it can be easily seen that the use of the above method entails appearance of secular terms mentioned earlier.

Let us examine, in particular, the equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \quad (8)$$

which can be interpreted as an equation of non-attenuating oscillations of some mass m attracted towards an equilibrium position by a restituting elastic force

$$p(x) = \alpha x + \gamma x^3 \quad (9)$$

We assume that the characteristic of the restoring force $p(x)$ is nearly linear. Hence, putting $\frac{\alpha}{m} = \omega^2, \gamma = \varepsilon$, we obtain a solution with a second order approximation.

6 ASYMPTOTIC METHODS IN THE THEORY OF NON-LINEAR OSCILLATIONS

We will have

$$x = x_0 + cx_1$$

whence

We obtain from equation (11)

$$x_0 = a \cos(\omega t + \theta) \quad (13)$$

and, putting this value into the right-hand-side of equation (12), we get

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4} a^3 \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4} a^3 \cos 3(\omega t + \theta) \quad (14)$$

Hence we obtain for x_1 ,

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega} a^3 \sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta) \quad (15)$$

Putting (13) and (15) into (10) we obtain the unknown solution in the form

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta) \quad (16)$$

The secular term

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta)$$

is contained in the approximate solution obtained above and hence the oscillations represented by the formula (16) must swing and their amplitudes must increase indefinitely with the unlimited increase in time. This is in express contradiction with the nature of an accurate solution of equation (8), which, as we know, can be expressed by an elliptic function and has the form

$$x = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \frac{2k}{\pi} \psi \right\}, \quad (17)$$

where cn and k , respectively, denote the elliptic cosine and the complete elliptic integral of the first kind.

The lack of correspondence between the solution (16) and the real situation can also be corroborated by the following fact.

If we multiply equation (8) by $\frac{dx}{dt}$ and integrate, we easily obtain the first integral, the kinetic energy integral ;

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{\gamma}{4}x^4 = E \quad (18)$$

expressing the law of conservation of energy.

It follows from (18) that when $x > 0, y > 0, x^2$ cannot be greater than $\frac{2E}{\alpha}$ and hence, the amplitudes of oscillations cannot increase indefinitely.

Analysing the simple examples given here we are convinced that the method described above, for obtaining approximate solutions with the help of an expansion of x in powers of a small parameter ε , is suitable only for very small intervals of time. Because of the presence of secular terms, equation (16) is unsuitable not only for quantitative but also for qualitative analysis of the behaviour of the solution of equation (8) on the entire real axis, even when the series (16) is convergent [vide, for instance, the first example, equation (2)].

We further note that the existence of secular terms in equation (16), in no circumstance, means that equation (8) does not generally have a periodic solution. This is only because of an unsuitable choice of an expansion.

We shall justify the above statement by the following simple example. Let us examine the function

$$\sin(\omega + \varepsilon)t, \quad (19)$$

with a period $\frac{2\pi}{\omega + \varepsilon}$; when ε is small, for any value of ω and t we can expand the function as:

$$\sin(\omega + \varepsilon)t = \sin \omega t + \varepsilon t \cos \omega t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} \sin \omega t - \frac{\varepsilon^3 t^3}{3!} \cos \omega t + \dots \quad (20)$$

Because of the appearance of secular terms on the right-hand-side of equation (20), it is difficult to establish the periodicity of the function.

The presence of secular terms in the theory of perturbations introduces a difficulty of exactly the same nature as above. After the works of Lagrange and Laplace, a number of effective methods were suggested to tackle this difficulty. Although power series expansions are, as a rule, divergent; nevertheless, the approx $m = 1, 2, 3, \dots$, are obtained by taking a limited number of term calculations. In fact, these series are extremely suitable for practical the error of the m -th approximation is asymptotic in the sense that 1 -th power of the small parameter ε . For proportional to the values of $m = 1, 2, 3, \dots$ the error can be this reason, for fixed value when the value of ε is sufficiently small. made as small as desired indefinitely we would not get convergence. of course, by increasing m , a convergence is not of essential imporHowever, the absence of surfations, because in practice the determination of tance in practical calculare powers of a becomes so complicated that the coefficients of succes proximations of the first or the second order or actually only the apprough order may be used; but their usefulness is in general, of not very hig by the property of asymptoticity.

completely conditioned typtoric methods were found to be very effective

The aforesaid asymp to were later carried over to quantum mechanics. in celestial mechanics and we as as a perced that these methods were developed

It should, however, be emphasiz systems represented by canonical especially for conservative dynamice applied, without having been generalised, equations and thus could not be a the

non-linear oscillating systems under to the study of a majority systems are found to be non-conservative, investigation, because these of energy.

theory of perturbations there came to be developed

Besides the theor of the which was not especially concerned with the another mathematical Here we refer to the theory of linear differential conservative systems equations with pery of periodic solutions of Lyapunov and Poincare'. The latter theory deals with the general non-linear differential equations containing a small parameter z in such a way that when $z = 0$ they have periodic solutions and when ε is sufficiently small and $\neq 0$ one obtains explicit criteria for the existence and stability of the periodic solutions. Methods of Lyapunov and Poincare' have the fundamental advantage over the usual methods of the theory of perturbations that they have a strict mathematical foundation and are suited not only to qualitative but also to quantitative analysis.

As we have seen above that although there existed a mathematical apparatus that might be used for studying non-linear oscillations, it was not systematically used, say right up to the beginning of the thirties of the present century. Its deeper internal relations with the problems of the non-linear oscillations were also not revealed.

The first methods of Lyapunov and Poincare' have been used since 1929 for a systematic analysis of the non-linear oscillations by the Soviet school of physicists to which belonged such names as L. I. Mandelstam, N. D. Papalexi, A. A. Andronov, A. A. Witt.

Here we should note that the study of the non-linear processes acquired immediate importance and aroused great interest only since the twenties because of the fast development in the field of radio engineering after the discovery of the electronic tubes. Problems like those of the stable generation of sustained oscillations, frequency transformations, forced synchronization, modulation, etc. might be solved only by introducing non-linear elements into the oscillating system. This is because, independent of the initial conditions, there cannot be any sustained oscillations in a purely linear oscillating systems : when external harmonic forces with a frequency ω come into play forced oscillations with the same frequency ω are generated and so on. Electronic tubes were found to be a very flexible and convenient means for creating required non-linear elements.

Only after the appearance of numerous investigations into the problems of the aforesaid type, it became physically clear that the radical theoretical difference between the mechanics of non-linear oscillations and that of linear oscillations subsists in its entirety, even when we consider weakly non-linear oscillations described by differential equations differing from the linear ones with constant coefficients, only in respect of very small terms.

Suppose that the system is so close to the linear one that oscillations in one period have a form very close to the harmonic oscillations. However, if we examine these oscillations for an interval of time large in comparison with the period of oscillation, we would find a substantial effect of even small deviations of the system from the linear one, this effect being expressed through the presence of small non-linear terms in the differential equations. Thus, for example, there may be sources and sinks that produce and absorb very small amount of energy during one cycle of oscillation, but when these sources and sinks remain active over a longer period of time the effect produced by them may accumulate and exert substantial influence on the course of the oscillation process, on its attenuation, its swing and stability. Similarly the nonlinearity of a quasi-elastic force will, during prolonged action, exert its effect on the phase of oscillations, etc. Thus, small non-linear terms may, so to say, exert cummulative influence.

We would also note that the principle of superposition is infringed by non-linearity, and the various harmonics of oscillations interact among themselves, so that a separate analysis of the behaviour of each harmonic component of oscillations becomes impossible.

It is perfectly natural that the oscillating systems most accessible for investigations are those with small non-linearity, because the methods of the theory of perturbations may be applied to

them in some form or the other. Analysis of a system with large non-linearity is a very difficult problem to be tackled mathematically, and special approach is required for each distinct case.

Oscillating systems with one degree of freedom and under the action of time-independent forces have been, more or less, investigated in a qualitative manner.

At present a number of sufficiently general methods are available for treating weakly nonlinear systems described by the aforesaid differential equations which involve a small parameter and contain non-linear terms. These methods are applied to many typical classes of oscillating systems frequently met with in practice.

One of the first of such methods is the method of Van-der-Pol. In his investigations Van-der-Pol analysed chiefly an equation of the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (21)$$

with a small positive parameter ε . Here it is usually assumed that

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (22)$$

With a well known schematization this equation correctly describes, at least qualitatively, the processes of self-excited oscillations in electronic generators.

In arriving at the first approximation Van-der-Pol proposed a special method of "slowly varying" coefficients, analogous to one of the methods already used by Lagrange in celestial mechanics. In fact, he presented the real solution in the form of a function representing harmonic oscillation

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

with slowly varying amplitude a and phase φ . These latter quantities have to be obtained from differential equations with reduced variables

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon B(a), \quad (24)$$

where $A(a)$ and $B(a)$ are certain functions of amplitude, simply determinable by the given expression $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Van der Pol arrived at a number of important results with the help of his own method. Thus, for example, he investigated the process of adjustment of oscillations, stationary conditions, oscillatory hysteresis, etc.

It should, however, be noted that in the formulation given by Van-der-Pol, approximation was affected by simple intuitive reasonings, and though this approximation was found fruitful during the early period of work in the field, it could not completely satisfy the demands made in practice. Moreover, the question of its theoretical foundation, limits of its applicability and of higher approximations remained hazy.

The principal aim of the present work is to give an exposition of the asymptotic methods in non-linear mechanics as developed by N. M. Krylov and N. N. Bogoliubov. The method of U. A. Mitropolskii has also been explained. In investigating systems with slowly varying parameters main attention has been given to the weakly nonlinear systems with one degree of freedom.

At the end of the book some of these methods have been extended to more general cases. As we have already said the kind of problems dealt by us is that most frequently met with in practice.

Hence we would examine a number of typical examples of such systems. We shall use these examples in future for illustrating methods that will be stated later.

2. The simplest example of a non-linear oscillating system is the well known mathematical pendulum (Fig. 1). If we neglect friction the equation of motion of the pendulum is:

$$ml^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + mgl \sin x = 0, \quad (25)$$

where m is the mass of the pendulum, l its length, g the acceleration due to gravity, and x the angle of deviation from the vertical position.

For small angles of deviation $\sin x$ may be replaced by x to a sufficient degree of accuracy. In this case, equation (25) may be reduced to the form :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0 \quad (26)$$

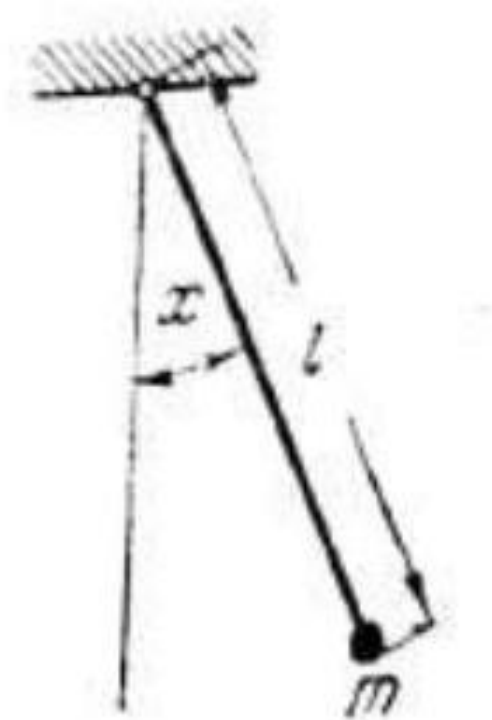


Fig. 1.

The equation (26) is the equation of harmonic oscillations which

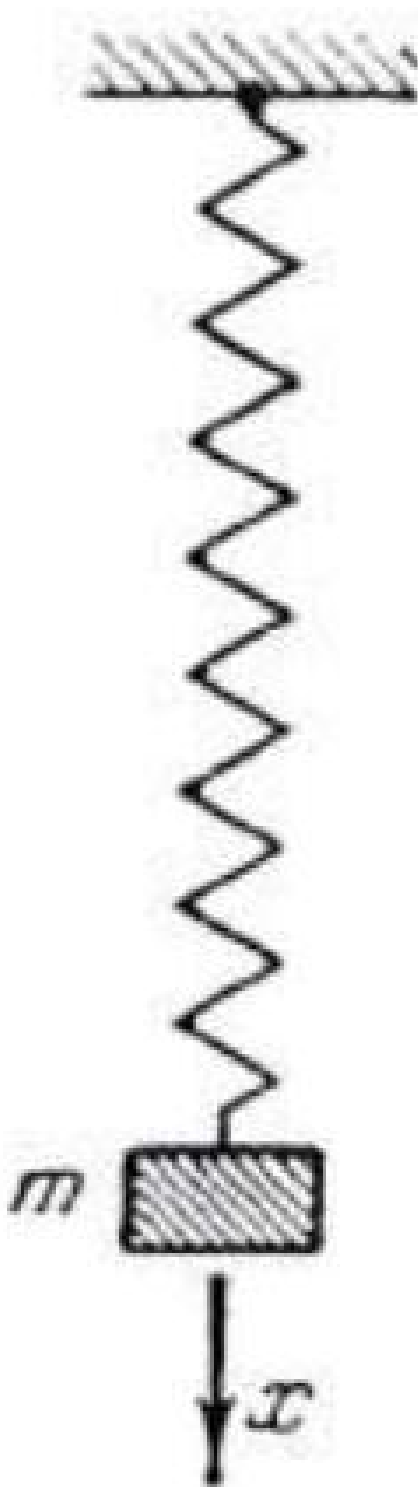


Fig.2.

will be isochronous, i.e. their period $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ will not depend on the initial velocity and the initial direction.

However, for large deviations of the pendulum equation (26) will be incorrect; when deviations do not exceed angles of the order of one radiation, $\sin x$ in equation (25), to a sufficient degree of accuracy, may be replaced by the first two terms of the expansion in the series

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (27)$$

Hence equation (25) assumes the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (28)$$

Obviously, as it will be shown in detail below, the oscillations in this case will not be isochronous and their frequency will depend on the amplitude of oscillation

$$\omega = \omega(a).$$

We shall also examine the oscillation of some mass m hung from a spring (Fig. 2). Let $f(x)$ be the restoring force in the spring when displaced by a distance x from the state of rest. In this case the rigidity of the spring for a displacement of x may be defined as $f'(x)$. Neglecting the force of friction, even here we have the equation of motion

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0 \quad (29)$$

If the rigidity of the spring increases with an increase in the displacement, we say, by convention, that the spring has a rigid characteristic of the non-linear restoring force (Fig. 3).

If rigidity decreases with an increase in displacement the spring is said to have a soft characteristic (Fig. 4). Evidently the oscillations of the load described by equation (29) are also not isochronous because the period of oscillation decreases with the increase in rigidity and in the present case the effective rigidity is increasing with amplitude. Similarly in the case of soft characteristic the time period will increase with

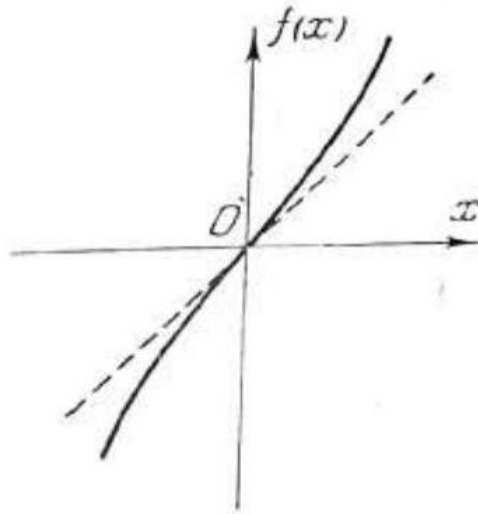


Fig. 3.

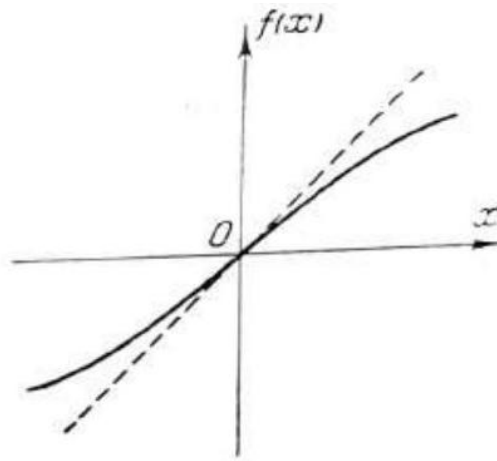


Fig. 4.

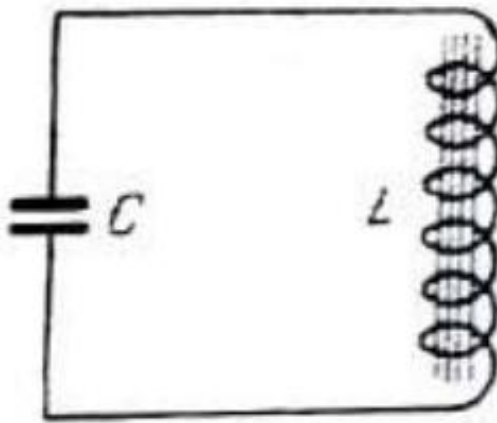


Fig. 5.

amplitude, e.g. in equation (28) the restoring force $f(x) = mgl \left(x - \frac{x^3}{6} \right)$ has a soft characteristic and hence the period of oscillation will increase with increasing amplitude.

We shall, now, give an example of a non-linear electrical oscillatory system. For this we will examine an oscillatory circuit with a selfinductance L , an ironcore and a capacitance C (Fig. 5). Let Φ be the magnetic flux through the coil. In this case the equation for the circuit may be written in the form :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0, \quad (30)$$

where i is the strength of the current. For finding the dependence of their current strength and the induced current through the coil in the presence of an ironcore we will use the following generally accepted formula :

$$i = a\Phi - b\Phi^3,$$

where $a > 0$, $b > 0$.

In this case, substituting (31) into (30) we obtain

$$\frac{d^3\Phi^2}{dt^2} + \frac{1}{C} (a^\Phi - b\Phi^3) = 0 \quad (32)$$

for which the restoring force has also a soft characteristic.

In the oscillatory systems discussed above we did not take into consideration forces of friction which cause damping of the natural oscillations.

Indeed, the laws of mechanical friction are, generally speaking, very insufficiently investigated. In practice we use the following laws of friction :

1. Force of friction is proportional to velocity (for oscillations in air with small velocities).
2. Force of friction is proportional to square of the velocity (for oscillations in a liquid or air but with high velocities).
3. Force of friction is independent of velocity and acts in a direction opposite to that of the velocity (Coulomb friction).
4. Force of friction depends on the loss in the material during oscillations (in a spring, in the thread of a pendulum, etc.). In this case the force of friction usually has a complex dependence on displacement or velocity (internal friction).

Thus, for example, taking a pendulum freely swinging in air and supposing that the force of friction is proportional to its velocity, we obtain the equation of motion in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (33)$$

where λ is the coefficient of proportionality, usually called damping coefficient.

If a body hung from a spring with restoring force $f(x)$ is immersed in a liquid, then, supposing that the force of friction is proportional to the square of the velocity, we obtain the equation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm \alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + f(x) = 0; \quad (34)$$

here α is the damping coefficient and a "positive" sign is to be taken when $\frac{dx}{dt} > 0$, and a "negative" sign when $\frac{dx}{dt} < 0$, because the force of friction is always in a direction opposite to that of the velocity of the body.

Let us further suppose that this body hung from the spring is acted upon not by quadratic but by Coulomb friction.

In this case the equation of motion will be :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) + f(x) = 0, \quad (35)$$

where A is the absolute magnitude of the force of friction and

$$\operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \begin{cases} 1, & \text{if } \frac{dx}{dt} > 0 \\ -1, & \text{if } \frac{dx}{dt} < 0 \end{cases} \quad (36)$$

As an example illustrating the calculation of forces of internal friction we discuss vertical oscillation of some mass

Fig. 6.

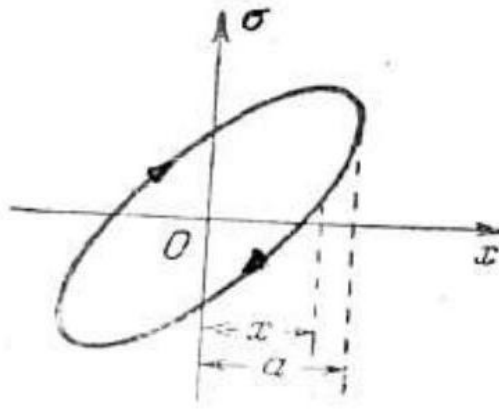


Fig. 7.

m , hung from a rod of length l with cross-section F and with a modulus of elasticity E^* (Fig. 6). We suppose that mass m can execute only vertical oscillations and that the mass of the rod, acting as spring in our illustration, is negligible compared to this mass m . In this case, the system may be looked upon as one with a single degree of freedom. While formulating the differential equations of motion of the mass m , we shall take into consideration the loss in the oscillation energy inside the material of the rod.

Denoting the relative extension of the rod by x we obtain an equation in the form :

$$ml \frac{d^2 x}{dt^2} + EFx + EF \overleftrightarrow{\Phi}(x) = 0, \quad (37)$$

or

$$-\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 [x + \overleftrightarrow{\Phi}(x)] = 0, \quad (38)$$

where $\omega^2 = \frac{EF}{ml}$ is the natural frequency of the linear system, $\overleftrightarrow{\omega^2 \Phi(x)}$ is a function representing damping in the material of the rod and its value is different in the case of ascending and descending motion. This is indicated by two oppositely directed arrows.

Thus, the process of oscillation of the system under investigation, in which loss of energy occurs inside the material of the rod, is actually expressed by two differential equations.

We shall assume that the relation between the tension σ and deformation x in the rod differs little from the linear Hooke's Law. In this case the equation (38) will be close to linear (or approximately linear).

We now give an explicit expression for the function $\omega^2 \overleftrightarrow{\Phi}(x)$. We assume that vertical

*) This example has been discussed in detail by G.S. Pisarenko [36]. He has worked out a general method that can be used to study the influence of the internal friction in systems with finite as well as indefinite number of degrees of freedom.

16 asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations
oscillations of the mass m , the hysteresis loop being drawn with the coordinate x denoting relative extension and the coordinate σ normal tension, will be symmetric (Fig. 7).

In this case the real modulus of elasticity will be a variable and according to the hypothesis of N. N. Davidenkov the expression for function $\omega^2 \overleftrightarrow{\Phi}(x)$ has the following form :

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \overrightarrow{\Phi}(x) &= -\frac{v\omega^2}{n} [(a+x)^n - 2^{n-1}a^n] \\ \omega^2 \overleftarrow{\Phi}(x) &= \frac{v\omega^2}{n} [(a-x)^n - 2^{n-1}a^n] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

where ν and n are constants to be determined experimentally and a is the amplitude of oscillations.

For the oscillating systems discussed above, sometimes we do not take into consideration the dissipative forces (forces of friction), though in reality, the dissipative forces, to some extent or other, act upon the oscillating system and as a result the oscillations are damped in the course of time.

In actual circumstances damping may not occur when there is some source of energy in the system which compensates the energy expended to overcome the dissipative forces.

A periodic force acting on the oscillating system may be taken as such a source of energy. Thus for example, when an external periodic force possessing a single harmonic acts upon an ordinary linear vibrator (oscillator), we obtain the following equation of motion :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = E \sin \nu t \quad (40)$$

according to which there will be a sustained oscillation in the oscillating system. In this case, losses due to friction, represented by the dissipating member $\lambda \frac{dx}{dt}$, will be compensated with energy flowing from outside and characterized by the periodic term $E \sin \nu t$.

The source of energy by itself cannot have any definite periodicity, but its effect on an oscillating system plays the role of a negative friction, so to say, and this compensates the usual positive friction brought about by dissipative forces.

Oscillations of the type essentially differing from the above mentioned ones, with a periodic source of energy, are called selfoscillations.

In self-oscillating systems the position of equilibrium loses stability under certain conditions and this gives rise to a motion which shifts the system to conditions of stationary periodic oscillation (i.e., oscillation with constant amplitude and phase).

In order to attain stationary periodic behaviour, it is necessary that the system should consist of three components : an oscillating system, some source of energy driving the oscillating system (a source that by its action on the system compensates loss due to friction, renders the position of equilibrium unstable and builds up the oscillations) and lastly some limiter that converts these growing oscillations to a stationary state.

The first two components of the system may be linear, but the limiter of oscillations always happens to be non-linear in character. Hence, any self-oscillating system is described by non-linear differential equations.

Self-oscillating systems are widely used and possess great efficacy in physics and engineering.

So as to form a concrete idea of the character of oscillations in a self-oscillating system we shall analyse an oscillating system with one degree of freedom.

When the oscillations have a small amplitude we investigate the linear differential equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (41)$$

The general solution of this equation, as we know, will be

$$x = ae^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (42)$$

where a and φ are constants of integration,

$$\delta = \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m} \right)^2. \quad (43)$$

Hence, it is evident that if $\lambda > 0$, the amplitude of the small oscillations ae^{-t} will attenuate according to an exponential law.

If, on the other hand, $\lambda < 0$, small oscillations will step up and their amplitudes will increase according to an exponential law.

In view of the fact that the amplitude of oscillations cannot go on increasing indefinitely it is natural to assume that starting from some initial negative value the coefficient of damping would change sign and become positive.

This property of the oscillating system may be expressed through a differential equation of oscillations by changing, the constant coefficient λ by a variable coefficient, for example, of the form

$$\lambda = -A + B \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (44)$$

where $A > 0, B > 0$.

As a result of such substitution we get an equation of the form

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{ -A + B \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} dx/dt + kx = 0 \quad (45)$$

from this it follows that the attenuation is negative for small absolute values of the quantity $\frac{dx}{dt}$ and positive for the large ones. Thus, oscillations of small amplitudes will step up and those of large amplitudes damp down.

Thus, we see that there are sustained self-oscillations to which not only oscillations with small amplitudes but also those with large amplitudes tend to conform.

Equation (45) is called the Rayleigh-equation and is of great importance in the theory of self-oscillations.

Equation (45) with a change in variables

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{k}{m}} \\ y &= \sqrt{\frac{3Bk}{Am}} \int x d\tau \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

may be reduced to the form

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - z(1 - y^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0 \quad (47)$$

where A
 $\sqrt{km} = \varepsilon$.

The equation of self-oscillations expressed in this form is known as the Van-der-Pol equation.

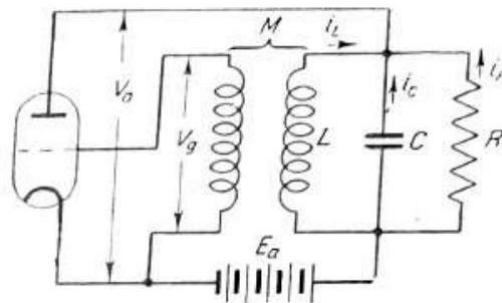


Fig. 8.

We shall now give concrete examples of self-oscillating systems.

We examine an electronic generator (oscillator) schematically represented in Fig. 8.

Let i_L, i_C, i_R , denote respectively, the currents in the self inductance L , the capacitance C , and the resistance R . We denote the constant voltage in the anode circuit by E_a , the full anode voltage of the electronic tube by V_a , grid voltage by V_g , anode current by i_a and the coefficient

of mutual inductance between the grid circuit and the oscillating circuit by M . Following Fig. 8 and neglecting the grid current we have :

$$L \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{C} \int^t i_C dt = Ri_R = E_a - V_a \quad (48)$$

$$M \frac{di_L}{dt} = V_g \quad (49)$$

$$i_a = i_L + i_R + i_C \quad (50)$$

Hence, we can write down the differential equation

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = i_a \quad (51)$$

As we know, the anode current i_2 happens to be a certain function of control voltage

$$\begin{aligned} u &= V_g + DV_a, \text{ i.e.} \\ i_a &= f(u) = f(V_g + DV_a) \end{aligned} \quad (52)$$

where D is the constant called 'penetrance' (penetration factor) of a tube. Usually the numerical value of D is of the order of unity.

Putting (52) into (51) and referring to (48) and (49) we obtain

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = f \left[DE_a + (M - DL) \frac{di_L}{dt} \right] \quad (53)$$

We now examine the quantities

$$E_0 = DE_a,$$

and

$$V = (M - LD) \frac{di_L}{dt}$$

Evidently V is the variable component of the control voltage u , excited by the oscillations of the current in the oscillating circuit, and E_0 the constant component excited by the source of the direct current.

In this case we obtain from (53) the following equation for the unknown V :

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + V + \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (54)$$

Changing variables according to the formula

$$t = \tau \sqrt{LC},$$

we obtain the following dimensionless equation for the electronic oscillator :

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{d\tau} = 0. \quad (55)$$

Under certain assumptions, equation (55) may be reduced to the equation of Van-der-Pol.

In fact, we assume that the constant component of the control voltage E_0 is chosen in such a way that it happens to be the abscissa of the point of inflection for the performance curve of the tube,

$$i_a = f(u),$$

so that

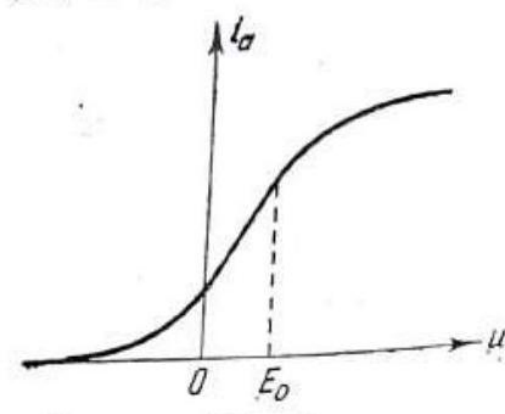


Fig. 9.

$$f''(E_0) = 0$$

Hence, for a certain range of the values of V we can write approximately :

$$f(E_0 + V) = f(E_0) + V f'(E_0) + \frac{V^3}{6} f'''(E_0). \quad (56)$$

We assume that

$$(M - LD) f'''(E_0) < 0, \\ (M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} > 0.$$

Hence, equation (55) is transformed into the equation of Van-der-Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (57)$$

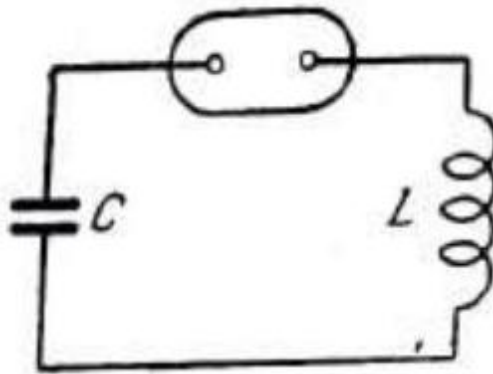


Fig. 10.

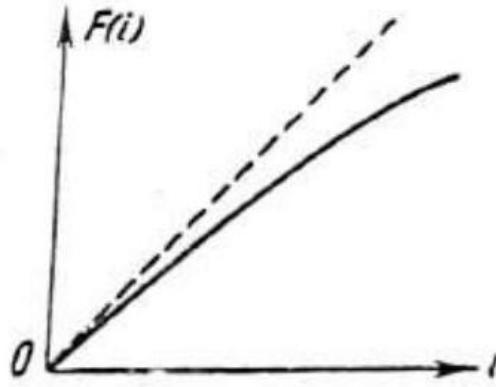


Fig. 11.

where the following substitutions have been made:

$$\begin{aligned} & (M - LD)f'(E_0) - L \\ & \quad \sqrt{LC} \\ & \alpha^2 = 2, \alpha V = x \\ & \quad 2 \left\{ (M - LD)f'(E_0) - \frac{L}{R} \right\} \end{aligned}$$

We give here another example of a self-oscillating system met with in electrical engineering.

We examine the electrical oscillating circuit (Fig. 10) consisting of a capacitance C , a self-inductance L and some element with a nonlinear voltage-current performance curve $e = F(i)$ (Fig. 11).

Here, the oscillations in the circuit will be governed by the equation :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i + CF'(i) \frac{di}{dt} = 0, \quad (58)$$

or if we assume that the characteristic curve can be approximated by a fifth degree polynomial

$$F(i) = A + Bi + Di^2 + Ei^3 + Fi^4 + Gi^5, \quad (59)$$

the oscillations in the circuit will be described by the following equation :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i + C(B + 2Di + 3Ei^2 + 4Fi^3 + 5Gi^4) \frac{di}{dt} = 0. \quad (60)$$

A solution for this equation, corresponding to the stationary oscillatory condition may exist, depending upon the nature of the polynomial (59).

As an example of a mechanical self-oscillating system we discuss Froude's pendulum.

The design of this pendulum is schematically shown in Fig. 12.

A sleeve M with a pendulum rigidly attached to it is put on a shaft O rotating with a uniform velocity, the friction of the sleeve when rotating on the shaft being known (Fig. 12). We denote the angle of deviation

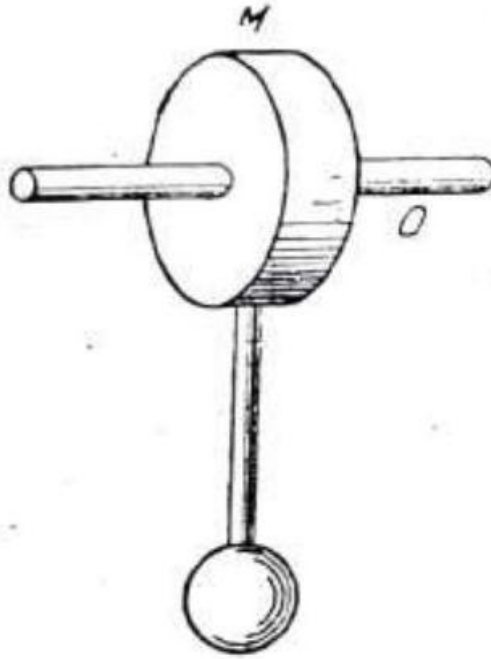


Fig. 12.

of the pendulum axis from the vertical (Fig. 13) by θ , the angular velocity of rotation of the shaft by u , the moment of inertia of the pendulum by J , and the moment of the force of friction experienced by the pendulum during its motion in air by $\lambda \frac{d\theta}{dt}$, i.e. proportional to the angular

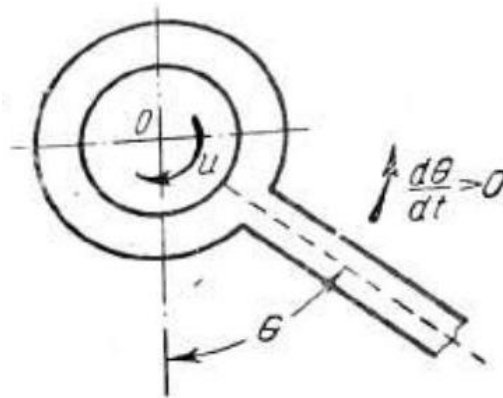


Fig. 13.

velocity $\frac{d\theta}{dt}$.

While constructing the equation of motion we have to take into account, besides the force of friction due to the air resistance, the moment of the force of friction between the sleeve and the shaft, as well. We assume, for the sake of simplicity, that this moment M is a certain function F of the relative angular velocity v (of the pendulum with respect to the shaft) :

$$M = F(v) \quad (61)$$

In the case under consideration we have

$$v = u + \frac{d\theta}{dt},$$

and hence the equation of motion of the Froude's pendulum (under idealised conditions) may be written in the form

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + F \left(u + \frac{d\theta}{dt} \right) + mga \sin \theta = 0,$$

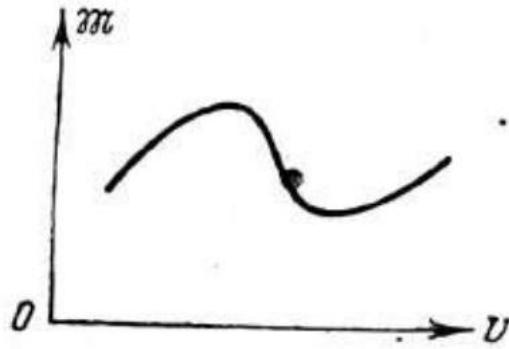


Fig. 14.

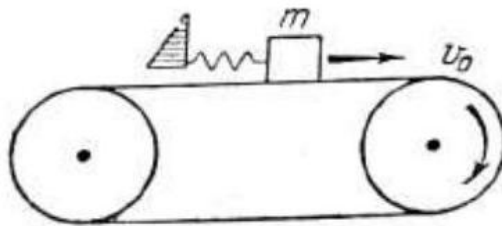


Fig. 15.

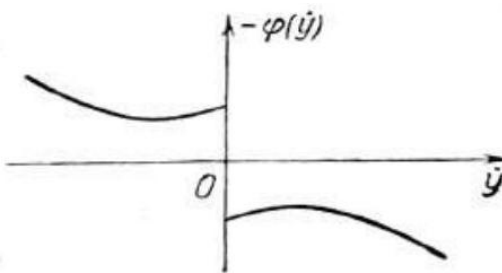


Fig. 16.

The characteristic curve for the frictional force between the sleeve and the shaft (61) has, generally speaking, a portion (Fig. 14) for which

$$F'(v) < 0.$$

We choose the velocity u such. that it becomes the abscissa of the point of inflection for this portion of the curve :

$$F''(u) = 0,$$

it being assumed that

$$F'(u) + \lambda < 0,$$

and

$$F'''(u) > 0.$$

For $\frac{d\theta}{dt}$, lying within certain limits, we can put

$$F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) = F(u) + F'(u)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6}F'''(u)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3. \quad (63)$$

Hence, considering the case of small oscillations and taking $\sin \theta = \theta$, we reduce equation (62) to one of Rayleigh or Van-der-Pol.

We give a further example of a mechanical oscillatory system.

We assume that a body of mass m is placed on the rough surface of a belt going tightly around two pulleys and moving with a constant velocity v_0 (Fig. 15). The body is fixed to a stationary point by means of a spring with linearly changing elasticity.

As we know, for certain values of v_0 the body will no longer remain at rest but rather will execute intermittent oscillations. This will be so because the force of friction between the body and the belt is not a constant quantity; rather it changes with the velocity of slipping, $\frac{dy}{dt}$, of the body relative to the belt (Fig. 16). Since the body is at rest relative to the belt $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$ the force of friction $\varphi\left(\frac{dy}{dt}\right)$ goes on

increasing, remaining at each instant, equal to the tension in the spring. When this force attains a certain value equal to the critical value of the force of friction the body begins to move relative to the belt, the force of friction decreasing when $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ increases and again increasing when $\left|dy\right|$ becomes sufficiently large.

We select the origin of coordinates at the point at which the spring stays in the undeformed state. In this case the velocity of slipping of the body may be written in the form :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - v_0$$

and the equation of motion would then be

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right) + kx = 0 \quad (64)$$

If the initial position of the body is taken to be that where it is in equilibrium under the simultaneous action of the elastic force and the frictional force, i.e. a position for which

$$\varphi(-v_0) + kx = 0 \quad (65)$$

then for the new coordinate z ,

$$z = x + \frac{1}{k}\varphi(-v_0),$$

the equation of motion takes the form

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + F\left(\frac{dz}{dt}\right) + kz = 0 \quad (66)$$

where

$$F\left(\frac{dz}{dt}\right) = \varphi\left(\frac{dz}{dt} - v_0\right) - \varphi(-v_0)$$

The oscillating systems examined above are sufficiently close to the linear ones. In the differential equations obeyed by them, the nonlinear terms (being small) may be looked upon as a slight perturbation proportional to some small parameter. Hence, in general, for such an oscillating system the differential equation may be conveniently written in the form

$$d^2x + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (67)$$

in which the right-hand-side contains small non-linear terms ($\varepsilon \ll 1$), characterizing non-linear friction, non-linear contributions to the restoring elastic force, non-linear terms ensuring the existence of self-oscillatory conditions, etc.

The introduction of a small parameter ε happens to be a very convenient device for the mathematical representation of the situation and proves that during an interval of time of the order of $\frac{2\pi}{\omega}$ (period of oscillation) the mode of oscillation is nearly sinusoidal.

When we speak of the general properties of such non-linear oscillations we should emphasize that, as distinguished from linear oscillations, the frequencies and the amplitudes in the case of the former ones may be variable. Even when we neglect the higher harmonics and approximately put

$$x = a \cos \theta \quad (68)$$

we can still, generally speaking, consider a and θ as variables.

In non-linear systems the amplitudes of oscillation may vary according to the influx or the loss of energy in the system. In weakly non-linear systems, naturally, such a change is small so that it actually occurs during a time T slightly greater than the time period of oscillation.

Examining the expression for the instantaneous power generated by the forces represented in the equation by small non-linear perturbation terms we find that such an expression, appearing as a periodic function of the phase angle θ , depends also on the amplitude a .

Now the phase angle rotates with a frequency ω , and the amplitude varies sufficiently slowly; hence when we take averages over an interval of time during which the amplitude gets no chance of deviating considerably from the initial value whereas the phase executes a sufficiently large number of rotations, the terms containing $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ are rendered very small because the expressions

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos n\theta dt &= \frac{1}{n\omega T} \sin n\theta_0^T \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sin n\theta dt &= -\frac{1}{n\omega T} \cos n\theta_0^T \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

contain T in the denominator. Thus the energy developed by the above mentioned forces during an interval of time T will depend only on the amplitude of the oscillation.

Therefore, it is obvious that the approximate equation expressing the variation of the amplitude can be written in the form

$$\frac{da}{dt} = F(a) \quad (70)$$

As we shall see later, a successive application of the asymptotic method does actually lead to an equation of this type.

This function $F(a)$ can expediently be represented by the form $\delta(a)a$, thus introducing the effective decrement $\delta(a)$ which emphasizes the analogy to linear systems for which δ is constant.

Thus, it is natural to put :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(a), \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

where $\omega(a)$ is the "effective frequency of the oscillation" and $\delta(a)$ the "effective attenuation" determined by the existence of a source or a sink of energy in the system.

In systems with friction

$$\delta(a) > 0 \text{ for all } a$$

while in self-oscillating systems

$$\delta(a) = 0$$

for some values of the amplitude of oscillation.

We shall now discuss another type of oscillating systems. This type is widely observed in nature but differs essentially from the above mentioned self-oscillating and approximately linear systems, in that the parameter ε is large. We shall examine, in particular, the case when $\varepsilon \rightarrow \infty$.

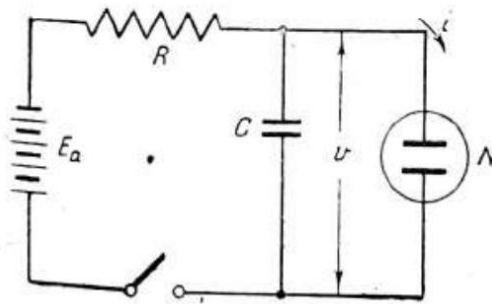


Fig. 17.

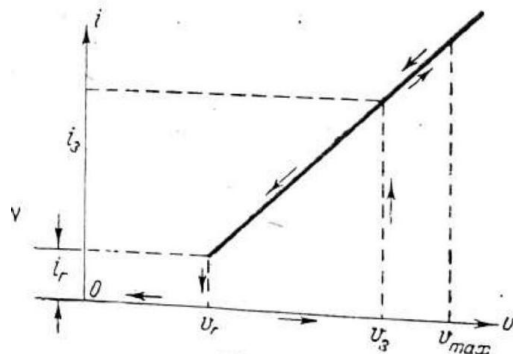


Fig. 18

Oscillations represented by equations of this type have received the name of relaxation oscillations. This name reflects the existence of two different and typical stages of the oscillating process in such a system: namely, a slow accumulation of energy by the system and a subsequent discharge of energy occurring almost instantaneously after a certain critical threshold potential for the aforesaid energy-accumulation is attained.

Oscillating systems of the relaxation type ($\approx$ sufficiently large), like the approximately linear ones examined above, may also be sufficiently understood with the help of our general methods of investigation.

As an example we shall examine relaxation oscillations taking place under certain conditions in a circuit with a neon tube set up as shown in Figure 17. Here the neon lamp N is connected to a source of constant voltage E_a through a resistance R and shunted with a capacitance C . While examining this scheme we shall neglect forces of inertia in the oscillating system ; this will finally lead us to equations not of the second but of the first order.

Non-linearity of the oscillating system represented in the scheme of Fig. 17 is a consequence of the neon tube for which the relation between the voltage v and the current i does not follow (the linear) Ohm's law.

Under ideal conditions the process of the variation of the current i with that of the voltage v proceeds as follows: When v changes from the null value towards the positive side the tube does not light up at

first and there is no current flowing through it. When a certain voltage v_3 named ignition voltage is attained the tube begins to glow, its resistance falls sharply and the current, by a sudden jump, attains the value i_3 . A further increase in v goes on increasing the current linearly. If now, after the voltage has attained a certain value $v_{\max} > v_3$, we decrease the voltage continuously, the current i will fall linearly until v approaches right upto the so-called quenching voltage v_r . At this moment the tube goes off and the current i is cut off. Under these ideal conditions, the relations discussed above are graphically represented by the performance curve, Fig. 18, consisting of certain straight line sections and a hysteresis loop.

Hence we can put $i = 0$ for the extinguished lamp and $i = i_r + \frac{v-v_T}{R_N}$ for the ignited lamp.

For formulating a differential equation we note that since the current through the condenser is $C \frac{dv}{dt}$, the current in the resistance R will be $C \frac{dv}{dt} + i$ and, hence, the potential difference across R is given by the equation

$$R \left(C \frac{dv}{dt} + i \right) = E_a - v$$

whence we get

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v - Ri}{CR}. \quad (72)$$

As soon as the circuit shown in Fig. 17 is closed the process of charging the condenser starts. Since at the first instant the voltage across the terminals of the tube is zero it will remain less than v_3 for a certain period of time. During this period the neon lamp does not glow and consequently, by (72), we have -

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v}{RC} \quad (73)$$

If $E_a > v_3$, then, according to equation (73), v attains the value v_3 after some time and the tube gets ignited. After this, when the value of R becomes sufficiently large, the process of discharging the condenser through the neon lamp starts. We have for this process :

$$\frac{dv}{dt} = E_a - v - R \left[i_r + \frac{v - v_r}{RC} \right]. \quad (74)$$

Let R be so large that

$$E_a - v - Ri_r < 0.$$

Here v decreases monotonically according to (74) upto the value $v = v_r$, at which the tube is extinguished and the process of charging the condenser starts once again. This is followed by the process of discharge through tube, and the whole process is repeated.

Thus, a periodic relaxation oscillation occurs in our scheme with v changing between v_r and v_3 .

The equation of oscillation may, evidently, be written in the form

$$\frac{dv}{dt} = \Phi(v), \quad (75)$$

where, according to (73) and (74), $\Phi(v)$ has two values in the interval $v_r \ll n \ll v_3$: namely

$$\left. \begin{aligned} \Phi(v) &= \frac{E_a - v}{RC} \quad (\text{for increasing } v) \\ \Phi(v) &= \frac{E_a - v - Ri_r - \frac{R}{R_N}(v - v_r)}{RC} \quad (\text{for increasing } v) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

3. In the examples of the oscillatory systems given above, the perturbing forces did not explicitly depend on time. Thus oscillating systems were isolated from the external influences whereby all forces acting upon the system depended only on the dynamical condition of the system itself.

We shall now give certain typical examples of non-linear oscillatory systems subjected to the action of external periodic forces and shall analyse, from the physical point of view, the specific phenomena that might appear in such systems.

We start by examining the simplest case of a non-linear vibrator, acted upon by a weak harmonic force $\varepsilon E \cos vt$.

The equation of motion in this case is written in the form

$$\begin{aligned} d^2x \\ dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \cos vt. \end{aligned} \quad (77)$$

In view of the smallness of the external force and the non-linear term, the oscillation during a single cycle will have a form close to the harmonic one :

$$\left. \begin{aligned} x &\approx a \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{dx}{dt} &\approx -a\omega \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

30 asymptotic methods in the theory of non-LINEAR OSCILLATIONS

Here, the amplitude and the phase will undergo an appreciable change only during a period of time comprising a large number of cycles.

We now examine the average rate of energy,

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon E \cos vt dt \quad (79)$$

imparted to the system by the external force during a time T in which it is not capable of changing the form of the oscillation considerably. Since the external force is taken to be small, this time T (during which the oscillation happens to remain approximately natural) may be considered to be sufficiently large as compared to the time period of the oscillation.

$$A = \frac{a(\omega \varepsilon E)}{2T} \left[\cos \begin{matrix} [(v + \omega)t + \psi] \\ v + \omega \end{matrix} \cos \begin{matrix} [(v - \omega)t - \psi] \\ v - \omega \end{matrix} \right]_{t_0}^{t_0+T} \quad (80)$$

For sufficiently large values of T this expression actually differs from zero only when the external frequency is sufficiently close to the natural frequency.

Thus, a small perturbing force, acting for a long time, may exert considerable influence on the given vibrator only when the resonance $v \approx \omega$. We shall call such a resonance 'main' resonance or the 'ordinary' resonance.

So far we have based our discussions on the purely harmonic form of natural oscillations. However, owing to the existence of a non-linear term in the natural oscillations, higher harmonics will continuously appear (even when an external impressed force is absent).

Putting for x in (79), an expression for the natural oscillation containing higher harmonics with frequencies $n\omega$ and repeating the arguments given above we arrive at the conclusion that when T is sufficiently large the average value of the power may actually differ from zero not only when $\omega \approx v$ but also when $n(\omega) \approx v = 2, 3$, and so on. These additional resonances which may only be observed in the next approximation, i.e. while analysing overtones that exist in the natural oscillations, will be called the resonances of the frequency division or the demultiplied resonances.

In higher approximations we can find more complex resonance of the fractional type : which arise because in the expression of $\frac{dx}{dt}$, for sufficiently higher approximations we take into consideration, not only the overtones of the natural frequency but also the combined tones with frequencies of the type $n\omega \pm rv$.

In the preceding case of a weakly non-linear oscillator with a small harmonic force applied to it, in the first approximation, we only found the main resonance $\omega \approx v$. However, in the case of certain weakly non-linear systems, even in the first approximation, resonances of other types, also appear, namely those of division by two.

Thus, for example, when we analyse an oscillating system. with its rigidity changing periodically with time, we obtain the well-known equation of Mathieu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 + h \cos vt)x = 0 \quad (81)$$

Assuming the coefficient of modulation of the frequency, $\omega^2 h$, to be small and the term

$$\omega^2 h \cos vt.x \quad (82)$$

to be the external excitation, we calculate the expression for the average power.

Here, even in the first approximation, we have :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega^2 h \cos vt \cos(\omega t + \psi) a \omega \sin(\omega t + \psi) dt = \\ &= \frac{\omega^3 h}{4T} \left[\frac{\cos[(v + 2\omega)t + 2\psi]}{v + 2\omega} - \frac{\cos[(v - 2\omega)t - 2\psi]}{v - 2\omega} \right]_0^{t_0+T} \end{aligned} \quad (83)$$

and hence the work done by the perturbing force (82), on being averaged during a long interval of time, does not now vanish if $v = 2\omega$, i.e. $\omega \approx \frac{v}{2}$.

Thus in an oscillating system described by equation (81) we can find the resonance of division by two even in the very first approximation.

We examine further the influence of an external harmonic excitation on autonomous oscillatory system. In this we consider the generalised Van-der-Pol equation of the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = E \sin vt. \quad (\$4)$$

32 asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations
supposing that y does not take up values close to unity, we effect a change of variables by the formula

$$x = y + U \sin vt, \quad (85)$$

when $U = \frac{E}{1-v^2}$.

Hence we get (86)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon [1 - (y + U \sin vt)^2] \left[\frac{dy}{dt} + Uv \cos vt \right].$$

We now analyse the resonances that may be found to appear in the first approximation for the given equation.

Calculating the average power generated by the small perturbing force,

$$\varepsilon [1 - (y + U \sin vt)^2] \left[\frac{dy}{dt} + Uv \cos vt \right] \quad (87)$$

under the conditions of a purely harmonic oscillation

$$\begin{aligned} y &= a \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{dy}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

it is not difficult to see that this power does not vanish if $2\omega \approx \nu$ and also if $2\nu \approx \omega$. The resonance $2\omega \approx \nu$ arises from that term of perturbing force (87), whose amplitude is proportional to U and the resonance $2\nu \approx \omega$ arises from that term whose amplitude is proportional to U^2 .

Thus, if the quantity E is small the resonance $2\omega \approx \nu$ may be found in the second approximation and the resonance $2\nu \approx \omega$ only in the third.

From this preliminary analysis it is clear that in the cases of resonance very small periodic perturbing force acting for sufficiently large intervals of time exert substantial influence on the course of the oscillatory processes.

This being so, the main role here will be played by the phaserelations instead of the perturbations of the type $\varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$ which are not explicitly dependent on time.

In fact, taking the typical formula (80) and putting in it, for the sake of simplicity, $\omega = \nu$, we get

$$A \approx \frac{-a\omega\varepsilon E}{2} \sin \psi \quad (88)$$

Thus when $\sin \psi < 0$, energy flows into the system and when $\sin \psi > 0$, energy flows out by the system. Even from this simple example we come to understand the importance of phase-relation in the case of resonance.

Hence, the approximate equations defining the course of oscillations, must contain, not only the amplitude but also the phase of the oscillation, so that instead of the single equation (70) we would have a system of two inter-connected equations of the type

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F(a, \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \Phi(a, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

The question of the actual working out of the right-hand-sides of these equations, conformable to the first and second approximations, has been discussed in Chapter III. It will contain a discussion of the asymptotic methods of calculation, justifying the preliminary arguments adduced here from a qualitative point of view and then developing these arguments further.

In the examples discussed above we were concerned with oscillatory systems described by the equations of the form :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (90)$$

where $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ is a periodic function with a period $2\pi/vt$.

In the case of non-linear vibrators we have :

$$sf\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) = sf\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \cos vt$$

while in the case of equation (81) (Mathieu equation), we have

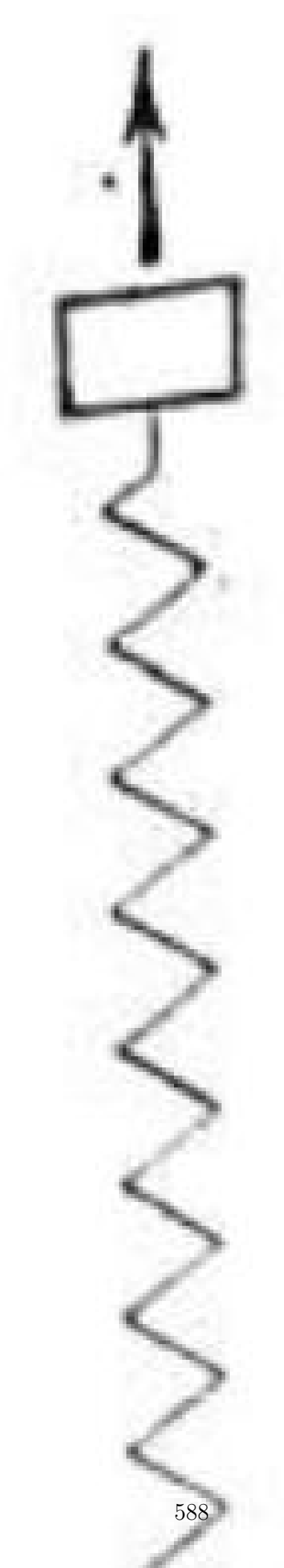
$$sf\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) = -\omega^2 h \cos vt.x.$$

We should note that the equation of motion of a large number of practically important oscillatory systems reduces to an equation of this form.

As an example of an oscillatory system described by equation (77) we may cite the oscillation of a load of unit mass hung from a spring with a non-linear characteristic of elasticity in the presence of friction and subjected to the action of a perturbing force $\varepsilon E \cos vt$ (Fig. 19).

34 asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations

The problem of torsional oscillations of a shaft comprising two



masses joined by a connection with non-linear elasticity, one of the

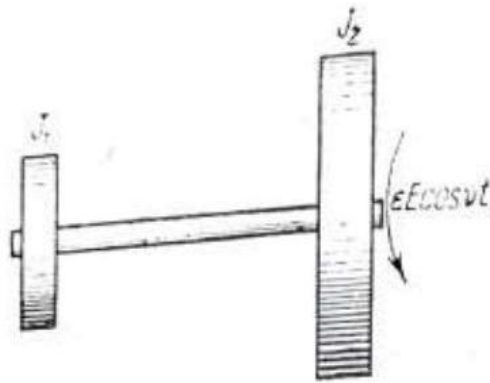


Fig. 20.

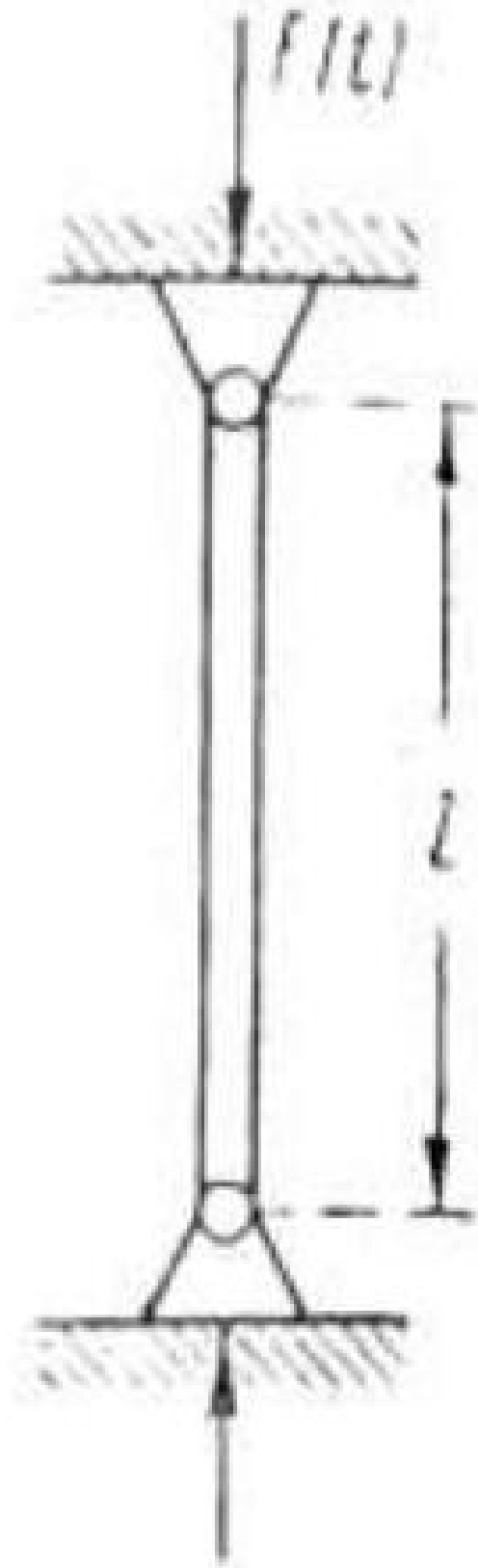


Fig. 21.

masses being acted upon by a sinusoidal torsional moment $F(t) = \Sigma E \cos vt$ (Fig. 20), results in an equation of motion of the form

$$J_1 J_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) + f \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \varepsilon E \cos vt, \quad (91)$$

which also belongs to the type (77). Here J_1 and J_2 are the moments of inertia of the two masses, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ is the torsion angle while the function $f \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$ of velocity, takes into account the effect of friction.

The problem of oscillations of a pendulum subjected to action of an external periodic force also results in an equation of the type (77), and so on.

The problem of transverse oscillations of a rod, fixed by hinges and subjected to the action of a longitudinal pulsating force

$$F(t) = \varepsilon E_1 \cos \nu t$$

results in a Mathieu type equation. In this case we obtain

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2 \varepsilon E_1}{E J \pi} \cos \nu t \right] x = 0, \quad (92)$$

where EJ stands for the rigidity of the rod, and l for its length (Fig. 21).

An equation of a type more generalised than that of Mathieu is obtained while examining a non-linear vibrator in which some of the parameters, for instance, the natural frequency of the corresponding linear system, change periodically.

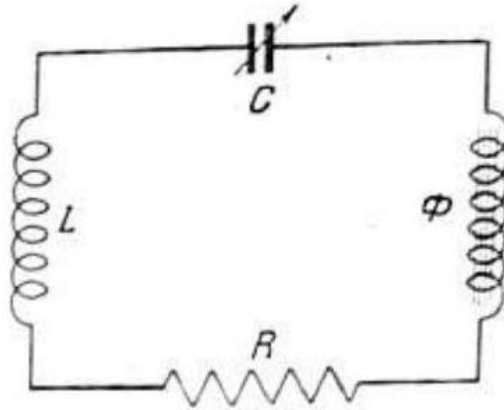


Fig. 22.

In this case we have an equation of the form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 + h \sin vt) x = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (93)$$

As an example we discuss oscillations in a circuit consisting of an ordinary self-inductance L , a coil with the performance curve (i.e. the magnetic flux-current characteristic) of the form

$$\Phi = \Phi(i),$$

a small (Ohmic) resistance R and a variable capacitance

$$C = C_0(1 + \rho \sin vt) \text{ (Fig. 22).}$$

In this case the full flux of the magnetic induction in the circuit will be

$$Li + \Phi(i),$$

and, hence, we would have the following equation :

$$\frac{d[Li + \Phi(i)]}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0 \quad (94)$$

Introducing

$$q = \int_0^t i dt,$$

as the unknown charge on the capacitor plates, we obtain

$$\left\{ L + \Phi' \left(\frac{dq}{dt} \right) \right\} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + C_0 (1 + c_0^q \sin vt) = 0. \quad (95)$$

Assuming that the self-inductance L is sufficiently large as compared with the non-linear self-inductance of the coil,

$$L \gg \Phi'(i),$$

and, moreover, that the coefficient ρ characterising the "depth of change" of capacitance is sufficiently small, we can reduce equation (95), to the second order of accuracy, in the form

$$d^2 q / dt^2 + \omega^2 (1 - \rho \sin vt) q = -\frac{R}{L} \left(1 - \frac{\omega' \left(\frac{dq}{dt} \right)}{L} \right) \frac{dq}{dt} + \omega^2 \omega \left(\frac{dq}{dt} \right)_L q, \quad (96)$$

where $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

36 asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations

We shall now examine the regenerative receiver schematically shown in Fig. 23 as an example of an autonomous oscillating system under, the action of an external sinusoidal excitation.

In this case we obtain the equation

$$LC \frac{di}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_u \quad (97)$$

$$i_d = f(V_s) \quad (98)$$

being the performance curve of the tube.

Since

$$V_x = M_9 \frac{di}{dt} + E_0 \sin vt, \quad (99)$$

where $M_r = M - DL$, we can reduce equation (97), by the substitution

$$i_1 = i - \frac{E_0}{M_r v} \cos vt \quad (100)$$

to the form

$$CL \frac{d^2 i_1}{dt^2} + RC \frac{di_1}{dt} + i_1 = f \left(M_r \frac{di_1}{dt} \right) + E_1 \cos(\nu t + \varphi), \quad (101)$$

where

$$E_1 = \frac{E_0 C \sqrt{(LCv^2 - 1)^2 + R^2 C^2 v^2}}{M_{r^2}}.$$

Equation (101) belongs to the type (93) and with the help of the substitution

$$i_1 = I + \frac{E_1}{\omega^2 - v^3} \cos(vt + \varphi), \quad (102)$$

where $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, reduces to the form (86).

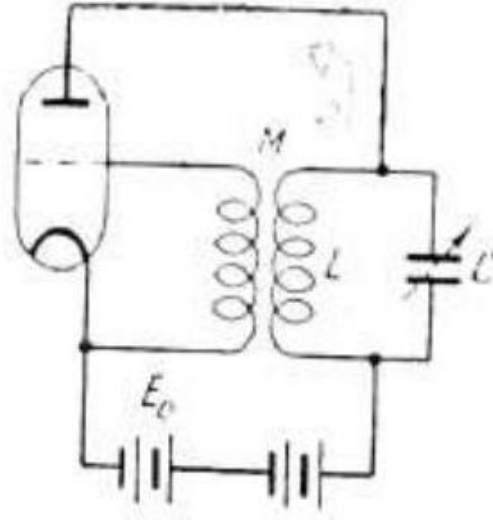


Fig. 23.

We shall now examine certain other examples which lead to equations more complex than those of the type (67) or (90).

As the first example we shall investigate the problem of oscillation of a pendulum with a variable length.

Let m denote the mass of the pendulum, g the acceleration due to gravity, θ the angle of deviation from the vertical position and

$l = l(t)$ the time-dependent length of the pendulum. Neglecting the force of friction we get

$$\frac{d}{dt} \left[ml^2(t) \frac{d\theta}{dt} \right] + gl(t) \sin \theta = 0. \quad (103)$$

We shall investigate also the working of the reflex Klystron under the conditions of super regenerative amplification. Let $G_E = GR + G_H$ denote the total active conductance, GR being the conductance characterizing the loss in the resonator. G_H being the conductance characterizing the load. Also let G_e be the active part of the n -type conductivity (electron conductivity), $E(t)$ the *e.m.f.* of the signal and $\mathcal{E}(t)$ the variable voltage of superisation.

In this case, the equation characterizing the operation of the Klystron will have the form

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho (G_E - G_e) - \frac{du}{dt} + u = E(t) \sin(1 + \mathcal{E}(t)) \omega_0 t, \quad (104)$$

where $\rho = \omega_0 L$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

If the coefficients in equations (103) and (104) appear as variables that change slowly and if we

express them in future as functions not of t but τ where $\tau = \Sigma t, \varepsilon$ being a small parameter, these equations would reduce to the form

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) = \varepsilon f \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (105)$$

or

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau)x = s f \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (106)$$

where $\tau = st, \frac{d\theta}{dt} = v(-)$.

Many problems of physics and engineering, for instance, that of passage through resonance or that of transient process oscillating circuits or that of frequency modulation or several others in the theory of accelerators, etc. can be reduced to equations of the type (105) or (106).

Uptil now we have been investigating the action of the external periodic forces upon oscillating systems close to the linear ones, We can however, investigate also the problem of the effect of small periodic perturbing forces on relaxation oscillation systems, represented, for example, by

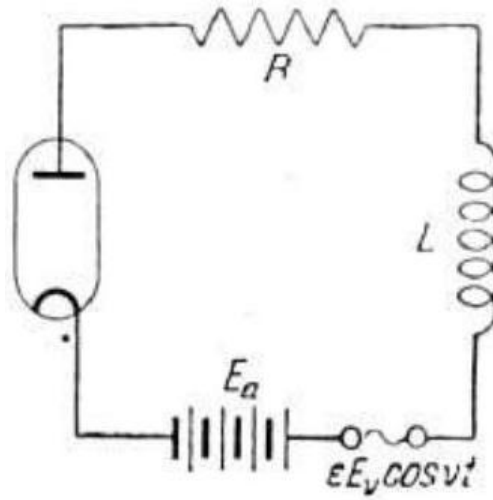


Fig. 24.

an equation of the type

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos vt, \quad (107)$$

where, as in the case of equation (75) for the free relaxation oscillations, $\Phi(x)$ is a double-valued function defined in the interval (a, b) .

In particular, we would obtain equation (107) if we connect in series a variable harmonic voltage $\varepsilon E \cos vt$ with the constant voltage E_a in the oscillation scheme of relaxation oscillations mentioned above. Thus, for the scheme shown in Fig. 24, we evidently have,

$$\frac{di}{dt} = \Phi(i) + \frac{\varepsilon E_v \cos vt}{L} \quad (108)$$

In view of the fact that in free relaxation oscillations overtones play an important part right upto very high orders, we find by an analysis of the equation

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon E_v \cos vt \frac{dx}{dt} dt$$

that the system does show resonances of the type of frequency division,

$$\nu = \frac{\omega}{n},$$

where n may be a sufficiently large number. Hence it is most convenient to study in the relaxation systems, the resonances of the division of frequency (by a large number).

10.2 1 Natural Oscillations in Systems Close to Linear Ones

10.2.1 1. Development of Asymptotic Solutions.

We now go over to the discussion of a method for developing in the first instance, asymptotic approximations, for the case of oscillations defined by a differential equation of the form :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = sf \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.1)$$

where ε is a small positive parameter. We can arrive at the correct formulation of this method if we start from the physical concepts defining the character of the oscillatory process.

When perturbation is absent i.e. when $\varepsilon = 0$, the oscillations will, evidently be purely harmonic,

$$x = a \cos \psi$$

with a constant amplitude and a uniformly rotating phase angle :

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (\psi = \omega t + \theta)$$

(the amplitude a and the phase θ of the oscillations will be constants over time, depending on the initial conditions).

The existence of non-linear perturbation ($\varepsilon \neq 0$) results in the appearance of overtones in the solution of equation (1.1), a factor that establishes dependence between the instantaneous frequency $\frac{d\psi}{dt}$ and the amplitude, and finally gives rise to a systematic increase or decrease in the amplitude of the oscillations, depending upon whether the energy is expelled or absorbed by the perturbing forces.

All these effects are obviously absent in the limiting case ($\varepsilon = 0$).

With all this in view we shall seek a general solution of equation (1.1) in the form*,

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \varepsilon^3 u_3(a, \psi) + \dots \quad (1.2)$$

Here $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots$ are periodic functions of the angle ψ with a period 2π and the quantities a, ψ are functions of time defined by the differential equations :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon B_1 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon B_1 A_2(a) + \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

We are to choose suitable expressions for the functions $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi), \dots, A_1(a), B_1(a), A_2(a), B_2(a), \dots$ in such a way that the equation (1.2), after replacing a and ψ , by the functions defined in equations (1.3), would serve as a solution of equation (1.1).

As soon as this problem is solved and explicit expressions for the coefficients of expansions occurring in the right-hand-sides of equations (1.2) and (1.3) are obtained, the problem of integrating equation (1.1) is reduced to that of integrating equations (1.3) which have separable variables, thus making the investigation possible with the help of well known elementary methods.

As we shall see later, the determination of the coefficients of expansions does not present any theoretical difficulties. However, because of the rapidly growing complexity of the formulae, only first two or three terms may be effectively derived in practice. Confining ourselves to these terms in our expansions, viz.,

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi) \quad (1.4)$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m n_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

we can obtain approximations of the first order, second order, etc., in general, of a low order. Hence the practical applicability of the method is not determined by the convergence of the series (1.4) and

(1.5) when $m \rightarrow \infty$, but by their asymptotic properties for a given fixed value of m when $\varepsilon \rightarrow 0$.

It is only required that when ε is small expression (1.4) should give a sufficiently accurate form of the solution of equation (1.1) for a sufficiently long interval of time. Hence we would not study the question of convergence when $m \rightarrow \infty$ and shall treat expansions (1.2) and (1.3) as formal expansions necessary for working out asymptotic approximations (1.4).

In other words, we posit the question more carefully formulating it as a problem of deducing function such as

$$u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots, \quad (1.6)$$

so that expression (1.4), in which the time functions a and ψ are defined by "equations of m -th approximation", satisfies equation (1.1) with an accuracy of the order ε^{m+1} .

We note that in the case represented by equation (1.1) we might establish the convergence of expansions (1.2), (1.3) under very general conditions for the function $f(x, \frac{dx}{dt})$.

However, since in future we will have to deal with cases in which similar expansions apparently diverge, we will not tie up the development of our method of the construction of asymptotic approximations with any proof of convergence. Hence, without any further stipulations, we will always attach the formal meanings mentioned above to the expansions in powers of a small parameter.

Further, we shall discuss in a few words the estimation of errors. From the fact that the above mentioned approximate solution would satisfy equation (1.1) with an error of the order ε^{m+1} ,

^{0*)} Such a formulation of the method of expansion in terms of a small parameter was for the first time given in 'Introduction to Non-linear mechanics', by N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov [22].

we find with the help of the usual majoration method that the deviation of the approximate solution from the corresponding accurate one, (initial conditions being the same) will be limited to a magnitude of the order $\varepsilon^{m+1}t$. Thus this deviation will remain small however large the value of εt may be, if only ε happens to be sufficiently small. Here we have basic differences from the approximate formulae (6) examined in the Introduction which are applicable only when the value of εt is small, i.e. only in such a small interval of time that the amplitude of oscillations has no chance to exceed considerably from its initial value.

We note that the question of providing a strict foundation for the asymptotic methods is purely a mathematical one and is important for the theory of differential equations with a small parameter. Hence, we have considered it expedient to leave its discussion to Chapter VI, which would serve as a mathematical supplement to the basic text of the book. At present we shall concentrate on the question of actual construction of the approximate solutions and their application to concrete examples. We shall also illustrate the efficiency of the method and the accuracy of the various formulae. Before going over to the problem of the construction of approximate solutions, we point out that the question of defining expressions (1.6) has certain amount of arbitrariness in it.

Let us assume that certain expressions have been derived for these functions. Then taking arbitrary functions

$$\alpha_1(a), \alpha_2(a), \dots, \beta_1(a), \beta_2(a) \dots,$$

and effecting a change of variables in (1.2) and (1.3)

$$\begin{aligned} a &= b + \varepsilon \alpha_1(b) + \varepsilon^2 \alpha_2(b) + \dots, \\ \varphi &= ? + \varepsilon \beta_1(b) + \varepsilon^2 \beta_2(b) + \dots, \end{aligned}$$

we get

$$\left. \begin{aligned} x &= b \cos \varphi + \varepsilon [x_1(b) \cos \varphi - b \beta_1(b) \sin \varphi + u_1(b, \varphi)] + \varepsilon^2 \dots \\ db &= \varepsilon A_1(b) + \varepsilon^2 \left[\frac{dA_1(b)}{db} \alpha_1(b) - \frac{d\alpha_1(b)}{db} A_1(b) + A_2(b) \right] + \varepsilon^3 \dots, \\ d\varphi &= \omega + \varepsilon B_1(b) + \varepsilon^2 \left[dB_1(b) \beta_1(b) - \frac{d\beta_1(b)}{db} A_1(b) + B_2(b) \right] + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

We see from (1.7) that we have again arrived at formulae of the type (1.2) and (1.3), with altered expressions of the coefficients (1.6). Hence for the uniqueness of the definition of these coefficients we have to impose additional restrictions on them and, generally speaking, this can be done arbitrarily to a certain extent. As such an additional restriction we require is that the first harmonics are wanting in the expressions $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$ etc. In other words we shall define these periodic functions of the phase angle in such a way that equations

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \cos \psi d\psi &= 0, \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \dots \\ \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \sin \psi d\psi &= 0, \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

arc satisfied.

From a physical point of view, the imposition of these conditions is equivalent to selecting a as the full amplitude of the first fundamental harmonic of the oscillation.

Now, in the light of these preliminary considerations, we derive suitable expressions for (1.6), satisfying the additional conditions (1.8).

Differentiating the right-hand-side of equation (1.2) we get

$$\begin{aligned}
x &= a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} + \\
&+ \frac{d\psi}{dt} \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\}, \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2} \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} + \\
&+ \frac{d^2\psi}{dt^2} \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} + \\
&+ \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} + \\
&+ 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right\} + \\
&+ \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right\}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

With the help of equations (1.3), we can derive the following results

$$\begin{aligned}
d^2a &= (z^{dd}A_1 + \varepsilon^2 dA_2 + \dots) (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) = \varepsilon^2 A_1^d A_1 + \varepsilon^3 \dots, \\
d^2\psi &= (\varepsilon^2 dB_1 + \varepsilon^2 dB_2 + \dots) (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) = \varepsilon^2 A_1 \frac{dB_1}{da} + \varepsilon^3 \dots, \\
\left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^2 = \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \\
\frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots) = \\
&= \varepsilon A_1 \omega + \varepsilon^2 (A_2 \omega + A_1 B_1) + \varepsilon^3 \dots, \\
\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 &= (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots)^2 = \\
&= \omega^2 + \varepsilon 2\omega B_1 + \varepsilon^2 (B_1^2 + 2\omega B_2) + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Putting (1.3), (1.10) into (1.9) and arranging in powers of ε ,

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -a (\omega \sin \psi + \varepsilon \{ A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega + \omega u_1 \} + \\
&+ \varepsilon^2 \{ A_2 \cos \psi - a B_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \} + \varepsilon^3 \dots \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -a \omega^2 \cos \psi + \varepsilon \\
&- 2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega (a B_1 \cos \psi + \omega^2 \partial^2 u_1 \\
&+ \varepsilon^2 \{ (A_1 dA_1 - a B_1^2 - 2\omega a B_2) \cos \psi - \\
&- (2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a) \sin \psi + \\
&+ 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \partial^2 u_2 \\
&\partial \psi^2
\end{aligned} \right\} + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned}$$

Hence it follows that the left-hand-side of · equation (1.1) may be

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \left\{ -2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_1 \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 - 2\omega a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ \left. - \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1' \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \right. \\ \left. + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Also the right-hand-side of equation (1.1) (with the help of equations (1.2) and (1.11)) may be written in the form

$$\begin{aligned} \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \varepsilon^2 \{ u_1 f_2'(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f_{x'}'(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \} + \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

In order that the foregoing expression (1.2) may satisfy the original equation with an accuracy of the order ε^{m+1} , it is necessary to equate coefficients of equal powers of ε in the right-hand-sides of (1.12) and (1.13) upto terms of the m -th order (inclusive).

Thus, we get the following equations :

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2 + u_1} \right) &= f_0(a, \psi) + 2\omega A_1 \sin \psi + 2\omega a B_1 \cos \psi \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2 + u_2} \right) &= f_1(a, \psi) + 2\omega A_2 \sin \psi + 2\omega a B_2 \cos \psi \\ &\dots\dots\dots \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2 + u_m} \right) &= f_{m-1}(a, \psi) + 2\omega A_m \sin \psi + 2\omega a B_m \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

where for brevity the following symbols have been used :

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\ f_1(a, \psi) &= u_1 f_x'(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ + \left[A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right] f_{x'}'(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ + \left(a B_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \left(2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi - \\ - 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

It is not difficult to see that $f_k(a, \psi)$ is a periodic function of the variable ψ with a period 2π and is dependent on a . Its explicit expression is known as soon as the expressions $A_i(a), B_j(a), u_j(a, \psi)$ are derived up to the k -th representative.

To determine $A_1(a), B_1(a)$ and $u_1(a, \psi)$ from the first equation of the system (1.14) we examine the Fourier series for the functions $f_0(a, \psi)$ and $u_1(a, \psi)$:

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi \} \\ u_1(a, \psi) &= v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ v_n(a) \cos n\psi + \omega_n(a) \sin n\psi \} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Putting the right-hand expressions of (1.16) into equation we obtain

$$\begin{aligned} \omega^2 v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2 (1 - n^2) \{ v_n(a) \cos n\psi + \omega_n(a) \sin n\psi \} = \\ = g_0(a) + \{ g_1(a) + 2\omega a B_1 \} \cos \psi + \{ h_1(a) + 2\omega A_1 \} \sin \psi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi \} \end{aligned}$$

From this expression, by equating coefficients of identical harmonics, we get

Thus, we have uniquely determined $A_1(a)$ and $B_1(a)$, as well as all the harmonic components of the function $u_1(a, \psi)$ except the first $v_1(a)$

$$\left. \begin{aligned} g_1(a) + 2\omega a B_1 &= 0, & h_1(a) + 2\omega A_1 &= 0 \\ v_0(a) = \frac{g_n(a)}{\omega^2}, v_n(a) &= \frac{\omega_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, & w_n(a) &= \omega^2(1-n^2) \\ & (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

and $w_1(a)$. However, by virtue of the additional conditions (1.8), this function does not contain the first harmonic ; hence

$$v_1(a) = 0, \quad w_1(a) = 0$$

and so

$$u_1(a, \psi) = g_0(a) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi. \quad (1.18)$$

By completely determining $u_1(a, \psi)$, $A_1(a)$ and $B_1(a)$ we have, in accordance with equations (1.15), an explicit expression for $f_1(a, \psi)$. Expanding it in a Fourier series, we get

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi\}$$

Using the second of the equations (1.14), and the condition (1.18), we get in an exactly similar manner

$$g_1^{(1)}(a) + 2\omega a B_2 = 0, \quad h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 = 0 \quad (1.19)$$

and

$$u_2(a, \psi) = \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi}{1-n^2}$$

Thus, we have a process for determining, successively and uniquely, the quantities (1.6).

The method described above permits us to determine

$$u_n(a, \psi), A_n(a), B_n(a) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

upto any value of n , however large it may be and thus helps in constructing approximate solutions satisfying the given equation (1.1) correct upto any order in ε .

As we find from the process of determining the functions (1.6), $A_n(a)$, $B_n(a)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) are uniquely determined by the conditions (1.8) which express the absence of the first harmonic in the functions $u_n(a, \psi)$. As a result, we obtain for $A_n(a)$ and $B_n(a)$, expressions of the form (1.17) and (1.19) that ensure the absence of the terms with first harmonics on the right-hand-sides of equations (1.14); this in its turn enables us to avoid the appearance of the secular terms in the solution.

Now we examine the first approximation

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) \quad (1.20)$$

in which

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

We note that, by virtue of equations (1.21), one can write

$$\begin{aligned} \Delta a &= a(t) - a(0) \sim \varepsilon t \tilde{A}_1 \\ \Delta(\zeta - \omega t) &= [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \sim \varepsilon t \tilde{B}_1 \end{aligned}$$

where $\tilde{A}_1$ and $\tilde{B}_1$ are average values of $A_1(a)$ and $B_1(a)$ in the interval $(0, t)$. Analyzing the last expressions we see that the time t , during which the quantities a and $\psi - \omega t$ may increase, by significant amounts, must be of the order $\frac{1}{\varepsilon}$.

On the other hand, we obtain the equations of the first approximation (1.21) by neglecting terms of the order ε^2 in the equations (1.3) and this error in the values of the first derivatives $\frac{da}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ during time t leads to an error of the order $\varepsilon^2 t$ in the values of the functions a and ψ .

Hence we see that for the interval of time during which $a, \psi - \omega t$ get a chance to go beyond their initial values, the errors in the values of the amplitude and the phase of the oscillations will be of the order ε and hence for this interval of time it would be meaningless to retain the term $\varepsilon u_1(a, \psi)$ in the expression (1.20). Thus the error in the formula (1.20) as well as the error in the simplified formula $x = a \cos \psi$ will be of the first order.

We again examine the case of stationary oscillations i.e. the oscillations occurring with constant amplitude and frequency. In this case we obviously have

$$\frac{da}{dt} = 0$$

or

$$\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots = 0 \quad (1.22)$$

From the appearance of the multiplier ε in the term $A_1(a)$ we see that if we leave out from expression (1.22), quantities of the second and higher order and determine the value of the stationary amplitude of the first harmonic from the equation of the first approximation, viz.,

$$A_1(a) = 0,$$

then, generally speaking, we would be making an error not of the second but of the first order.

Taking this into account, it would be quite natural to take, in future the simplified expression

$$x = a \cos \psi \quad (1.23)$$

as a first approximation, the quantities a and ψ in this equation being defined by the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Arguing exactly in the same manner, we take the expression

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) \quad (1.25)$$

as the second approximation in which the time functions a and ψ are determined by the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Now we introduce explicit formulae for $A_1(a)$, $A_2(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$ and $u_1(a, \psi)$. From (1.15), (1.16) and (1.17) we have

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Further, it follows from equations (1.18) that

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n'\psi + h_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}, \quad (1.28)$$

where $g_n(a)$ and $h_n(a)$ are obtained from the formulae

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos n'\psi d' \\ h_n(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Finally, by virtue of (1.15) and (1.19), we can write

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} [u_1(a, \psi) f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &\quad + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) \dot{x} \\ &\quad \times f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)] \sin \psi d\psi \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ B_1^2 - \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} [u_1(a, \psi) f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &\quad + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) \times \\ &\quad \times f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)] \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

We note that the equations of the second approximation (1.26), in which $A_3(a)$ and $B_2(a)$ are determined by expressions (1.30), are complicated because they have been written down for the most general case. For certain particular cases of the oscillating systems these equations may be much simplified.

We illustrate this point in what follows.

For this purpose we discuss the first approximation in a greater detail. The first approximation to the solution of equation (1.1) according to formulae (1.23), (1.24) and (1.27), may be represented in the form

$$x = a \cos \psi, \quad (1.31)$$

where a and ψ are determined by the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a). \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) = \omega_1(a), \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

with

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (1.33)$$

$$\omega_1(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (1.34)$$

We remark that the equations of the first approximation obtained by us coincide with those derived by the method of Van-der-Pol.

Now we derive yet another formula for determining the instantaneous natural frequency $\omega_1(a)$. Squaring the right-hand-side of the expression (1.34), we get

$$\begin{aligned} \omega_1^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi + \\ + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 a^2 \omega^2} \left[\int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \right]^2, \end{aligned}$$

Since all calculations are being carried out upto the first approximation, we have, by having terms of the second order in ε ,

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} [\omega^2 a \cos \psi - \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)] \cos \psi d\psi. \quad (1.35)$$

The expression (1.35) may be simplified by introducing the function

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega^2 x - \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

which combines the 'quasi-elastic' term with the non-linear one. In this case, obviously,

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (1.36)$$

Similarly, since

$$\int_0^{2\pi} \omega^2 a \cos \psi \sin \psi d\psi = 0$$

we also have,

$$= A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (1.37)$$

In the formulae (1.36) and (1.37) the functions $\varepsilon A_1(a)$ and $\omega_1(a)$ are represented directly by the function $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. This makes them differ from formulae (1.33) and (1.34) in which only the non-linear correction terms appear. The quantity ω entering into the last two formulae may evidently be interpreted as an approximate value (zero approximation) of the frequency of oscillations of the system under investigation.

We now state another method for arriving at equations of the first approximation. First of all, we remember that when $\varepsilon = 0$ equation (1.1) has the solution :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \psi, \\ \frac{dx}{dt} &= -a(1) \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

where $\psi = \omega t + 0$, the amplitude a and the phase of oscillation 0 appearing as constants. However, it is not difficult to show that formulae (1.38) may also be retained in

the case $\varepsilon \neq 0$, under the condition that the quantities a and θ are regarded not as constants but as certain function of time.

We will now consider (1.38) as representing a change of variables a and θ - amplitude and the phase of oscillation - taken as new unknown functions of time. By determining these functions from equation (1.38), we can find the expression for the originally unknown x . In order to construct the differential equations a and θ , we differentiate both sides of the formula (1.38) and get

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \psi - a\omega \sin \psi. \quad (1.39)$$

Remembering the second relation of (1.38), we get from above

$$\frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \psi = 0 \quad (1.40)$$

Further differentiating both sides of the second formula (1.38), we obtain.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \omega \sin \psi - a\omega \frac{d\theta}{dt} \cos \psi - a\omega^2 \cos \psi. \quad (1.41)$$

Now putting into equation (1.1) the values of x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ as given by formulae (1.38) and (1.41), we get

$$-\omega \frac{da}{dt} \sin \psi - a\omega \frac{d\theta}{dt} \cos \psi = \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi). \quad (1.42)$$

Solving the system of two equations (1.40) and (1.42) for the unknown quantities $\frac{da}{dt}$ and $\frac{d\theta}{dt}$, we obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Thus, instead of one differential equation (1.1) of the second order in x , we have two equations (1.43) of the first order in the variables a and θ .

We note that the right-hand-sides of equations (1.43) have a period $\frac{2\pi}{\omega}$, in the independent variable t . Moreover, $\frac{da}{dt}$ and $\frac{d\theta}{dt}$ are proportional to the small parameter ε . Thus a and θ are slowly varying functions of time.

Differential equations, when reduced to this form, will be called equations of the standard form.

It is easy to see that the right-hand-sides of equations (1.43) may be represented in the form of sums, such as

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi = \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(1)}(a) \cos \nu \psi + f_{\nu 2}^{(1)}(a) \sin \nu \psi \right], \\ &-\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi = \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(2)}(a) \cos \nu \psi + f_{\nu 2}^{(2)}(a) \sin \nu \psi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

According to the form of the approximate solution stated, above system of equations may be determined from the following considerations. As a and θ are changing slowly in their magnitude, we represent them as a superposition of the uniformly varying $\bar{a}$ and $\bar{\theta}$ and the sums of small oscillating terms. In the first approximation we put,

$$a = \bar{a}, \quad \theta = \bar{\theta} \quad (\bar{\psi} = \omega t + \bar{\theta}) \quad (1.45)$$

Hence

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \left\{ f(\bar{a} \cos \bar{\psi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\psi}) \sin \bar{\psi} = \right. \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(1)}(a) \cos \nu \bar{\psi} + f_{\nu 2}^{(1)}(a) \sin \nu \bar{\psi} \right] \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} \left\{ f(\bar{a} \cos \bar{\psi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\psi}) \cos \bar{\psi} = \right. \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(2)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\psi} + f_{\nu 2}^{(2)}(a) \sin \nu \bar{\psi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) + \text{small sinusoidal oscillating terms} \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) + \text{small sinusoidal oscillating terms.} \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Considering that these sinusoidal oscillating terms give rise to small oscillations of a and θ around their first approximations $\bar{a}$ and $\bar{\theta}$ and do not influence systematic changes of a and θ , we arrive at the equations of the first approximation in the form :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) = M \left\{ -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \bar{\psi}, -a\omega \sin \bar{\psi}) \sin \bar{\psi} \right\} \\ d\bar{\theta} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) = M \left\{ -\frac{\varepsilon}{a} f(a \cos \bar{\psi}, -a\omega \sin \bar{\psi}) \cos \bar{\psi} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

where M is the operator representing the process of averaging over the explicit time, with a and $\bar{\theta}$ as constants.

It is easy to see that the equations (1.48) for $\bar{a}$ and $\bar{\theta}$ obtained here coincide with those arrived earlier with the help of the equation of the first approximation.

Indeed, averaging and introducing, in place of θ , the full phase of oscillations ψ , we get

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - 2\pi \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned}$$

In order to obtain the second approximation it is necessary to take into consideration the oscillating terms also in the expressions for a and θ . Considering the terms $\varepsilon f_{\nu 1}^{(i)}(\bar{a}) \cos \nu \psi$, $\varepsilon f_{\nu 2}^{(i)}(\bar{a}) \sin \nu \psi$ ($i = 1, 2$), occurring in (1.47) as terms that give rise to oscillations of the form

$$\varepsilon \sin \nu \psi f_{\nu 1}^{(i)}(a), \frac{\varepsilon \cos \nu \bar{\psi}}{\nu} f_{\nu 2}^{(i)}(a) \quad (i = 1, 2),$$

in a and θ , we arrive at the following approximate expressions

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(1)}(a) \sin \nu \bar{\psi} - f_{\nu 2}^{(1)}(a) \cos \nu \bar{\psi} \right] \\ 0 &= \bar{\theta} + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\nu} \left[f_{\nu 1}^{(2)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\psi} - f_{\nu 2}^{(2)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\psi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

This corresponds to an improved first approximation. Putting the values (1.49) into the right-hand-side of (1.38), we get expression (1.25) which is accurate upto the first order (inclusive).

For obtaining equations of the second approximation which determine a and θ accurate upto the first order (inclusive), it is necessary to put the values of (1.49) into the right-hand-side of equations (1.48) and then average the result over the explicit time.

We may provide a more rigorous basis to the arguments given above. For this purpose it is necessary to look upon (1.45), (1.49) etc., as representing a change of variables in the original system of the differential equations reduced to the standard form. However, we shall deal with

this question in detail at the end of the book. We only note, here, that the method discussed above, for averaging the differential equations reduced to the standard form, facilitates the application of the methods of linear mechanics to the construction of approximate solutions of non-linear differential equations.

In this section we have explained the method of constructing the approximate solutions for equations of the type (1.1). We also discuss its application to an equation of the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right) \quad (1.50)$$

where

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right) = \varepsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon^2 f_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \dots$$

does not present any difficulty.

Hence, the right-hand-side of the equation has a more complicated dependence on ε . There being no essential peculiarities in the last equation we would not discuss it in detail but would go over to a detailed examination of its different special cases that are frequently met with.

10.2.2 2. Conservative Systems Close to Linear Ones

As a special case of equation (1.1) we shall discuss the free pseudoharmonic undamped oscillations of a mass m , i.e. oscillations given by the equation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + p(x) = 0 \quad (2.1)$$

in which the relation

$$F_s = p(x)$$

between elastic force and displacement is a non-linear one.

We assume that this non-linearity is sufficiently 'weak', so that we can put

$$p(x) = kx + \varepsilon \Phi(x). \quad (2.2)$$

In this case equation (2.1) will belong to a type already discussed, with

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\Phi(x)}{m}, \quad (2.3)$$

ε being a small positive parameter.

In order to arrive at the first approximation we examine the Fourier series expansion for the function $\Phi(a \cos \psi)$. Since it is an even function, the sine-terms will be absent in its Fourier expansion

$$\Phi(a \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a) \cos n\psi. \quad (2.4)$$

Using (1.16) and (2.3) we get from this

$$g_n(a) = -\frac{C_n(a)}{m}, h_n(a) = 0,$$

and hence

$$A_1(a) = 0, B_1(a) = \frac{1}{2\omega ma} C_1(a). \quad (2.5)$$

Thus, taking (1.23) and (1.24) into account, we have in the first approximation

$$x_1 = a \cos \psi,$$

where a and ψ are defined by equations

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega ma} = \omega_1(a) \quad (2.6)$$

(the subscripts for x and $\omega(a)$ indicate the order of approximation).

It follows from the first equation of the system (2.6) that the amplitude of oscillation does not depend on time and retains its initial value

$$a = a_0 = \text{const.}$$

Because of this, we get from the second equation of (2.6)

$$\psi = \omega_1(a)t + \theta,$$

where θ is the phase constant equal to the initial value of the phase

Thus, in the case under discussion, oscillations in the first approximation will be harmonic. The non-linear character of equation (2.1) in the first approximation evidently has the consequence that the frequency of oscillation $\omega_1(a)$ depends on amplitude only. In other words, owing to the presence of the term $\varepsilon\Phi(x)$ in equation (21) the oscillating system loses its isochronism [isochronism is a property of a linear oscillating system by virtue of which the frequency of its natural oscillations does not depend upon amplitude] and as is clear from the expression (2.6) for $\omega_1(a)$, the loss of isochronism will be smaller, smaller will be the expression $\varepsilon\Phi(x)$ as compared to $\omega^2 x$.

We now proceed to work out the second approximation. By formula (1.18) we get

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1}. \quad (2.7)$$

Putting the expressions (2.5) and (2.7) already derived, into (1.30), we obtain

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= 0 \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2\omega m\pi a} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a)}{k(n^2-1)} \int_0^{2\pi} \Phi'(a \cos \psi) \cos \psi \cos n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

As

$$\begin{aligned} C_0(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \cos \psi) d\psi \\ C_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

we get on differentiation,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'(a \cos \psi) \cos \psi d\psi &= dC_0(a) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'(a \cos \psi) \cos \psi \cos n\psi d\psi &= \frac{dC_n(a)}{da} \end{aligned}$$

nce, we can write

$$\begin{aligned} B_2(a) = & -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ & + \frac{1}{2\omega mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da} n^2 - 1 \right. \\ & \left. - 2C_0(a) dC_0(a) \right\} \end{aligned}$$

Thus, we have in the second approximation

$$x_{\Pi} = a \cos \psi - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1} \quad (2.10)$$

and in this case

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{\Pi}(a), \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

where

$$\begin{aligned} \omega_{\Pi}(a) = & \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega ma} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega} \left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2\omega mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

We see that in the second approximation also the amplitude does not depend on time and retains whatever initial value it had. The phase angle ψ rotates with a constant angular velocity :

$$\psi = \omega_{\Pi}(a)t + \theta \quad (\theta = \text{const}),$$

and the formula (2.10) approximately represents the general solution (correct to the order ε^2) containing two arbitrary constants of integration a and θ . We note that for conservative oscillating systems described by an equation of the type (2.1), all quantities $A_n(a)$ turn out to be zero, so that the equation for the amplitude of fundamental harmonic which is correct upto any order in ε will be

$$\frac{da}{dt} = 0$$

This equation expresses the condition of stationary oscillations with an arbitrary amplitude. As the error in the formula (2.10) is of the order ε^2 , we get, to the same degree of accuracy, the following expressions for the maximum and in the mimum deviations :

$$\left. \begin{aligned} x_{\Pi \max} &= a - \varepsilon C_0(a) + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a)}{n^2 - 1} \\ x_{\Pi \min} &= -a - \varepsilon C_0(a) + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(a)}{n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Before we proceed on to consider typical examples, we will transform equation (2.12) which determines the relation between the frequency and the amplitude of the oscillations. Squaring both sides of this equation and confining ourselves only to terms upto the second order, we get :

$$\omega_{11}^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} + \frac{\varepsilon^2}{mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right\} \quad (2.14)$$

Restricting ourselves to the first approximation, we have

$$\omega_I^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} \quad (2.15)$$

We note that in all formulae derived above the linear and non-linear components of the elastic force appear separately. The linear components enter via multipliers ω and k and the non-linear ones via coefficients $C_n(a)$ of the expansion (2.4). However, it is not difficult to see that division of the elastic force $p(x)$ (2.2) into linear and non-linear components is, to a great extent, arbitrary, because the constant k may be chosen by different methods.

For example, we determine it, from the condition that the zero-th approximation for the frequency of oscillation ω would coincide with the first approximation $\omega_1(a)$.

In this case, according to (2.15), we will get

$$C_1(a) = 0. \quad (2.16)$$

We now examine the Fourier expansion

$$p(a \cos \psi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a) \cos n\psi \quad (2.17)$$

and note that, in accordance with (2.2) and (2.4), we would have

$$\left. \begin{aligned} p_n(a) &= \varepsilon C_n(a) \quad (n = 0, 2, 3, 4, \dots, 7) \\ p_1(a) &= ak + \varepsilon C_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Thus, the condition (2.16) leads to the following formula for determining the equivalent rigidity :

$$k = \frac{1}{a} p_1(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \quad (2.19)$$

Here, the constant k is defined as certain function of amplitude but as the amplitude itself is a constant, it is possible to use the formula (2.19). If we were to discuss pseudo-harmonic damped oscillations, such a choice of the constant k , in general, would not have been proper because in this case the $\frac{p_1(a)}{a}$ would be varying with time.

The constant k may also be determined in another way. Taking the expansion for the elastic force in a power series in the neighbourhood of the point of equilibrium

$$p(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots,$$

it is natural to include αx in the linear part and other terms in the nonlinear part

$$\varepsilon \Phi(x) = \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

This would agree with the choice of k as given by the relation

$$k = p'(0) \quad (2.20)$$

Irrespective of the method of the choice of the constant k we can, by using (2.18), exclude the parameter ε from the formulae (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) and reconstruct them in a way so as to include only the known function $p(x)$.

As a result of these reconstructions we arrive at the following final formulae: for the first approximation

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \psi, \\ \omega_I^2(a) &= \frac{p_1(a)}{ma} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

and the second approximation

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1} \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a) \frac{dp_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2p_0(a) \frac{dp_0(a)}{da} \frac{1}{mka} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Evidently, the expression

$$\frac{p_n(a) \frac{dp_n(a)}{da}}{mka(n^2 - 1)}$$

represents the influence of the n -th harmonic on the natural frequency, while the expression

$$-2 \frac{p_0(a) \frac{dp_0(a)}{da}}{mka}$$

appears because of the displacement of the quiescent point of the characteristic curve due to the appearance of the constant term $-\frac{p_0(a)}{k}$ in the oscillation.

In the special case of symmetric oscillations, i. e. oscillations for which the elasticity characteristic of the system $F_s = p(x)$ is symmetric* about the origin of coordinates, so that the values of F_3 for $\pm x$ are equal in magnitude and opposite in sign, one has

$$p(x) = -p(-x).$$

Thus all the even harmonics disappear from the expansion (2.17) and the formulae (2.22) reduce to :

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2 - 1} \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \frac{dp_{2n+1}(a)}{da}}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Finally, we shall get rid of the parameter ε in the expressions for the maximum and minimum deviation.

From (2.13) and (2.18) we derive :

$$\left. \begin{aligned} x_{II \max} &= a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a)}{n^2 - 1} \\ x_{II \min} &= -a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n p_n(a)}{n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

In order to get an idea of the practical efficiency of the approximate formulae derived above, we examine a few numerical examples for which the precise solutions are known. We examine the equation of free oscillations of a frictionless mathematical pendulum with mass m and length l :

^{0*)} In the majority of the practically important cases, the elastic force is symmetric. The curve $F_s = p(x)$ is anti-symmetric because of the action of a constant force.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (2.25)$$

where x is the angle of deviation of the pendulum from the position of equilibrium. In this case

$$p(x) = \frac{g}{l} \sin x$$

and the expansion (2.17) will become

$$p(a \cos \psi) = \frac{g}{l} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\psi$$

($J_k(a)$ is Bessel's function).

In accordance with (2.21) and (2.23) we get in this first approximation

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \psi, \\ \left(\frac{\omega_I}{\omega_0} \right)^2 &= \frac{2J_1(a)}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

where $\omega_0^2 = \frac{g}{lm}$;

and in the second approximation

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2 - 1} \\ (\omega_{II})^2 &= (\omega_I)^2 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(a) J'_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

In particular

$$x_{I \max} = a, x_{II \max} = a + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1} \quad (2.28)$$

Regarding $x_{\max}$ and ω as functions of the amplitude of the first harmonic

$$x_{\max} = x_{\max}(a), \omega = \omega(a), \quad (2.29)$$

we compute their approximate values for a series of possible values of a . Because of the rapid convergence of the series appearing on the right-hand-sides of expressions (2.27) and (2.28) it is sufficient, for the purposes of calculations, to take into account only the first two terms in them. Further, for estimating the accuracy of the solutions obtained for (2.28), we compute, with the help of tables of elliptic functions, the corresponding values of (2.29) using the precise formulae (for the same values of a) :

$$\left. \begin{aligned} x(\psi, a) &= \frac{8\sqrt{q}}{1+q} \cos \psi - \frac{8q^{3/2}}{3(1+q^3)} \cos 3\psi + \dots \\ \omega_0 &= \frac{\pi}{2K} \\ k &= \sin \frac{x_{\max}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Here (as it is in the text books on the theory of elliptic functions) k stands for the module, K for the complete elliptic integral of the first kind, $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$, and $K'(k) = K(k')$, with $k' = \sqrt{1 - k^2}$. The results of

From these, we obtain

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_0}(a) = 1 - \frac{a^2}{16} + c^4$$

and

$$T_{11} = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{16} + \frac{3a^4}{1024} \right).$$

Using (2.24) we have for maximum oscillation

$$x_{\text{II max}} = a - \frac{a^3}{192} - \frac{a^5}{1024} \quad (2,38)$$

With the help of formulae already obtained we can calculate the frequencies, the periods and the maximum deviations for a series of values of a (amplitude of the first harmonic). The results of computations have been tabulated in Table 2.

tions hable 2					
$x_{1 \text{ max}} = a$	$x_{\text{II max}}$	$\frac{\omega_I}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\text{II}}}{\omega_0}$	T_I	$\frac{T_{\text{II}}}{T_0}$
		0.99750	0.99750	1.00250	1.00250
0.2	0.19996	0.99000	0.99003	1.01000	1.01008
0.4	0.39966	0.97750	0.97763	1.02250	1.02288
0.6	0.7970	0.9600	0.96040	1.0400	1.04120
0.8	0.9938	0.9375	0.93848	1.0625	1.06543
1.2	1.1886	0.9100	0.91203	1.0900	1.09607
1.4	1.3805	0.8775	0.88125	1.1225	1.13376
1.6	1.5684	0.840	0.8464	1.160	1.1792
1.8	1.751	0.798	0.8078	1.250	1.2333
2.0	1.927	0.750	0.7656	1.303	1.3711
2.2	2.094	0.698	0.7204	1.360	1.4572
2.4	2.250	0.578	0.6221	1.423	1.5564
2.8	2.518	0.510	0.5700	1.490	1.6701
3.0	2.622	0.438	0.5166	1.563	1.7998

Comparing Table 2 with Table 1, we can easily see that for oscillations of the pendulum not exceeding $\pm 35^\circ$ (within these limits the frequencies and the maximum deviations coincide with the exact ones upto the 5th and 4th digit respectively), we can take equation (2.31) and its approximate solutions (2.32) and (2.35) instead of the exact equation (2.25). However, when the angles of deviation are large (of the order $\pm 160^\circ$), the relative error of the first approximation is 13% and that of the second one is about 3%.

While examining free oscillations of a pendulum we did not take into account the frictional force. If we assume that the oscillations of the pendulum are being damped under the action of forces which are proportional to velocity, we are led to an investigation of the following equation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + g \sin x = 0 \quad (2.39)$$

or for small deviations

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + g \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (2.40)$$

According to the general formulae of §1, the solution of equation (2.40), to the first approximation, will be

$$x = a \cos \psi, \quad (2.41)$$

where a and ψ must be determined from the system of equations appropriate for the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta a \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left(1 - \frac{a^2}{16} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Here δ stands for $\frac{\lambda}{2m}$, and ω for $\sqrt{\frac{g}{lm}}$. Integrating the first of the equations (2.42) with the initial values of $t = 0$ and $a = a_0$, we arrive at the result

$$a = a_0 e^{-\delta t} \quad (2.43)$$

Next, from the second of the equations (2.42) we get

$$\psi = \omega \left\{ t + \frac{a_0^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right\} + 0, \quad (2.44)$$

where 0 is the initial value of the phase.

Putting the values of the amplitude (2.43) and the phase (2.44) into formula (2.41), we obtain

$$x = a_0 e^{-\delta t} \cos \left\{ \omega \left[t + \frac{a^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right] + 0 \right\}. \quad (2.45)$$

Thus, in the first approximation, the oscillations will be attenuating with frequency (1) which is a function of the amplitude $\Leftrightarrow (a)$. Further, as the time increases the instantaneous frequency will increase because of the gradual damping and, in the limit will tend to a constant value $\omega = \sqrt{\frac{g}{lm}}$.

We now examine the oscillations of a system for which the characteristic of the restoring elastic force has the form

As in this case the expansion (2.17) assumes the form

we can, by introducing the dimensionless combinations $(\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2} x$, $(\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2} a$, $\frac{\omega}{\omega_0}$ and using equations (2.2I) and (2.23), write down in the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x &= \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a \cos \psi, \\ \left(\frac{\omega_1(a)}{\omega_0} \right)^2 &= 1 + \frac{3}{4} \left[\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a \right]^2, \omega_0 = \sqrt{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Similarly, in the second approximation,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{11} &= \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a \cos \psi + \left(\frac{a\sqrt{\gamma}^3 \cos 3\psi}{32(\omega_1)^2} \right) \\ \left(\frac{\omega_{11}(a)}{\omega_0} \right)^2 &= \left(\frac{\omega_1(a)}{\omega_0} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{3}{128} (a\sqrt{\gamma})^1 \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^4 \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (2.49)$$

$$p(x) = x + y + x^3 (x > 0, \gamma > 0) \quad (2.46)$$

In this case, we obtain a non-linear differential equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0 \quad (2.47)$$

ch may be integrated in an explicit form with help of the elliptic ctions. Hence, even in this case it is possible to compare the exact tions with the approximate ones.

$$p(a \cos \psi) = \left(\alpha a + \frac{3}{4} \gamma a^3 \right) \cos \psi + \frac{\gamma a^3}{4} \cos 3\psi,$$

whence

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{I \max} &= \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a; \\ \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{II \max} &= \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a \left\{ 1 + \frac{a^2 \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)}{\omega_I \omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

We derive the exact values of $\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{\max}$ and $\frac{\%}{\omega_0}$, for given values of $\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a$, from tables of elliptic functions by using the formulae

$$x(\psi, a) = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2K}{\pi} \psi = x_{\max} \frac{2\pi}{kK} \\ &\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{q} \cos \psi + \frac{q^{3/2}}{1+q^3} \cos 3\psi + \dots \end{aligned} \right\}, \\ &1+q \\ &(\xi_0) = \pi \sqrt{1+\xi^2}, \quad k = \frac{\xi}{\sqrt{2+2\xi}}, \quad \xi = x_{\max} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right. \quad (2.51)$$

Here cn , k , K and q denote, respectively, the elliptic cosine, module, complete elliptic integral of the first kind and e^{-K} , while $K'(k) = K(k')$, where $k' = \sqrt{1-k^2}$.

We have tabulated the results of our calculations in Table 3.

Table 3

	$\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} a \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{11} \max \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x_{\max}$		$\omega_1 \omega_0$	$\omega_{II} \omega_0$	$\omega \omega_0$
0.29927	0.30005	0.3	1.0330	1.0331	1.0331
0.59464	0.5998	0.6	1.1248	1.1258	1.1259
0.88552	0.8992	0.9	1.2602	1.2638	1.2641
1.1733	1.1981	1.2	1.4256	1.4333	1.4340
1.4592	1.4966	1.5	1.6115	1.6241	1.6257
1.7443	1.7948	1.8	1.8116	1.8297	1.8323
2.0293	2.0931	2.1	2.022	2.0459	2.0493
2.3140	2.3912	2.4	2.240	2.2697	2.2740
2.5991	2.6895	2.7	2.463	2.4985	2.5041
2.8841	2.9877	3.0	2.690	2.7318	2.7385

In view of the simplicity of the formulae (2.48) and (2.49), we could very well recognise that the degree of approximation obtained in this example is completely satisfactory. It can also be shown that these formulae do not lose their validity even when $a \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Indeed, the relations (2.51) lead us to the following asymptotic formula

$$\omega_0 = \frac{1}{42} \frac{1 + qa(\gamma)_{\alpha}^{1/2} + \dots}{1q},$$

where q is chosen for the module $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, and the dots indicate terms whose ratio to the first term written above tends to zero when $a(\gamma)_{\alpha}^{1/2} \rightarrow \infty$. Similar asymptotic formulae are obtained from (2.48) and (2.49) for $\omega_1(a)$ and $\omega_0^{11}(a)$ with the coefficients of proportionality $\sqrt{\frac{3}{4}}$, and $\sqrt{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{128} \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$, respectively. The computed values of these quantities will be :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1+q}{\sqrt{q}}\right)_{q=\frac{1}{\sqrt{2}}} &= 0.887; \sqrt{4} = 0.866 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{128} \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) &= 0.892 \end{aligned}$$

Thus, in the limit $a(\gamma)_{\alpha}^{1/2} \rightarrow \infty$, the relative error in the first approximation of the frequency is 2.4% and that in the second approximation is 0.6%.

10.2.3 3. Case of Non-linear Friction.

As a second particular example, we examine the equation of the form

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (3.1)$$

This may be interpreted as the equation of oscillations of a mass m , under the action of a linear elastic force kx and a non-linear weak friction $\approx F\left(\frac{dx}{dt}\right)$ which is a function of the velocity.

This equation obviously belongs to the type of the general equation (1.1), with the relation

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = {}_m^1 F\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

being satisfied in this case.

In order to use the formulae (1.21) - (1.28), defining the unknown approximate solutions, we examine the expansion

$$\frac{1}{m} F(a \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) \cos n', \quad (3.2)$$

which yields

$$\frac{1}{m} F(-a(\omega) \sin \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega) \cos n \left(\div + \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparing this with (1.16), we arrive at the relations

$$g_n(a) = F_n(a\omega) \cos \frac{n\pi}{2}, h_n(a) = -F_n(a\omega) \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (3.3)$$

Hence, according to (1.17), we have

$$A_1(a) = \sum_{2\omega}^1 F_1(a(a)), B_1(a) = 0 \quad (3.4)$$

Thus, taking into account (1.23) and (1.24), we obtain the first approximation in the form:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \\ da &= 2 \\ dt &F_1(a(\omega), \\ dt &= \omega, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

From the foregoing it can easily be seen that, for systems described by an equation of the type (3.1), the amplitude of the oscillation in the first approximation will get damped according to the law expressed by the second of the equations (3.5). As regards instantaneous frequency we see that it is constant and equals the usual linear frequency ω , so that

$$\psi = \omega t + \theta.$$

where θ is the initial value of the phase

Thus, in the first approximation, oscillations are found to be harmonic ones with a constant frequency ω .

We had as yet no opportunities to find that non-linear oscillating systems are, generally speaking, not isochronous.

The example discussed here is one of the most important cases where the system is isochronous in the first approximation. Such cases will be called quasi-isochronous*).

We now take up the calculation of the second approximation, According to (1.28) and (3.3), we arrive at the relation

$$u_1(a, \psi) = - \sum_{\substack{\omega \\ (\omega^2(n \neq 1))}}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{F_n(a(0) \cos n(\psi + \frac{\pi}{2}))}{n^2 - 1} \quad (3.6)$$

Further, we obtain from (1.30), (3.4) and (3.6)

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -A_2(a) \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi - \\ &- \int_{2\omega^2\pi m} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{nF_n(a(\omega))}{n^2 - 1} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cdot \sin n(\psi + \frac{\pi}{2}) \sin \psi d\psi \\ B_2(a) &= \frac{1}{2\omega} A_1(a) dA_1(a) \left\{ \frac{A_1(a)}{2\omega\pi am} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \times \cos^2 \psi d\psi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\omega^2\pi am} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} nF_n(a\omega) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \psi d\psi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

On the other hand, replacing ψ by $\psi - \frac{\pi}{2}$ in the integral, we have

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F'(-a(\omega) \sin \psi) \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \psi d\psi &= \\ &= - \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n\psi \cos \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

*) We add the adjective 'quasi' since such oscillating systems as will be considered below are isochronous only in the first approximation.

Further, integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{m} F' \int_0^{2\pi} F'(-a(\omega) \sin \psi) \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \cos \psi d\psi - \\
 &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n' \psi \sin \psi d\psi - \\
 &= -\frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \sin n\psi d \left[\frac{F(a\omega) \cos \psi}{a\omega} \right] = \\
 &= \frac{n}{a(\omega)} \int_0^{2\pi} F(a\omega \cos \psi) \cos n' \psi \left(\psi - \frac{n\pi}{a\omega} F_n(a\omega) \right)
 \end{aligned}$$

Hence equations (3.7) may be written in the form

$$\begin{aligned}
 A_2(a) &= 0 \\
 B_2(a) &= \frac{F_1(a(\omega)) dF_1(a(\omega))}{8\omega^3 a} - \frac{F_1^2(a(\omega))}{4\omega^3 a^2} - \frac{1}{2\omega^3 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^2(a\omega)}{n^2 - 1}
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Thus, for the case under investigation, the second approximation has the form

$$x = a \cos \psi - \sum_{\omega^2}^{\varepsilon} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} F_n(a\omega) \cos n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.9)$$

and in this case

$$\left. \begin{aligned}
 & da \\
 & dt = \frac{\varepsilon F_1(a\omega)}{2\omega} \\
 & d\omega = \omega + \varepsilon^2 B_2(a),
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

where $B_2(a)$ is defined by the expression (3.8).

Before we start an analysis of the equations expressing the dependence of the amplitude on time for different laws of the frictional force, i.e. for different forms of the function $F\left(\frac{dx}{dt}\right)$, we note that a general restriction is necessary for the applicability of the formulae derived above. The restriction is that the frictional force must be sufficiently small.

Going over to an examination of the typical cases, we examine, first of all, the linear equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (3.11)$$

with a small damping coefficient

$$\lambda = \varepsilon v$$

We see that for the given equation

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -v \frac{dx}{dt}$$

and hence

$$\begin{aligned}
 F_1(a\omega) &= -\nu \omega a \\
 F_n(a\omega) &= 0, (n = 0, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

Thus, in accordance with (3.8), (3.9) and (3.10), we immediately derive for the second approximation

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \psi \\ da &= -\frac{\lambda a}{2} \\ dt & \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

As we find from the first of the equations (3.12), the law for the damping of the amplitude is found to coincide completely with the exact formula

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}}.$$

Further, the law for the attenuation of the frequency has the approximate form

$$\omega_2 = \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right\}, \quad (3.13)$$

which corresponds to the first two terms of the expansion for the exact expression for the frequency in powers of (λ/ω)

$$\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2} = \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{128} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 + \dots \right\}.$$

This is, however, quite natural since we would not take into account terms higher than those of the second order.

In order to get an idea of the accuracy of the approximate formula (3.13), we take, for instance, $\lambda = \frac{\ln 2}{\pi}$. We would find that this value of the coefficient λ corresponds to quite a considerable damping. In fact the amplitude becomes one-half of its original value during one period.

Further, talking in terms of the absolute magnitudes, the "perturbing term" $\lambda \frac{dx}{dt}$ becomes even about one-fourth of the 'main terms': $\frac{d^2x}{dt^2}$ or $\omega^2 x$. In spite of this, the relative error of the formula (3.13) is found to be less than 0.01%.

Let us examine yet another simple example leading to an equation of the type (3.1). This is the case of harmonic or in general small oscillations of a pendulum in a medium with a small resistance proportional to the second power of velocity.

In this case the equations of the oscillations will be

$$\left. \begin{aligned} d^2x + \alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x &= 0, & \text{if } \frac{dx}{dt} > 0 \\ d^2x & \\ d^2x - \alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x &= 0, & \text{if } \frac{dx}{dt} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

or

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \omega^2 x = 0 \quad (3.15)$$

where, as usual, $\left| \frac{dx}{dt} \right|$ denotes the absolute magnitude of $\frac{dx}{dt}$. (We take recourse to this form of writing because we find that the term proportional to $\alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ represents the resistance to the motion).

Considering damping to be sufficiently small, we put

$$\alpha = \varepsilon v$$

In this case, equation (3.15) will be an equation of the form (3.1), since

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -v_{dt}^{dx} \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

We now derive an expression for the n th term in the Fourier ex.

$$F_n(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi = -2va^2 \int_0^\pi |\cos \psi| \cos \psi \cos n\psi d\psi \\ - \frac{2va^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \cos n\psi d\psi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^2 \psi \cos n\psi d\psi \right\}$$

whence we get

$$F_0(a) = F_2(a) = F_4(a) = \dots = F_{2q}(a) = \dots = 0, \\ F_1(a) = -\frac{8va^2}{3\pi}, F_{2q+1}(a) = \frac{8va^2(-1)^{q+1}}{\pi(2q+1)[(2q+1)^2 - 4]}, (q = 0, 1, 2, \dots).$$

Thus, in agreement with (3.8), (3.9) and (3.10), we may write the second approximation in the form

$$x = a \cos \psi - \frac{8\alpha a^2}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} (2q+1) \frac{\sin(2q+1)\psi}{[(2q+1)^2 - 1][2q+1]^2 - 4]} = \\ = a \cos \psi - \frac{\alpha a^2}{15\pi} \left\{ \sin 3\psi + \frac{1}{21} \sin 5\psi + \dots \right\}, \quad (3.16)$$

where a and ψ are defined by equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{4\alpha\omega}{3\pi} a^2 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left\{ 1 - \frac{4\alpha^2 a^2}{\pi^2} C \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Here, for the sake of brevity, we have put

$$C = 8 \sum_{q=1}^{\infty} \left[(2q+1)^2 - 11 [(2q+1)^2 - 4]^2 \right] = \\ = \frac{1}{25} + \frac{1}{1323} + \frac{1}{12150} + \dots = 0.0407 \dots \quad (3.18)$$

Integrating the first of the equations (3.17) we have

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{4\alpha(\omega)}{3\pi} t \quad (3.19)$$

whence we derive the law for the damping of the amplitude of the fundamental harmonic :

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{4\pi\omega a_0}{3\pi} t} \quad (3.20)$$

Thus, when the frictional forces are proportional to the square of the velocity, the amplitude of oscillations attenuates approximately in inverse proportion to the increase in the linear function of time.

Putting expression (3.20) into the second of the equations (3.17) and integrating, we get the law for the phase angle rotation:

$$\psi = \omega t - \frac{3C\alpha a_0}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + 4\alpha\omega a_0} 3 \right\} + \psi_0 \quad (3.21)$$

Thus, we have obtained explicit expressions representing an oscillation process in the second approximation.

We note that the correction terms of the second approximation are very small even when the damping is very large. Thus, if we take $xa_0 = \frac{3}{8}$, i.e. if the amplitude a reduces to $\frac{a}{2}$ during one cycle after the start of the oscillation, the sum of the amplitudes of all the overtones of the oscillation will be less than 1% of the amplitude of the fundamental harmonic. Hence, in the second approximation, the correction for the frequency of oscillations will be less than 0.25%.

We now compare the approximate solution thus obtained with the exact one.

Equation (3.15) may be integrated completely. Indeed, assuming $x = x_0 > 0$ and $\frac{dx}{dt} = 0$ when $t = 0$, we get

$$\int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1 + 2\alpha x) - (1 + 2\alpha x_0) e^{-2\alpha(x-x_0)}}} = \frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}} - 1. \quad (3.22)$$

Because of the presence of transcendental square root, the unknown function x cannot be represented by elementary functions. However, it is not difficult to work out the equation for the damping between two successive amplitudes because of the existence of a frictional force proportional to the square of the velocity. We have after F. Pra'sil*):

$$(2\alpha x_I + 1) - n(2\alpha x_I + 1) = (2\alpha x_{II} + 1) - \ln(2\alpha x_{II} + 1), \quad (3.23)$$

or, in our notation,

$$(2\alpha a_0 + 1) - \ln(2\alpha a_0 + 1) = (2\alpha a_1 + 1) - \ln(2\alpha a_1 + 1), \quad (3.24)$$

where a_0 is the initial value of the amplitude, a_1 the value of the amplitude after the lapse of a period of oscillation.

In order to compare the results obtained from the exact formula (3.24) and those from the approximate one (3.19), we change the form of the latter to the following

$$\frac{1}{2\alpha a} - \frac{1}{2\alpha a_0} = \frac{2\omega}{3\pi} t \quad (3.25)$$

Putting the value of the period for the first approximation in the right-hand-side of (3.25), we get the following relation between two successive amplitudes**)

$$\frac{1}{2\alpha \cdot a_1} - \frac{1}{2\alpha \cdot a_0} = \frac{4}{3} \quad (3.26)$$

Table 4 given below shows a good correspondence between the successive calculated amplitudes by the exact formula (3.24) and those calculated by the approximate one. For $2\alpha a_0 = 1$, i.e. when the amplitude diminishes to 0.6 of its initial value the results calculated from (3.26) (which characterizes only the first approximation) differ from the exact ones only by 1% and for the case $2\alpha a_0 = 0.1$, the deviation is 0.4%.

We study another example leading to an equation of the type (3.1). This is the case of the oscillations of a body under the action of a Coulomb friction. In this case we start with the equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -A \operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad (3.27)$$

*) F. Prasil, Schweiz. Bauz, 52, 334 (1908).

**) We note that A. de Caligny arrived at the same approximate formula empirically vide Recherches sur les oscillations del'eau, 1 Versailles, p. 20.

CASE OF NON-LINEAR FRICTION

where

$$\text{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \begin{cases} 1, & \text{if } \frac{dx}{dt} > 0 \\ -1, & \text{if } \frac{dx}{dt} < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Table 4					
($2\alpha a$)	($2\alpha a$) approx.	(2xa) exact.	(2xa) approx.	(2xa) exact.	($2xa$)
1.0000	1.0000	0.1570	0.1578	0.0854	
0.5936	0.6000	0.1420	0.1428	0.0808	0.0856
0.4240	0.4285	0.1298	0.1304	0.0767	0.0810
0.3301	0.3332	0.1194	0.1200	0.0730	0.0769
0.2704	0.2726	0.1106	0.1111		0.0731
0.2290	0.2307	0.1030	0.1034	-	-
0.1986	0.1999	0.0964	0.0967	-	-
0.1753	0.1764	0.0906	0.0908	-	-

Comparing equation (3.27) with (3.1), we have

$$\frac{\varepsilon}{m} F \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{A}{m} \text{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (3.29)$$

Hence, when $a > 0$, we obtain,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{2\pi} F(a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ &= -A \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \psi d\psi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \psi d\psi \right\} = \\ &= -4A \int_0^{\pi} \cos \psi d\psi = -4A \end{aligned}$$

Further, when $a = 0$

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} F(a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi = 0$$

Hence, according to (3.5), we can write the following equations, in the first approximation, for the instantaneous value of the amplitude

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2A}{\pi \cdot m\omega}, \quad \begin{cases} \text{if } a > 0 \\ \text{if } a = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Integrating equation (3.30) with initial conditions $t = 0$, $a = a_n$, we get :

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 - \frac{2A}{\pi m(0)} t & \text{when } t \leq \frac{\pi m(0)}{2A} a_0; \\ a &= 0, & \text{when } t > \frac{\pi m(0)}{2A} a_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

According to (3.31), it is obvious that when there is a Coulomb friction, the oscillations get damped completely right from the $t = t$, where

$$\bar{t} = \frac{\pi m\omega}{2A} a_0.$$

10.2.4 4. Autonomous Oscillatory Systems

Let us now examine an oscillating system represented by an equation of the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt}, \quad (4.1)$$

which is also a special case of equation (1.1).

We find that the equation (3.1) may be converted into the form (4.1). Indeed, assuming

$$\frac{dx}{dt} = y$$

and differentiating (3.1), we obtain

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + ky = \varepsilon F'(y) \frac{dy}{dt}.$$

Comparing (4.1) with (1.1), we get

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt};$$

hence, in order that the formulae (1.21) - (1.28) might be used, we have to expand the expression

$$f(a \cos \psi) a \omega \sin \psi$$

in a Fourier series.

In order to simplify this operation we examine the function

$$F^*(x) = \int_0^x f(x) dx. \quad (4.2)$$

Its expression in the Fourier series is

$$F^*(a \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n'_*. \quad (4.3)$$

Differentiating (4.3) with respect to ψ and using (4.2), we get

$$f(a \cos \psi) a(\omega) \sin \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n F_n^*(a) \sin n'. \quad (4.4)$$

Comparing (4.4) with (1.16) and (1.17), we arrive at

$$A_1(a) = \frac{1}{2} F_1^*(a), B_1(a) = 0, \quad (4.5)$$

whence we have, in the first approximation,

$$x = a \cos \psi,$$

where a and ψ must satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

In order to obtain an expression for the second approximation, we shall use the results of the preceding section.

Starting from the expressions (3.2), (3.6), (3.7), (3.8) and (4.4) and considering that

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(a \cos \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(a \cos \psi) \cos^2 \psi d\psi &= \frac{dF_i(a)}{da}\end{aligned}$$

we can write

$$x = a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{n=2}^{\infty} n F^*(a) \sin n' \quad n^2 - 1 \quad (4.7)$$

where a and ψ are given by the equations

$$\left. \begin{aligned} da &= \varepsilon \\ dt &= 2 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

with B_2 having the form

$$B_2(a) = - \int_{8a\omega}^1 F_1^*(a) dF_1^* da - \frac{1}{2\omega a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^{*2}(a)}{n^2 - 1} \quad (4.9)$$

Comparing the approximate solutions thus obtained with those of equation (3.1), obtained in the previous section, we are convinced of their identical nature. Thus the system represented by equation (4.1) is also quasi-isochronous.

As an example we investigate the equation of Van-der-Pol, viz.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4.10)$$

Comparing (4.10) and (4.1), we have

$$f(x) = 1 - x^2$$

and hence

$$F^*(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Thereupon we arrive at the following expansion for $F^*(a \cos \psi)$,

$$F^*(a \cos \psi) = a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \cos \psi - \frac{a^3}{12} \cos 3\psi$$

and, comparing with (4.3), we obtain the expressions

$$\left. \begin{aligned} F_1^*(a) &= a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \\ F_3^*(a) &= -\frac{a^3}{12} \\ F_n^*(a) &= 0, \text{ if } n \neq 1, n \neq 3 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

By using (4.6) we get, in the first approximation,

$$x = a \cos \psi \quad (4.12)$$

where a and ψ are to be determined from the system of equations

$$\left. \begin{aligned} da &= \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \\ dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Thus, in the first approximation, we obtain a harmonic oscillation having a constant frequency $\omega = 1$, and an amplitude which varies according to the first of the equations (4.13). In order to obtain the law of dependence of amplitude on time, in an explicit form, it is necessary to solve this equation. Multiplying both the sides by a , we have

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) a^2 \quad (4.14)$$

whence

$$\frac{da^2}{(1 - a^2) + 2} a^2 = \varepsilon dt$$

or

$$\frac{da^2}{4 - a^2} + \frac{da^2}{a^2} = \varepsilon dt$$

which yields

$$\ln \frac{a^2}{4 - a^2} = \ln \frac{a_0^2}{4 - a_0^2} + \varepsilon t, \quad (4.15)$$

where a_0 is the initial value of the amplitude.

Finally, we obtain from (4.15)

$$a = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (4.16)$$

Putting (4.16) into (4.12), we have the explicit expression for the first approximation :

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(\omega t + \theta) \quad (4.17)$$

We see from (4.17) that if the initial value of the amplitude a_0 is zero, it will remain zero for all time t , and we take $x = 0$, i.e. we get a trivial solution of the Van-der-Pol equation. This trivial solution evidently corresponds to the static condition, i.e. absence of any oscillation in the system. However, from this formula itself it is not difficult to see that this static state is unstable. Indeed, however small the value of the amplitude may be, it will, all the same, increase monotonically and attain the limiting value of 2. Thus, since small random shocks are practically unavoidable, oscillations with an increasing amplitude are automatically excited in the given oscillating system even in a state of rest, i.e. the system is a self-excited one.

We also find from (4.17) that if $a_0 = 2$, then $a = 2$ for all values of $t \geq 0$. This solution corresponds to a stationary (steady state) dynamic regime :

$$x = 2 \cos(t + \theta) \quad (4.18)$$

As distinguished from the static system, the dynamical one possesses a strong stability, so much so that whatever be the value of $a_0 \neq 0$, $a(t)$ always tends to the same limit 2 when $t \rightarrow \infty$.

We note that it is only in the first approximation that we can represent the stationary state as a harmonic oscillation (4.18) with frequency $\omega = 1$ and amplitude equal to 2. In reality, however, a stationary regime is not harmonic.

We now proceed to derive an expression in the second approximation. By virtue of (4.7), (4.8) and (4.11) we get

$$x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3\psi \quad (4.19)$$

in which a and ψ are determined from the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Thus, for stationary oscillations we get, in the second approximation,

$$x = 2 \cos(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(\omega t + \theta), \quad (4.21)$$

where

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$$

From the simple example of a self-excited oscillating system represented by Van-der-Pol equation, we find that this system is radically different from a conservative one described by a formula of the type (2.1).

In a conservative oscillating system, as we have already seen (vide page 59), the oscillations with any constant amplitude are possible, whereas in an autonomous system oscillations with constant amplitude are possible only if such an amplitude has certain definite values. This may be understood from the physical point of view on the following obvious considerations. In a conservative system, since there is neither a dissipation nor a generation of energy, the oscillations once excited can neither grow nor attenuate and the amplitude remains constant. However, in a self-excited system, there are sources and sinks of energy. Hence, the amplitude of the oscillations will grow if the quantity of energy supplied by the source exceeds the quantity of energy lost through the dissipating forces. On the other hand, if the energy supplied by the source is less than the amount of energy dissipated, the oscillations will be damped. Constant value of the amplitude will be preserved only when the above mentioned quantities balance each other.

Now we find an approximate expression for the Van-der-Pol equation by using the principle of averaging. For this purpose equation (4.10) has to be reduced to the standard form. This can easily be done if in place of the unknown function x we introduce two new functions a and θ by means of the relations :

$$x = a \cos(t + \theta) \quad (4.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin(t + \theta) \quad (4.23)$$

Differentiating (4.22) and utilising (4.23) we have

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \theta) - a \frac{d\theta}{dt} \sin(t + \theta) = 0 \quad (4.24)$$

Differentiating (4.23) and taking into consideration (4.22) and (4.10) we have $\frac{da}{dt} \sin(t + \theta) + a \frac{d\theta}{dt} \cos(t + \theta) = \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] a \sin(t + \theta)$.

Solving equations (4.24) and (4.25), we arrive at a system of two equations in the standard form :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] a \sin^2(t + \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] \sin(t + \theta) \cos(t + \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \right\} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t + \theta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Using the principle of averaging, we get, in the first approximation,

$$a = a_1, \quad \theta = \theta_1,$$

with

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4} \right), \quad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad (4.28)$$

because

$$M_t \{ \cos 2(t + \theta) \} = M_t \{ \sin 2(t + \theta) \} = M_t \{ \cos 4(t + \theta) \} = M_t \{ \sin 4(t + \theta) \} = 0.$$

It is obvious that equations of the first approximation (4.28) agree with equations (4.13) obtained earlier.

An improved first approximation will evidently be represented by

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 - \frac{\varepsilon a_1}{4} \sin 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^3}{32} \sin 4(t + \theta_1), \\ \theta &= \theta_1 - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{2} \right) \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^2}{32} \cos 4(t + \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

As before, we have for the stationary regime

$$a(t) \rightarrow 2 \text{ when } t \rightarrow \infty,$$

and hence, for a steady state oscillation when $a_1 = 2$ the formulae (4.29) of the improved first approximation yield:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(t + \theta_1), \\ \theta &= \theta_1 + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(t + \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Putting these values into (4.22), we have

$$\begin{aligned} x &= \left[2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(t + \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(t + \theta_1) \right] \cos \left(t + \theta_1 + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(t + \theta_1) \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

or, neglecting terms of the second order and making an elementary transformation, we obtain the improved approximation

$$x = 2 \cos(t + \theta_1) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(t + \theta_1), \quad (4.32)$$

which coincides with the expression for the improved approximation derived earlier.

Before we start a special study of the stationary amplitudes and their stability, we examine one more classical example of an autonomous oscillation system—a clock pendulum excited by pulses.

In this case, we have

$$J \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} \delta(x - x_0) \right\} + kx = 0, \quad (4.33)$$

where x_0 is the angle of deviation of the pendulum, I the pulse imparted to the pendulum and $\delta(x)$ is an "improper function" defined by the equations

$$\left. \begin{aligned} \int_{-0}^{+0} \delta(x) dx &= 1 \\ \delta(x) &= 0 \quad \text{when } x \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

To reduce (4.33) to the form (1.1), we assume

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{J} \\ \approx f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \frac{\lambda}{J^4} \frac{dx}{dt} - \frac{I}{J} \frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right| \delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (4.35)$$

On the basis of (4.34) and (4.35) we can write

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a(\omega) \sin \psi) \sin \psi d\psi &= \frac{1}{J} \int_0^{2\pi} \lambda a \omega \sin^2 \psi d\psi - \\ &- \frac{I a(\omega)}{J} \int_0^{2\pi} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin \psi + |\sin \psi| \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{\lambda a(\omega)}{J} - \frac{I a \omega}{J} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi \end{aligned} \quad (4.36)$$

Let ψ_a be a root of the equation

$$a \cos \psi = x_0 \quad (4.37)$$

lying between 0 and $\frac{\pi}{2}$.

Hence for $a \geq x_0$ we have

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi &= \int_{\psi_a-0}^{\psi_a+0} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi = \\ &= \frac{1}{a} \int_{x_0-0}^{x_0+0} \delta(x - x_0) \sin \psi_a dx = \frac{\sin \psi_a}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \end{aligned}$$

If $a < x_0$, we evidently have

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi = 0$$

Thus, on the basis of (4.36), (1.24) and (1.27) we obtain, in the first approximation, the following equations for determining the instantaneous amplitude

$$\left. \begin{aligned} da &= -\frac{\lambda}{2J}a, \text{ if } a < x_0 \\ da &= -\frac{\lambda}{2J}a + \frac{I}{2\pi J}\sqrt{1-x_0^2}, \text{ if } a \geq x_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

and a completely analogous formula for the full phase

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a),$$

where

$$(1) \quad \omega(a) = \begin{cases} \omega & \text{if } a < x_0; \\ \omega - Ix_0 & \text{if } a > x_0. \end{cases}$$

It follows directly from (4.38) that when the initial value of the amplitude a_0 is sufficiently small, say, when

$$a \leq x_0$$

the amplitude $a(t)$ will decrease,

$$a(t) \rightarrow 0 \text{ when } t \rightarrow \infty$$

and oscillations will damp down with the passage of time. Hence, the given oscillating system has no self-excitation and the static (equilibrium) regime

$$a = 0$$

will be stable.

However, we may raise the problem of the existence of stationary (steady state) dynamical regimes corresponding to constant non-zero values of the amplitude. It is obvious that such values of the amplitude a must satisfy the equation

$$-\frac{\lambda}{2J}a + \frac{I}{2\pi J}\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} = 0 \quad (4.39)$$

as for stationary amplitude $\frac{da}{dt} = 0$.

Thus, the question of the existence of stationary dynamical regimes is bound up with the question of the existence of real positive roots of the equation of stationary amplitudes (4.39). We shall now examine this equation.

Rewriting this in the form

$$1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \left(\frac{\pi\lambda}{I}\right)^2 a^2$$

we obtain a bi-quadratic equation for a ;

$$a^4 - \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 a^2 + \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 x_0^2 = 0,$$

with two roots

$$a_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2} \quad (4.40)$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2} \quad (4.41)$$

These roots will be real, if

$$x_0 < \frac{1}{2} \frac{I}{\pi\lambda}. \quad (4.42)$$

If

$$x_0 > \frac{1}{2} \frac{I}{\pi\lambda}, \quad (4.43)$$

both the roots (4.40) and (4.41) will be complex and hence, when (4.43) holds, stationary dynamical systems are impossible. In this case, the only possible stationary condition is that of equilibrium, $a = 0$. Thus, when the condition (4.43) is fulfilled, oscillations cannot be maintained in the system under study. The amplitude decreases monotonically, irrespective of its initial value, and tends to zero.

When the condition (4.42) is fulfilled it follows from (4.38) that the process of changes in the amplitude will be as follows:

$$\begin{aligned} &\text{when } a(0) < a_1, \quad a(t) \rightarrow 0; \\ &\quad \quad \quad t \rightarrow \infty \\ &\text{when } a(0) > a_1, \quad a(t) \rightarrow a_2, \\ &\quad \quad \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

when $a(0) > a_2$, the amplitude decreases monotonically to the value a_2 , and when $a_1 < a(0) < a_2$, the amplitude increases monotonically to the same value a_2 .

Therefore, if the parameters of the oscillating system satisfy the condition (4.42), the system might possibly have stable stationary oscillation with a constant amplitude :

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda} \right)^2}},$$

In order that this oscillation may be excited, it is necessary that the initial amplitude should be larger than a_1 , i. e. the initial push should be powerful enough to impart a deviation greater than a_1 .

For example, if the initial conditions at $t = 0$ are

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = A$$

then

$$\psi_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad A = a_0\omega$$

and hence the condition for the excitation of oscillations is

$$A > a_1^\omega$$

10.2.5 5. Stationary Amplitudes and Their Stability

In the previous sections we obtained approximate formulae which represented the law for the variation of amplitude of the fundamental harmonic of the oscillation with time. For the n -th approximation the equation obtained has the form

$$\frac{da}{dt} = \Phi(a) \quad (5.1)$$

where

$$\Phi(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^n A_n(a)$$

and hence equation (5.1) may be integrated by quadratures.

However, even without integration we can follow the behaviour of the solution $a = a(t)$ in so far as its dependence on the properties of $\Phi(a)$ is concerned. We shall now discuss this.

We first assume that there is no positive value a^* for which

$$\Phi(a) > 0 \text{ for all values of } a > a^*.$$

This condition has also to be assumed on purely physical considerations. Indeed, if there be such a value as a^* , then taking the initial value of the amplitude to be greater than a^* ,

$$a(0) > a^*$$

we might obtain, in accordance with equation (5.1), an unlimited increase in the amplitude.

$$a(t) \rightarrow \infty \quad \text{when} \quad t \rightarrow \infty$$

i. e. an unlimited swing of the oscillations which, however, is physically impossible.

Hence, in what follows we shall always assume that the above condition (which can be called the condition of the limited amplitude) is fulfilled.

We conclude from equation (5.1) that the amplitude increases when $\Phi(a) > 0$ and decreases when $\Phi(a) < 0$. Unchanging, stationary values of a are determined by the equation

$$\Phi(a) = 0 \quad (5.2)$$

and for arriving at these we have to replace the right-hand-side of equation (5.1) by zero.

From equation (5.1) we find that if the initial value of the amplitude is not stationary (i.e. equation (5.2) is not satisfied), the amplitude $a(t)$ increases monotonically (if $\Phi(a^0) > 0$) or decreases monotonically (if $\Phi(a^0) < 0$) with time, tending to the stationary value.

Thus, any non-stationary oscillation approaches the stationary one with the passage of time.

Non-stationary oscillations are usually called transient oscillations or oscillations with a transient regime. The fact that any oscillation approaches the stationary one brings out the special role of stationary oscillations, particularly in high-frequency oscillation processes where the transient regime quickly approaches the stationary one owing to its small period of oscillation. Hence, from the practical point of view, this kind of oscillations, almost immediately after their initiation, may be looked upon as stationary ones.

We note that there exists a case of degeneration when the function $\Phi(a)$ is identically equal to zero. There are no transient regimes in this case and any oscillation is stationary. This is so when, for example, $f(x, \frac{dx}{dt})$ depends only on x and not on $\frac{dx}{dt}$. In this case equation (1.1) assumes the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \quad (5.3)$$

+F(x)=0,

which has already been examined in detail. This equation can be integrated in the same way as that of oscillations of a material point subject to the action of a force $F(x)$ depending only on the

position and hence being equal to $\frac{dU}{dx}$,

where

$$U = \int_0^x F(x) dx$$

is the potential.

Equation (5.3) is the equation of a conservative oscillatory system whose energy does not change during oscillations.

In reality, however, there is no ordinary oscillatory system which is conservative; in any such system dissipative forces are always in action giving rise to energy-dissipation and in the case of an autonomous oscillatory system even some sources of energy may also be found.

Let us now turn to the question of stability of stationary oscillations. We assume that a_0 is a root of the equation (5.2), i.e. a constant stationary solution of the equation (5.2). We will now examine a solution of (5.1) which is infinitesimally close to a_0 .

Assuming $a = a_0 + \delta a$, we obtain for the infinitesimal increment δa (neglecting terms of higher order)

$$\frac{d\delta a}{dt} = \Phi'(a_0) \delta a$$

which yields

$$\delta a = (\delta a)_0 e^{\Phi'(a_0) t}$$

Thus, we see that the given value of the amplitude is stable, i.e. it corresponds to a stable stationary oscillation, if

$$\Phi'(a_0) < 0 \quad (5.4)$$

and in the-opposite case when

$$\Phi'(a_0) > 0,$$

the corresponding stationary oscillation is obviously unstable.

In particular, since the value $a_0 = 0$, corresponding to the state of equilibrium (static regime), is always a root of the equation (5.2) (owing to formula (1.33)), the inequality

$$\Phi'(0) > 0$$

will represent the condition for self-excited oscillations.

Writing this in the expanded form

$$\varepsilon A'_1(0) + \varepsilon^2 A'_2(0) + \dots + \varepsilon^n A'_n(0) > 0$$

and leaving out the case when the function $A_1(a)$ has multiple roots, we see that, for sufficiently small values of ε (which is always explicitly or implicitly assumed), the question of self-excitation is decided by the sign of one term viz. $sA_1'(0)$, i.e. as if we were dealing with an equation of the first order approximation.

Further, in accordance with (5.2), the stationary amplitudes must satisfy the equation

$$A_1(a) + \varepsilon A_2(a) + \dots + \varepsilon^{n-1} A_n(a) = 0$$

Hence, leaving aside the above-mentioned case of multiple roots, we can expand a in a series in the powers of ε :

$$a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} + \dots \quad (5.5)$$

where $a^{(0)}$ is a root of the equation $A_1(a) = 0$ (stationary amplitude in the first approximation),

$$a^{(1)} = -\frac{A_2(a^{(0)})}{A_1'(a^{(0)})}, \dots$$

Since a given stationary regime will be stable or unstable according as

$$\varepsilon A_1'(a) + \varepsilon^2 A_2'(a) + \dots + \varepsilon^n A_n'(a) \leq 0$$

and since, owing to the relation

$$\varepsilon A_1'(a) + \varepsilon^2 A_2'(a) + \dots + \varepsilon^n A_n'(a) = \varepsilon A_1'(a^{(0)}) + \varepsilon^2 \dots,$$

derived from (5.5), the sign of the left side is determined, for a sufficiently small value of ε , by the sign of $\varepsilon A_1'(a^{(0)})$, we find that the question of stability of the stationary oscillations is decided (for ε sufficiently small) by the sign of $\varepsilon A_1'(a^{(0)})$, i.e. just as in the case of an equation of the first order approximation.

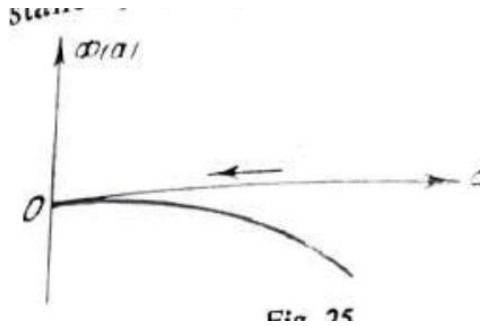


Fig. 25.

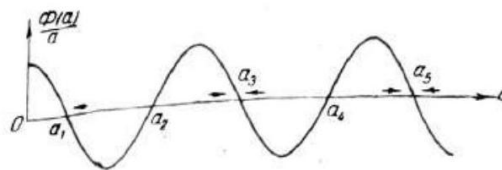


Fig. 27.

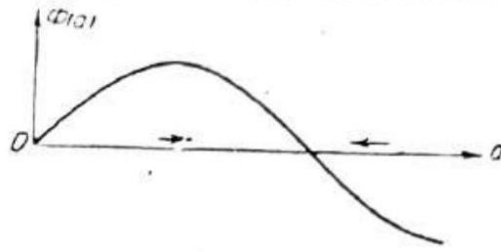


Fig. 26.

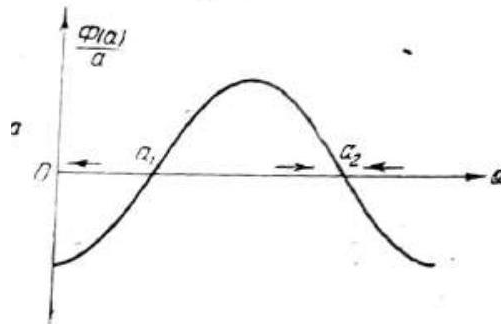


Fig. 28.

It should be emphasized that, except in certain special circumstances, the equations of the first order approximation lead to the same results as do the equations of the higher order approximations. Transition to the equations of higher order approximations usually introduces corrections only of a quantitative nature, for example, corrections in the value of the stationary amplitude, and so on.

We note that the condition of self-excitation of the oscillations is not essential for the existence of a stable stationary regime of oscillations. For this purpose it would, obviously, be sufficient if the equation of stationariness (5.2) had at least a non-zero root satisfying the condition (5.4).

For determining the character of the oscillating process, in many a case it would be convenient to examine diagrams of the type shown in Figs. 25-28, exhibiting the relation between $\Phi(a)$ and a , without undertaking any analytical investigation of the function $\Phi(a)$.

Here, stationary amplitudes are found at the points of intersection of the curve $\Phi(a)$ with the axis of the abscissa. It is not difficult to see that the points in which the curve intersects the axis Oa from the upper side correspond to the stable amplitudes of oscillations whereas the points in which the curve intersects the axis Oa from the lower side correspond to the unstable amplitudes.

Indeed, in the first case the infringement in the stationary amplitude brings about such a change in it that the amplitude increases its own stationary value. We have the opposite picture in the second case, The directions of the changes in a have been shown with arrows in Figs. 25-28. Fig. 25 refers to the dissipative case, Fig. 26 to the case of self-excitation with one possible stationary amplitude and Fig. 27 to self-excitation with several possible stationary amplitudes a_1, a_3, a_5 (oscillations with amplitudes a_2, a_4 are obviously unstable).

In general, if the function $\Phi(a)$ has a root a^* , satisfying the condition $\Phi'(a^*) < 0$, then there is a possibility for the existence of a stationary regime of oscillations with a constant amplitude equal to a^* . We note that the stationary amplitude of the self-excited oscillations

(i.e. the limit of the monotonically increasing amplitude of oscillations for which a^0 would be very small) is equal to the lowest of all possible stationary amplitudes. This also becomes clear from the self-evident physical consideration that the amplitude, while increasing, cannot skip over the stable root of the equation $\Phi(a) = 0$, i.e. over the root of this equation which satisfies the condition $\Phi'(a) < 0$.

Figure 28 depicts the case when the system is self-excited but the stationary oscillations are possible. In this case if the initial value of the amplitude a^0 is less than a_1 , the oscillations get damped and if it is greater than a_1 , the oscillations set in. In the limit they are converted into stationary oscillations with amplitude a_2 .

By way of example we shall examine the equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda_1 + \lambda_2x + \lambda_3x^2 + \lambda_4x^3 + \lambda_5x^4) \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (5.6)$$

that we come across in the theory of electron tube oscillators.

To ensure the application of the results already obtained by us to this equation, we assume that the perturbation term is extremely small. We may thus put

$$-(\lambda_1 + \lambda_2x + \lambda_3x^2 + \lambda_4x^3 + \lambda_5x^4) \frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

In this case we obtain

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi = \lambda_1 a\omega + \frac{\lambda_3 a^3 \omega}{4} + \frac{\lambda_5 a^5 \omega}{8},$$

and hence, with the help of (1.27), arrive at the following equation, of the first order approximation, for the amplitude :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{\lambda_3 a^3}{8} - \frac{\lambda_5 a^5}{16}.$$

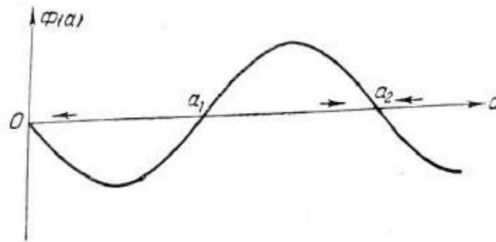


Fig. 29.

We note that if $\lambda_5 < 0$, the right-hand-side of this equation becomes positive for all sufficiently large values of a . Thus, in this case, oscillations with sufficiently large amplitude shoot up without limit, i.e. $a(t) \rightarrow \infty$ when $t \rightarrow \infty$; but this is obviously impossible on physical considerations. Hence, we assume that $\lambda_3 > 0$. We further note that the inequality $\lambda_1 < 0$ serves as a condition for self-excitation. Considering the case when self-excitation is absent, we put $\lambda_1 > 0$. By solving the equation

$$\frac{\lambda_1 a}{2} + \frac{\lambda_3 a^3}{8} + \frac{\lambda_5 a^5}{16} = 0, \quad (5.7)$$

we have, besides the 'static' solution $a = 0$,

$$a^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_5} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}.$$

Since $\lambda_1 > 0, \lambda_5 > 0$, we have that if $\lambda_3 > 0$ or if $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 < \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}$, equation (5.7) has no positive roots. The graph showing the dependence of $\frac{da}{dt}$ on a has the form represented in Fig. 25 which shows that oscillations of any amplitude would appear as damped ones.

Let us have on the other hand

$$\lambda_2 < 0, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 > \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}.$$

Then we would obtain two possible values for the amplitude of the stationary oscillations :

$$a_1 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}},$$

$$a_2 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}}.$$

The graph showing the dependence of $\frac{da}{dt}$ on a , in this case, has been given in Fig. 29. Evidently a_1 corresponds to the unstable and a_2 to the stable oscillations. Thus, oscillations with an initial amplitude less than a_1 will attenuate while those with an initial amplitude greater than a_1 will approach stable stationary regime.

We shall now examine a case where the oscillating system contains a parameter μ (or a group of parameters) that can be changed as slowly as we desire (adiabatically). In this case the right-hand-side of equation (5.1) will depend on μ and may be written in the form $\Phi(a, \mu)$.

We shall now discuss the change in the parameters which is so slow in comparison with the effective duration of the transition regime (i.e. in comparison with the time in the course of which any oscillation would remain practically stationary) that for each value of μ , during the course of such a change, an oscillation may be assumed to be stationary.

For definiteness we assume that for μ less than some particular value μ_0 ,

$$\Phi'_u(0, \mu) < 0,$$

and for μ , greater than this value

$$\Phi'_a(0, \mu) > 0$$

We shall now increase μ adiabatically, starting from some value μ_1 less than μ_0 .

Let us assume that in the beginning the system was in equilibrium with $a = 0$. In this case, since for $\mu < \mu_0$ the system is not self-excited, it remains in equilibrium until the parameter μ attains a critical value equal to μ_0 . Self-excitation appears when this critical value is exceeded. State of equilibrium becomes impossible and the amplitude a rises in value from zero to $a(\mu)$ which is equal to the least stable root of the equation

$$\Phi(a, \mu) = 0$$

Thus, the dependence of the amplitude on the parameter is represented in the form

$$a = 0 \quad \text{for } \mu < \mu_0$$

and

$$a = a(\mu) \quad \text{for } \mu > \mu_0$$

If the curve, thus obtained, for the dependence of a on μ is discontinuous we would say that we have here a case of excitation of soft

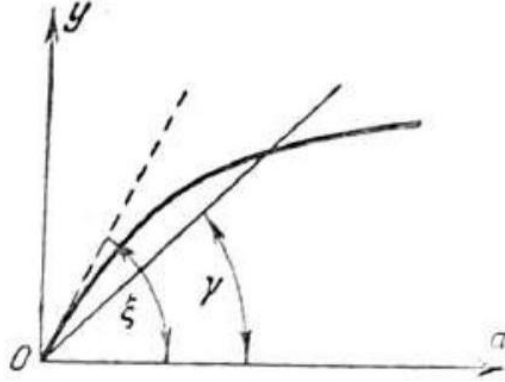


Fig. 30.

oscillations (in relation to the given parameter). In the case of soft oscillations, when the critical value $\mu = \mu_0$ is crossed, the system begins to generate oscillations whose amplitude gradually increases from zero to the neighbourhood of the critical value.

However, if there is a discontinuity at the point $\mu = \mu_0$, the amplitude, when it crosses the critical value, jumps at once from zero to the value $a(\mu_0 + 0)$. This case is called the case of excitation of hard oscillations.

Suppose, for example, that the right-hand-side of equation (5.1) has the form :

$$\Phi(a, \mu) = \left\{ \Phi(a) - \frac{a}{\mu} \right\} \Psi(a, \mu) \quad (5.8)$$

where $\Psi(a, \mu) > 0$ and $\Phi(a)$ is some function of a , independent of μ .

In this case the question of the nature of excitation may be solved with the help of the following graphical constructions.

We draw the curve (Fig. 30)

$$y = \Phi(a)$$

Here, the stationary amplitudes are defined by the points of intersection of this curve with straight lines of the form $y = \frac{1}{\mu}a$. Those amplitudes will be stable ones for which the angle of inclination of the straight line is greater than the angle of inclination of the tangent at the point of intersection. Thus, Fig. 30 represents a case of soft excitation because when μ crosses the critical value

$$\mu_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \xi} = \frac{1}{\Phi'(0)}$$

the amplitude begins to rise above zero. In Fig. 31 we have the case of hard excitation. Here, while crossing the critical value, the amplitude jumps from zero to a_1 .

We now examine the case represented in Fig. 31 in detail. Suppose we gradually increase the parameter μ from zero, thus diminishing

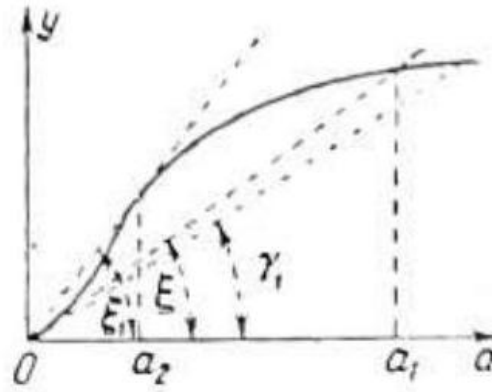


Fig. 31.

the angle of inclination γ of the straight line $y = \frac{1}{\mu} a$, and further suppose that the system is at rest ($a = 0$) in the beginning. Then, the ampli-

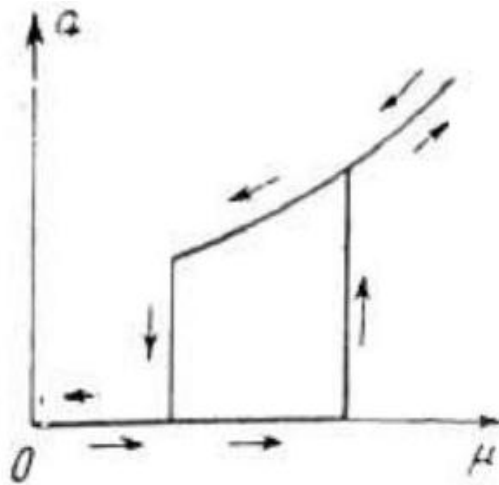


Fig. 32.

to ξ . After crossing ξ the amplitude attains the value a_1 by a jump and thereafter begins to increase continuously. If we now begin to reduce μ (increase γ), beginning from the value $\gamma_1 > \xi$, the amplitude will diminish from $\gamma = \xi_1$ to zero and the system will come to a state of rest. Representing graphically the dependence of a on μ during the course of this process, we get curves (Fig. 32) having the character of a hysteresis loop. The value of the stationary amplitude depends not only on the value of the parameter but also on the manner in which this parameter changes.

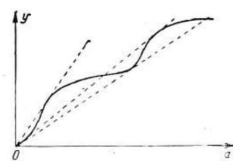


Fig. 33.

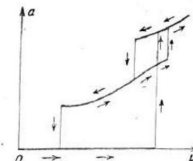


Fig. 34.

Phenomena of this kind are observed in certain autonomous oscillating systems and are called oscillation hysteresis or dragging out. This last name expresses the fact that in the case of an infinitely slow or, as is often said, adiabatic change, the parameters of the amplitude tend as if to drag on the uniform change, as far as possible, until when the continuous change leads to unstable amplitudes.

Hysteresis loops may also have a form more complex than that shown in Fig. 32. Thus, for instance, in the case exhibited in Fig. 33 we have a relation representing the variation of a with μ represented schematically in Fig. 34. For investigating into the nature of the

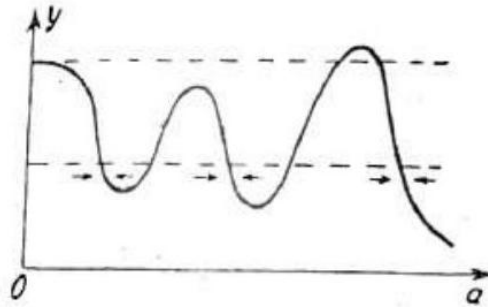


Fig. 35.

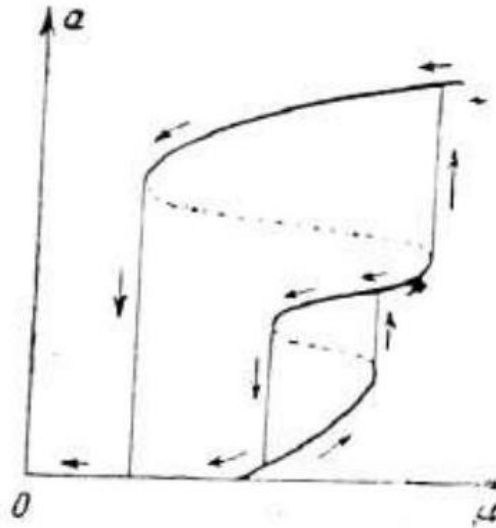


Fig. 36.

excitation of oscillations we can also use the following method which is essentially analogous to the one discussed above.

Let us construct the curve

$$y = \frac{\Phi(a)}{a} \quad (5.9)$$

In this case the stationary amplitudes are determined by the points of intersection of this curve with straight lines parallel to the a -axis :

$$y = \frac{1}{\mu}. \quad (5.10)$$

The condition of stability

$$\frac{\partial \Phi(a, \mu)}{\partial a} < 0$$

may be written in the form

$$\left. \frac{\partial \left\{ \frac{\Phi(a)}{a} - \frac{1}{a} \right\}}{\partial a} \right\} < 0, \quad (5.11)$$

whence a simple geometrical interpretation becomes possible. Amplitudes corresponding to those points of intersection of the curve (5.9) with the straight lines (5.10) will be the stable ones for which the direction of the curve is from above downwards (Fig. 35).

What has been said above applies to the stationary amplitudes which are not equal to zero. Except in this case there is always a stationary amplitude equal to zero. This will be unstable if

$$\left. \left\{ \frac{\Phi(a)}{a} \right\} \right|_{a=0} > \frac{1}{\mu}, \quad (5.12)$$

i.e. if the point of intersection of the curve (5.9) with the axis $a = 0$ lies above the point of intersection of this axis with the straight line (5.10). In the opposite case, the equilibrium is stable.

As we see, this last graphical method is more suitable than the first one because in this case we need not draw tangents. In other respects, however, arguments remain the same and hence there is no necessity for further details.

Fig. 36 represents schematically a picture of the oscillation hysteresis corresponding to the case represented in Fig. 35.

As the simplest example, we will examine the equation of an electronic oscillator tube (when time is made dimensionless) :

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL)f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Here, V is the variable component of the control voltage; L, C and R are respectively self-inductance, capacitance and resistance of the oscillating circuit, M the coefficient of mutual inductance between the grid circuit and the oscillating circuit, E_0 the constant component of the control voltage and D the penetration factor of the tube

In view of the fact that for an ordinary constructed tube the dimensionless expression

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{1}{R} - (M - DL)f'(E_0 + V) \right\} \quad (5.14)$$

is a quantity of the order 0.01, we can make use of the previously introduced formulae for constructing an approximate solution. By using (1.23), (1.24) and (1.27), we have in the first approximation

$$V = a \cos(t + \varphi), \quad (5.15)$$

and in this case

$$2\sqrt{LC} \frac{da}{dt} = -\frac{L}{R}a + (M - DL)F(a), \quad (5.16)$$

where $F(a) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cdot \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau =$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \tau) \sin \tau d\tau. \quad (5.17)$$

The nature of excitation of the oscillations, expressed by equation (5.16), may be investigated by the following two graphical methods in accordance with the above considerations:

I) by constructing the curve

$$y = F(a),$$

the so-called oscillation characteristic of the tube, where the stationary amplitudes will be determined by the points of intersection of this curve with straight lines

$$y = \frac{L}{(M - DL)R}a, \quad \text{or else}$$

2. by constructing the curve

$$y = \frac{F(a)}{a}$$

and examining its intersections with the straight lines

$$y = \frac{L}{(M - DL)R},$$

parallel to the axis $y = 0$.

We observe by the way that the geometrical slope of the tangent to the characteristic of the tube, i.e. $f'(E)$, is called the steepness of the characteristic in the usual parlance of the radio engineering.

Since

$$\frac{F(a)}{a} = \frac{1}{-} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau = f'(E_0 + a \cos \theta)$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

the expression $\frac{F(a)}{a}$, may be called the average steepness of the tube characteristic.

Hence, the first graphical method is sometimes called the method of oscillating characteristic and the second the method of average steepness.

In the above example, the parameter $\% = \frac{(M-DL)R}{L}$.

In the present section we have examined in detail the first of the system of equations (1.3), expressing the dependence of amplitude on time and thus the characteristic property of the oscillation process from the point of view of its amplitude.

The second of the system of equations (1.3) will characterize on its part the frequency details of the oscillations. According to this equation the instantaneous natural frequency of oscillations $\frac{d\psi}{dt}$ is equal to $\omega(a)$. Hence in the case of stationary oscillations $\omega(a)$, which will remain constant, will be the usual natural frequency. It is easy to see that the natural frequency $\omega(a)$, and hence even the period $T = \frac{2\pi}{\omega(a)}$ of the stationary oscillations, will depend on the amplitude. Thus, generally speaking, non-linear oscillating systems are not isochronous.

As we saw before, in certain important special cases a non-linear oscillating system may be isochronous in the first approximation.

10.2.6 6. Development of Stationary Solutions

In the preceding paragraphs we have given a method of constructing approximate solutions for equations of the form (1.1). Here, the first and higher order approximations for different special cases of equation (1.1) have been developed and calculations for certain concrete examples made. As we found above, in all cases the solution of a non-linear differential equation of the form (1.1) is replaced by the solution of two equations of the first order defining the amplitude and the phase of the oscillation.

Thus, in order to construct an approximate solution with a previously given order of accuracy, we have to construct equations of the form (1.5) and thereafter derive from them expressions for the amplitude and the phase as functions of time.

For determining the approximate solutions corresponding to the steady states in an oscillating system (stationary oscillations) it is necessary to equate the right-hand-side of equation (5.1) to zero because in steady state the amplitude remains constant and consequently its derivative is zero. However, for constructing directly the approximate solutions corresponding to stationary oscillations, we can point out a method much simpler than the one discussed above.

We shall first examine the equation of a conservative oscillating system (2.1) which may be written in the form

$$\begin{aligned} d^2x \\ dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(x) \end{aligned} \quad (6.1)$$

According to the results arrived at in 2, the stationary solution of this equation has, in the second approximation, the form :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{n \neq 1}^{\infty} f_n(a) \cos n(\omega t + \varphi) \\ n^2 - 1 \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega^2 - \varepsilon \frac{f_1(a)}{a} + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

where $f_n(a)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) are the Fourier coefficients in the expansion

$$\left. \begin{aligned} f(a \cos \psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n'_\psi \\ f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos n'_\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

a and φ being the constants of integration, denoting the initial values.

With the help of expressions (6.2), suited for deriving higher order approximations corresponding to the stationary regime, we will employ the following method.

We write the solution of equation (6.1) in the form $x = z(\bar{\omega}t + \varphi)$ where $z(\bar{\omega}t + \varphi)$ is a periodic function of $\bar{\omega}t + \varphi$ with a period equal to 2π .

We note that $x = z(\bar{\omega}t + \varphi)$ will satisfy equation (6.1) only when $z(\bar{\omega}t + \varphi)$ satisfies the equation

$$\overline{\omega^2} \frac{d^2 z}{d\psi^2} + \overline{\omega^2} z = \varepsilon f(z) \quad (6.4)$$

It is natural to seek the solution of equation (6.4) $z = z(\)$, with $\psi = \bar{\omega}t + \varphi$, as well as an expression for the oscillation frequency $\bar{\omega}$ in the form of expansions

$$z(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\psi), \quad (6.5)$$

$$\overline{\omega^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n. \quad (6.6)$$

We determine the coefficients in these expansions by substituting (6.5) and (6.6) into (6.4) and equating the coefficients of like powers of the small parameter ε , provided that $z_n(\psi)$ is taken to be a periodic function ψ with a period 2π .

Making the substitutions, we get the following equations :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2} + \omega^2 z_0 &= 0 \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\Psi^2} + \omega^2 z_1 &= f(z_0) - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2} \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\Psi^2} + \omega^2 z_2 &= f'(z_0) z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\Psi^2} \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_3}{d\Psi^2} + \omega^2 z_3 &= f''(z_0) z_2 + \frac{1}{2} f''(z_0) z_1^2 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2} - \\ &\quad - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\Psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\Psi^2} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Determining the functions $z_0, z_1, z_2, \dots, z_N$, as well as the quantities $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, from the first $(N+1)$ equations of the system (6.7), we can form the expression

$$x = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n z_n(\bar{\omega}t + \varphi), \quad (6.8)$$

where

$$\overline{\omega^2} = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \alpha_n.$$

This expression will satisfy equation (6.1) upto an accuracy of the order ε^{N+1} and, hence, it may be looked upon as the $(N+1)$ -th approximation for the solution of equation (6.1) corresponding to the stationary oscillations. However, the functions $z_n(\bar{\omega}t + \varphi)$ and the quantities $\alpha_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ may not, in general, be determinable from equations (6.7) uniquely. In order that these quantities be uniquely determined, we have to impose certain further conditions.

We require that $z_n(\psi) (n = 1, 2, 3, \dots)$ do not contain the fundamental harmonic of the argument ψ . From the first of the equations (6.7) we have

$$z_0(\psi) = a \cos \psi, \quad \alpha_0 = \omega^2. \quad (6.9)$$

Putting (6.9) into the second of equations (6.7), we have

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = f(a \cos \psi) + \alpha_1 a \cos \psi \quad (6.10)$$

or, remembering (6.3), we have

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} f_n(a) \cos n\psi + (\alpha_1 a + f_1(a)) \cos \psi. \quad (6.11)$$

In view of the requirement of periodicity for the function $z_1(\psi)$, we equate to zero the coefficient of the first harmonic of the argument ψ on the right-hand-side of equation (6.11). We thus get an equation for determining the value of α_1 :

$$\alpha_1 a + f_1(a) = 0$$

whence

$$\alpha_1 = \frac{-f_1(a)}{a}.$$

Putting this value of α_1 into the right-hand-side of equation (6.11), we have

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} f_n(a) \cos n\psi \quad (6.12)$$

whence, for $z_1(\psi)$, we get the expression

$$z_1(\psi) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n\psi}{1 - n^2} \quad (6.13)$$

Here, not only the expression (6.13), but also the expression for x_1 coincides with the one derived by the general method.

Reiterating the process mentioned above, we can find all the functions $z_1, z_2, z_3, \dots$ and the quantities $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ in succession upto any desired index whatsoever and thus form approximate solutions which satisfy the given equation (6.1) with an accuracy upto any order in ε .

As an example, we shall find the stationary solution, to the third approximation (i.e. with an accuracy upto order ε^3 inclusive), for the oscillating system described by an equation of the form :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (6.14)$$

For determining the functions z_0, z_1, z_2, z_3 and the quantities $\tau_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ we obtain the following equations from the system (6.7):

$$\alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2} + z_0 = 0,$$

$$\alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\Psi^2} + z_1 = -z_0^3 - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\Psi^2},$$

$$\alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\mathcal{U}^2} + z_2 = -3z_0^2 z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\mathcal{U}^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2},$$

$$\alpha_0 \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 = -3z_0^2 z_2 - 3z_1 z_0 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2}.$$

We obtain from the first equation

$$z_0(\psi) = a \cos \psi, \quad \alpha_0 = 1. \quad (6.16)$$

The second equation, with the help of this, may be written as

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -a^3 \cos^3 \psi + \alpha_1 a \cos \psi \quad (6.17)$$

or

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -\frac{a^3}{4} \cos 3\psi + \left(\alpha_1 a - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos \psi, \quad (6.18)$$

whence we have

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4} a^2, \\ z_1(\psi) &= \frac{a^3}{32} \cos 3\psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Putting (6.16) and (6.19) into the third equation of the system (6.15), we obtain

$$d^2 z_2 / d\psi^2 + z_2 = -\frac{3a^5}{32} \cos^2 \psi \cos 3\psi + \frac{27}{128} a^5 \cos 3\psi + \alpha_2 a \cos \psi \quad (6.20)$$

01

$$\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = \frac{21}{128} a^5 \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128} \cos 5\psi + \left(\alpha_2 a - \frac{3a^5}{128} \right) \cos \psi, \quad (6.21)$$

whence we arrive at

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{3a^4}{128} \\ z_2(\psi) &= -\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\psi + \frac{a^5}{1024} \cos 5\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

With the help of these equations the last equation of the system (6.15) may be written in the form

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 &= -3a^2 \cos^2 \psi \left(-\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\psi + \frac{a^5}{1024} \cos 5\psi \right) - \\ &- 3 \frac{a^6}{1024} \cos^2 3\psi a \cos \psi + \alpha_3 a \cos \psi + \frac{3a^4}{128} \frac{9a^3}{32} \cos 3\psi - \\ &- \frac{3}{4} a^2 \left(\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\psi - \frac{a^5}{1024} \cos 5\psi \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

or

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 &= -\frac{1059a^7}{2048} \cos 3\psi + \frac{177}{2048} a^7 \cos 5\psi - \\ &- \frac{3}{2048} a^7 \cos 7\psi + \left(\alpha_3 a + \frac{57}{4096} a^7 \right) \cos \psi \end{aligned} \quad (6.24)$$

From this equation we obtain

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= -\frac{57}{4096} a^6 \\ z_3(\psi) &= \frac{1059}{2048.8} a^7 \cos 3\psi - \frac{177}{2048.24} a^7 \cos 5\psi + \\ &+ \frac{3}{2048.48} a^7 \cos 7\psi \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Thus, using (6.8), (6.19), (6.22) and (6.25), we obtain the approximate stationary solution of equation (6.14) with an accuracy of the order ε^3 (inclusive) :

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\bar{\omega}t + \varphi) + \varepsilon a^3 \left[\frac{1-\varepsilon}{32} \frac{21}{a^2 + \varepsilon^2} \frac{1059}{512} a^1 \right] \cos 3(\bar{\omega}t + \varphi) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{a^5}{1024} \left[\frac{1-\varepsilon}{48} \frac{177}{a^2} \right] \cos 5(\bar{\omega}t + \varphi) + \varepsilon^3 \\ &+ \frac{3a^7}{2048.48} \cos 7(\bar{\omega}t + \varphi), \end{aligned} \quad (6.26)$$

where a and ρ are arbitrary constants and the frequency of oscillation (1) is determined by the equation

$$\bar{\omega}^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 + \frac{3}{128} \varepsilon^2 a^4 - \frac{57}{4096} \varepsilon^3 a^6 \quad (6.27)$$

We now proceed on to form the approximate solutions for the stationary oscillations in non-conservative systems. For this purpose we examine an equation of the form (1.1) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (6.28)$$

The stationary solution (to the first approximation) of this equation may be written, according to 2 , in the form

$$x = a \cos \psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1} \quad (6.29)$$

where $g_n(a)$ and $h_n(a)$ ($n = 0, 2, 3, \dots$) are determined from formulae (1.29), $\psi = \bar{\omega}(a)t + \rho$, while a and $\omega(a)$ would be obtained from the equations

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= 0 \\ \bar{\omega}(a) &= \omega + \varepsilon B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

$A_1(a)$ and $B_1(a)$ are determined here by formulae (1.27).

For conservative oscillating systems, as we found earlier, $A_1(a)$ is identically zero and hence the expression for the approximate stationary solution (6.29) depends on two arbitrary constants a and φ .

Now we examine a case where $A_1(a)$ does not identically vanish in any interval of the values of a . We always assume that the function $A_1(a)$ has only simple roots. In this case, to each root of $A_1(a)$ there corresponds some stationary state, the expression (6.29) for this stationary state depending only on one arbitrary constant, viz. φ .

For working out a formal methodology for constructing the stationary solutions of equations (1.1) we shall mainly use the method applied earlier to the case of conservative oscillating systems. We present the solution of equation (6.28), corresponding to stationary oscillations, in the form

$$x = z(\bar{\omega}t + \varphi) \quad (6.31)$$

where φ is an arbitrary constant, $\bar{\omega}$ the frequency of oscillation and $z(\cdot)$ the periodic function of ψ with period 2π .

As before, the function $z(\psi)$ must satisfy the equation

$$\bar{\omega}^2 \frac{d^2z}{d\psi^2} + \omega^2 z = \varepsilon f\left(z, \bar{\omega} \frac{dz}{d\psi}\right) \quad (6.32)$$

We shall now seek the function $z(\psi)$ and the frequency of oscillation $\bar{\omega}$ in the form of expansions

$$\left. \begin{aligned} z(\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\psi), \\ \bar{\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

where $z_n(\psi)$ is a periodic function of ψ with period 2π .

Putting the values of $z(\psi)$ and $\bar{\omega}$, (6.33), into equation (6.32) and equating the coefficients of like powers of ε , we obtain the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \omega^2 z_0 &= 0 \\ \omega_0^2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + \omega^2 z_1 &= f\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) - 2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} \\ \omega_0^2 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + \omega^2 z_2 &= f'_z\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) z_1 + f_{z^2}\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) \omega_0 \frac{dz_1}{d\psi} + \\ &+ f_{z^2}\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) \omega_1 \frac{dz_0}{d\psi} - 2\omega_0 \omega_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - 2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \omega_1^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

We solve the first of these equations, assuming

$$z_0 = a \cos \psi, \quad \omega_0 = \omega \quad (6.35)$$

where a is a constant yet undetermined.

Putting the values of $z_0(\psi)$ and ω_0 , (6.35), into the right-hand-side of the second equation of the system (6.34) and taking into account (1.16), we have

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] + 2\omega\omega_1 a \cos \psi.$$

In order that this equation may have a periodic solution for $z_1(\psi)$ (so that the expression for $z_1(\psi)$ does not contain secular terms), it is necessary to equate to zero the coefficients of the fundamental harmonic appearing on the right-hand-side of (6.36).

Thus, we obtain the equations

$$\left. \begin{aligned} h_n(a) &= A_1(a) = 0 \\ \omega_1 &= -\frac{g_1(a)}{2a\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

which determine a and ω_1 .

Equation (6.36) then assumes the form

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi]. \quad (6.38)$$

Solving this, we get

$$z_1(\psi) = a_1 \cos \psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1 - n^2}, \quad (6.39)$$

where a_1 is an arbitrary constant that must be determined from the condition of periodicity of $z_2(\psi)$.

Now we shall show how a_1 can be determined. For this purpose we write the expression for $z_1(\psi)$ in the form

$$z_1(\psi) = a_1 \cos \psi + u(a, \psi), \quad (6.40)$$

where

$$u(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1 - n^2}$$

is an already known periodic function of ψ .

Substituting the value of $z_1(\psi)$, given by (6.40), into the third equation of the system (6.34), we get

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) &= f'_t(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) a_1 \cos \psi - \\
 &- f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) a_1 \omega \sin \psi + 2\omega \omega_1 a_1 \cos \psi + \\
 &+ 2\omega \omega_2 a \cos \psi + v(\psi),
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

where

$$\begin{aligned}
 v(\psi) &= f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u + f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \frac{du}{d-} + \\
 &+ f'_{z''}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega_1 a \sin \psi + \omega_1^2 a \cos \psi.
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

We write the Fourier expansion of $v(\psi)$:

$$v(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a) \cos n'\psi + w_n(a) \sin n'\psi]. \tag{6.43}$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned}
 f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi - f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega \sin \psi &= \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a) \cos n\psi + h'_n(a) \sin n\psi]'
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

and hence equation (6.41) may be written in the form

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) &= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a) \cos n\psi + h'_n(a) \sin n\psi] + \\
 &+ 2\omega (\omega_1 a_1 + \omega_2 a) \cos \psi + \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi].
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

In order that $z_2(\psi)$ may appear as a periodic function, it is necessary to equate to zero the coefficients of $\cos \psi$ and $\sin \psi$ in the right-handside of equation (6.45). Thus, we obtain

$$\left. \begin{aligned} a_1 h'_n(a) &= -w_1(a) \\ a_1 g'_1(a) + 2\omega (\omega_1 a_1 + \omega_2 a) &= -v_1(a) \end{aligned} \right\} \tag{6.46}$$

The first of these equations determines a_1 :

$$a_1 = -\frac{w_1(a)}{h'_1(a)} \tag{6.47}$$

where $h'_1(a) - A'_1(a) \neq 0$, because, according to our assumptions, the function $A_1(a)$ has only simple roots.

From the second of these equations we obtain ω_2 :

$$\omega_2 = -\frac{1}{a} \left[\frac{v_1(a) + a_1 g'_1(a)}{2\omega} + \omega_1 a_1 \right]. \tag{6.48}$$

Hence, equation (6.45) may be written in the form

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) &= \{v_0(a) + a_1 g'_0(a)\} + \sum_{n=2}^{\infty} \{(v_n(a) + a_1 g'_n(a)) \cos n\psi + \\
 &+ (w_n(a) + a_1 h'_n(a)) \sin n\psi\}
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

This will have the solution

$$z_2(\psi) = a_2 \cos \psi + \frac{1}{\omega^2} \{v_0(a)a_1g'_0(a)\} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \{(v_n(a) + a_1g'_n(a)) \cos n\psi + (w_n(a) + a_1h'_n(a)) \sin n\psi\} \frac{1}{1-n^2} \quad (6.50)$$

where a_2 is an undetermined constant which we shall determine from the condition of periodicity of the function $z_3(\psi)$, etc. Continuing this process, we can construct the approximate solutions for the stationary regime with any desired degree of accuracy. For example, with the help of (6.31), (6.39) and (6.37) we have, in the second approximation,

$$x = (a + \varepsilon a_1) \cos(\bar{\omega}t + \varphi) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} g_0(a) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n(\bar{\omega}t + \varphi) + h_n(a) \sin n(\bar{\omega}t + \varphi)}{1 - n^2}, \quad (6.51)$$

where

$$\bar{\omega} = \omega + \varepsilon \frac{g_1(a)}{2\omega a}, \quad (6.52)$$

and the amplitude is to be determined from the equation

$$h_n(a) = 0. \quad (6.53)$$

Comparing the expression for x in the form (6.51) with the expression for the stationary regime (6.29), we note that the only difference between the two is that whereas the amplitude of the first harmonic in (6.29) is a , the root of the first of the equations (6.30), the value of this amplitude in (6.51) is $a + \varepsilon a_1$. However, this difference is in full accordance with the remarks made in this respect in 1.

10.2.7 7. Equivalent Linearization of Non-linear Oscillating Systems

We have shown above that the equations of the first order approximation lead, in a majority of cases, to the same qualitative results as are obtained from the equations of higher order approximations.

In view of this, as well as the complexity of calculations connected, as a rule, with equations of the higher order approximation it is usually expedient to limit our discussion to equations of the first order approximation only. These equations are amenable to a very simple physical interpretation and may be constructed without forming first the original exact differential equation, say, of the type (1.1).

In the present section we shall deal with the question of interpretation of the equations of the first order approximation.

For this purpose we write down the fundamental differential equation of an oscillating system in the form :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = sf \left(x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (7.1)$$

where m and k are both positive.

As it has already been shown, the solution of equation (7.1), in the first approximation, may be expressed in the form

$$x = a \cos \psi, \quad (7.2)$$

where the amplitude a and the phase ψ must satisfy the equations :

$$\left. \begin{aligned} da &= -\frac{z}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ dt &= \omega_e(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

in which

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

and

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

We linearize the given oscillating system by replacing in the main equation (7.1) the non-linear term (7.10) by the linear one (7.11), where

$$\left. \begin{aligned} k_r(a) &= \frac{\varepsilon}{-a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ k_1(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

We obtain the damping decrement $\delta_e(a)$ and the frequency of the natural oscillations $\omega_e(a)$, in place of the coefficient of damping $\lambda_e(a)$ and the coefficient of elasticity $k_e(a) = k + k_1(a)$ of the equivalent linear system with mass m , in the usual way by leaving out the quantities of the second order. Thus, we obtain

$$\delta_e(a) = \lambda_e(a)/2m, \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m} \quad (7.13)$$

After obtaining expressions for the damping decrement and the frequency, we use the generally acknowledged formulae for the linear oscillating systems

$$\frac{da}{dt} = -\delta a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (7.14)$$

These formulae express the fact that the damping decrement is the logarithmic derivative of the amplitude with negative sign and that the frequency ω is the angular velocity of rotation of the full phase of the oscillation.

If we substitute the values of δ and ω in terms of formulae (7.13) and (7.4) in equation (7.14), we obtain equations which coincide with those of the first order approximation (7.3) derived earlier.

The formal method discussed here for the construction of equations of the first order approximation will be called the method of linearization.

While using this method we are confronted with the physical problem as to why in the process of linearization or, to be precise, in replacing the non-linear term (7.10) by the equivalent linear one (7.11), the coefficients $k_1(a)$ and $\lambda_e(a)$ must take up exactly those values that are given by formulae (7.12) and not any other values. It is, therefore, necessary to solve the question of the physical interpretation of these formulac.

First of all we shall show that we obtain the values of the equivalent coefficient of damping, corresponding to (7.12), by assuming that the average (over a period of oscillation) powers developed by the real force (7.10) and the equivalent force (7.11) are equal. Here, while equating the expressions for the two powers we should neglect the quantities of the order of ε^2 because the equations of the first order approximation are correct only upto this order of magnitude.

Since the net work done by the force, $k_e(a)x$, being proportional to the displacement, is zero during one period of oscillation, we obtain by equating the capacities developed by the forces (7.10) and (7.11)

$$\varepsilon \int_0^T f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} dt = -\lambda_e(a) \int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \quad (7.15)$$

Here T is the period of oscillation. It also follows from (7.15) that $\lambda_e(a)$ must be a quantity of the first order. But we can, with an accuracy of the order ε and for the duration of an interval of time of the order $\frac{2\pi}{\omega}$, make the substitutions:

$$x = a \cos(\omega t + \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \theta) \quad (7.16)$$

where a and θ are constant during this interval. In this approximation, ω is the angular frequency of the oscillations and $T = \frac{2\pi}{\omega}$ is the period.

Substituting expressions (7.16) and $T = \frac{2\pi}{\omega}$ in formula (7.15), we have, with an accuracy of the second order (because on both the sides of (7.15) there are multipliers which are of the first order, namely z and $\lambda_e(a)$),

$$\begin{aligned} & -z\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)] a \sin(\omega t - \vartheta) dt \\ & = -\lambda_c(a) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \vartheta) dt = -\lambda_\theta(a) a^2 \pi \omega \end{aligned} \quad (7.17)$$

or

$$\lambda_e(a) \pi \omega a^2 = \varepsilon a \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a(\omega) \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

Hence, we have exactly the same value of the coefficient $\lambda_e(a)$ which is determined by formula (7.12).

In order to have a similar interpretation for the other coefficient also, we shall use for $k_1(a)$ the accepted concept of electro-technique viz, the reactive power. Let us recapitulate what is called reactive power. Suppose an alternating current $i(t)$ flows through a conductor AB and that $E(t)$ is the potential difference between the ends of the conductor. In this case the active power P_a , released or absorbed (according to sign) in the given conductor, is the amount of work done during a period of oscillation T divided by T , i.e.

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i(t) dt \quad (7.18)$$

As we see that the concept of the active power corresponds fully to the usual concept of average mechanical power and as it is related to the concept of work or energy, it has a completely real physical significance. However, an artificial concept of reactive power, besides the concept of active power having direct physical significance, is introduced for discussion in electro-technique.

The quantity

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i^*(t) dt \quad (7.19)$$

is called the reactive power. In this expression $i^*(t)$ represents a current of the same form as $i(t)$ but lagging behind it in phase by 90° , in other words

$$i^*(t) = i \left(t - \frac{T}{4} \right)^* \quad (7.20)$$

In view of the obvious and direct analogy between mechanical and electrical oscillations it is expedient to use the concept of reactive power for mechanical oscillations also.

We assume, for instance, that there is a body subject to the action of a force $F(t)$ and performing periodic oscillations. Let T be the period of oscillations and $x(t)$ the displacement. Since in the given case the active power is the average mechanical power

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t)x'(t)dt \quad (7.21)$$

we can, in analogy with what was done earlier, call the expression of the form

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t)x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \quad (7.22)$$

the reactive power.

Accepting this definition and turning to the question of interpreting the value (7.12) of the equivalent coefficient $k_1(a)$, we shall show that we would have got exactly the same value had we postulated, in the beginning, the equality of the reactive powers (here also with an accuracy of the order ε^2) developed by the real and the equivalent forces. Indeed, equating the expressions for the two reactive powers, we have

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \\ = -\frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_c(a)x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \end{aligned} \quad (7.23)$$

Since $\lambda_e(a)$ is a quantity of the first order, it is evident that $k_1(a)$ would be of the same order as ε . Hence, putting into the expression for the reactive powers the formulae

$$x = a \cos(\omega t + \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \theta), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(which are correct upto the first order) we have, upto the required accuracy,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \\ &= \frac{a\omega s}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \\ &\frac{1}{T} \int_0^T (k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a^2\omega k_1(a)}{2} \end{aligned}$$

whence, with the help of (7.23), we have

$$k_1(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

i. e. the same expression as in formula (7.12).

Thus, we conclude that while using the method of linearization, the parameters (equivalent coefficients) of the equivalent linear force

$$F_e = - \left[k_1(a)x + \lambda_e(a), \frac{dx}{dt} \right] \quad (7.24)$$

which replaces the non-linear force

$$F = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (7.25)$$

may be determined by equating to one another the expressions for the active and the reactive powers developed by force, (7.24) and (7.25) during harmonic oscillations

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta)$$

where ω is the frequency in the 'zeroth' approximation.

We shall call this method of determination of the equivalent coefficients as the principle of power or the principle of power balance.

We shall give a further simple method for the determination of the equivalent coefficients. In this method we put the values of x and $\frac{dx}{dt}$, according to formulae (7.16), into expressions (7.24) and (7.25).

For the harmonic oscillation (7.16) the linear equivalent force F , will also be a harmonic function of time with frequency ω . Denoting the amplitude and the phase of F_e by J_e and φ_e respectively, we have

$$F_e = J_e \cos(\omega t + \varphi_e) \quad (7.26)$$

The non-linear force will, in general, be a periodic function of time consisting of various harmonics with frequencies of the type $n\omega$, where $n = 1, 2, \dots$

Suppose that

$$J \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.27)$$

is its fundamental harmonic. In this case, equating the amplitudes and the phases of the equivalent force (7.26) and the basic harmonic of the non-linear force (7.27), we obtain two equations

$$J_\theta = J; \quad \varphi_\theta = \varphi$$

which yield exactly the same values of the parameters $k_1(a)$ and $\lambda_0(a)$ as do the formulae (7.12).

Indeed, in a harmonic oscillation the equivalent linear force, in its explicit form, will be given by

$$-k_1(a)a \cos(\omega t + \vartheta) + \omega \lambda_e(a)a \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.28)$$

and the fundamental harmonic of the non-linear force by

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \right\} \cos(\omega t + \theta) + \\ & + \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \right\} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Equating the two harmonics (7.28) and (7.29) (practically it is simpler not to equate the amplitudes and the phases but the corresponding coefficients of sines and cosines in the expressions for the first harmonics), we obtain

$$\left. \begin{aligned} ak_1(a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \\ \cos r_e(a)a &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

whence, for $k_1(a)$ and $i_e(a)$, we obtain the same values as we get from the formulae (7.12).

This last method will be called the principle of harmonic balance.

It is not difficult to establish that the principles of power balance and harmonic balance are essentially and completely equivalent. We have simply to note that the expressions for power

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t)x'(t)dt \text{ and } \frac{1}{T} \int_0^T F(t)x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt$$

developed by a periodic (with a period $T = \frac{2\pi}{\omega}$) force $F(t)$, depend only on the fundamental harmonic of $F(t)$ in the harmonic oscillations

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta)$$

Thus, if the fundamental harmonics (harmonics with frequency ω) of the given forces are equal, the powers developed by them during harmonic oscillations (frequency ω) are also equal and vice versa.

This circumstance serves as a condition for the essential equivalence between the two aforementioned principles for determining the parameters of an equivalent linear system in the method of linearization (the principle of harmonic balance and the principle of power balance).

Now we note that it is necessary to form first the differential equation of the oscillations and only then one could linearize the nonlinear expressions appearing in it.

In many cases, particularly for more or less complex oscillation systems, it may appear more convenient, instead of first forming the differential equation, to proceed directly from the pattern of the oscillating system, replacing the non-linear elements in it by the equivalent linear ones (say, through the principle of harmonic balance) and then derive the expressions for the frequency of $\omega_e(a)$ and the decrement δ_a (a) with the help of the well-known classical formulae of the theory of linear oscillations.

The basic condition for the applicability of such a method of equivalent linearization is the approximate harmonic character of the oscillations.



Fig. 37.

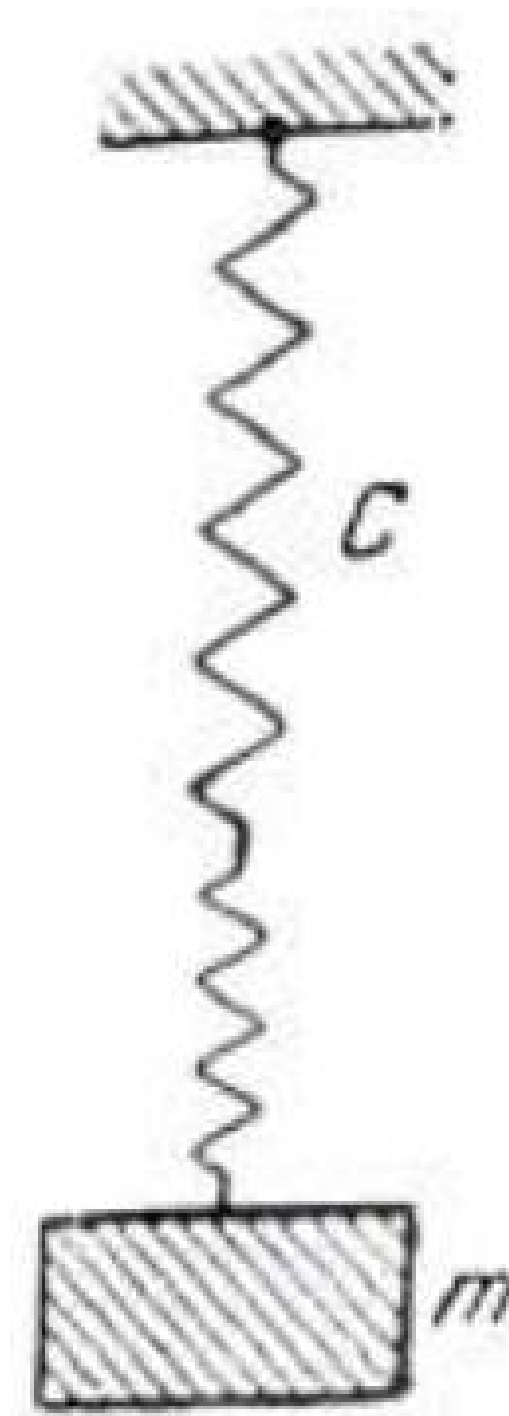


Fig. 38.

As an example, we consider a body of mass m , suspended from a spring and performing approximately harmonic oscillations (Fig. 37). Let the relation between the elastic force F of the spring and its displacement x be expressed by the equation

$$F = f(x) \quad (7.31)$$

In this case, for harmonic oscillations

$$x = a \cos(\omega t + 0),$$

the fundamental harmonic of the elastic force will be

$$\cos(\omega t + \theta) \int_{\pi}^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Employing the foregoing principle of harmonic balance, we may replace the real non-linear spring with an equivalent linear one with a coefficient of elasticity

$$k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (7.32)$$

and thereafter obtain the frequency of the linearized system by wellknown formulae such as

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e}{m}(a)} \quad (7.33)$$

If the given oscillating system, consisting of a body of mass m and a non-linear spring, is suspended from a linear spring with an elasticity coefficient c (Fig. 38), we can obtain, employing the principle of harmonic balance and assuming the oscillations to be approximately harmonic, the following formula for the frequency of oscillations

$$\omega_e(a) = \gamma_m^{c+k(a)}, \quad (7.34)$$

or, with an accuracy of the first order,

$$\omega_s(a) = \sqrt{\frac{c}{m}} \left(1 + \frac{1k(a)}{2} c \right) \quad (7.35)$$

We now assume that our oscillating system experiences during its oscillations a weak damping influence of a non-linear nature which depends only on the velocity :

$$\Phi = \Phi \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (7.36)$$

In this case, assuming that the oscillations are nearly harmonic in their character, we obtain for the fundamental harmonic of the damping force the expression

$$\sin(\omega t + 0) \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

By the principle of harmonic balance this real force may be replaced by an equivalent linear damping force

$$\Phi_e = \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}$$

where the coefficient of friction is expressed by the formula

$$\lambda_\varphi(a) = -\frac{1}{a\omega\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (7.37)$$

whence we can derive, by the well known formulae, an expression for the damping decrement

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m} \quad (7.38)$$

We note that the existence of friction does not exhibit any influence on the

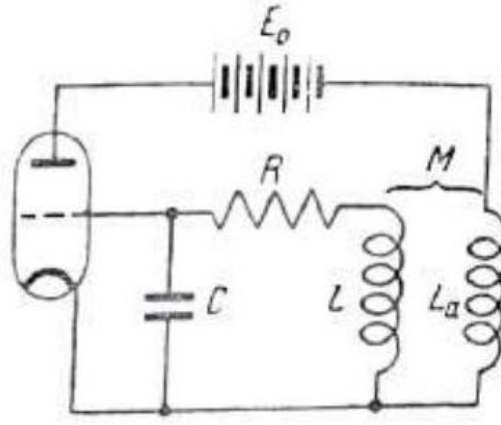


Fig. 39.

frequency of the oscillations at the level of accuracy presumed by us, because $\left(\frac{\lambda_e(a)}{\sqrt{cm}}\right)^2$ is a quantity of the second order.

As a second example we consider an electronic oscillator set up according to the scheme shown in Fig. 39. Suppose that the resistance connected in series is sufficiently small. Then the oscillating system, located in the grid circuit according to this scheme, is an underdamped one.

Denoting the current in the oscillating system by i , we have

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{di_n}{dt} \quad (7.39)$$

where i_a is the anode current which depends on the control potential E (when there is no grid current) :

$$i_a = f(E) \quad (7.40)$$

The control potential in an electronic oscillator is made up of a constant potential E_0 and a variable potential e induced by the oscillating circuit.

Thus the relation between the anode current and the variable component of the control potential will be

$$i_a = f(E_0 + e) \quad (7.41)$$

If e varies according to the law

$$e = a \cos(\omega t + \theta)$$

the fundamental harmonic of the anode current will be

$$\cos(\omega t + \theta) \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

and hence, by the principle of harmonic balance, we can replace the nonlinear relation (7.41) by the equivalent linear one

$$i_a = S e \quad (7.42)$$

where the parameter S is the "average steepness of the characteristic of the tube" and has the form

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (7.43)$$

Equation (7.39) may then be written in the form

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = MS \frac{de}{dt} \quad (7.44)$$

On the other hand, according to the scheme in Fig. 39, we can write

$$c = \frac{1}{C} \int idt + D \left(M \frac{di}{dt} - L_a \frac{di_a}{dt} \right)$$

When the penetration factor of the tube is extremely small, i.e. D is nearabout zero, we can take

$$e = \frac{1}{C} \int idt \quad (7.45)$$

Putting (7.45) into equation (7.44), we get

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + (RC - MS) \frac{de}{dt} + e = 0$$

whence, by the usual formulae, we arrive at the following expressions for the natural frequency and the damping decrement :

$$\left. \begin{aligned} (\omega) &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \delta_e(a) &= \frac{RC - MS(a)}{2LC} \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Through these simple examples we have explained the direct application of the method of linearization to the scheme of a given oscillating system. Here, it is obvious that the non-linear elements of the system are linearized independently of other parameters of the system whose role during linearization consists of ensuring the approximate harmonic character for the oscillations.

We emphasize once again the fact that the equivalent linear systems differ essentially from the genuine linear systems in that their parameters, i.e. the equivalent coefficients, are not constant; they are rather some definite functions of the amplitude of the oscillation.

The advantage of the method of equivalent linearization for an effective construction of the equations, in the first approximation, is particularly evident in the case of complex oscillating systems. For such systems even the formation of the basic differential equations of the system, not to speak of the operations with them, presents considerable difficulties.

As an example of the application of the method of equivalent linearization to systems with several degrees of freedom*) we examine the oscillating circuit schematically represented in Fig. 40, consisting of a linear part with a complex resistance $Z(i\omega)$ and a non-linear element with a voltage-current characteristic of the form

$$V = f(I)$$

In this case the corresponding differential equation will be

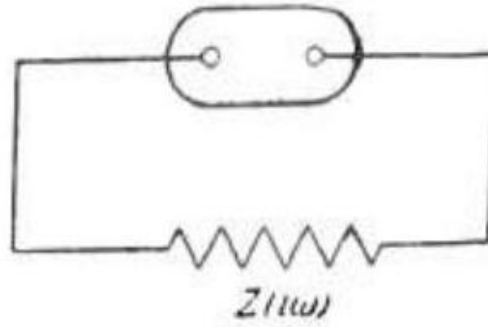


Fig. 40.

$$Z(p)I = f(I), p = \frac{d}{dt}. \quad (7.47)$$

*) Similar methods may be used for investigating systems of the more general type : vide E.P. Popov, "On the small parameter in the method of harmonic linearization" Izvestia (News) of the Academy of Sciences. U.S.S.R, Technical Sciences Division No. 1 (1955).

We assume that the parameters of the system are such that periodic oscillations are almost harmonic in character

$$I \approx a \cos \left(\omega t + \frac{1}{2} \right)$$

are excited in it.

In this case we can use the method of equivalent linearization and, in the first order approximation, replace the non-linear element by a linear one with the characteristic where

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi.$$

For stationary oscillations we thus obtained an equation of the form

$$Z(i\omega) = S(a),$$

whence, by separating the real and imaginary parts of the complex resistance

$$Z(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega),$$

we get

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= S(a) \\ Y(\omega) &= 0. \end{aligned} \right] \quad (7.49)$$

and

One of the equations thus obtained serves for the determination of the frequency while the other for the determination of the amplitude of the oscillation.

The method of equivalent linearization may be improved in such a way that it enables one to obtain not only the first order approximation but also the higher order ones.

We now formulate the equation in the second approximation. For this purpose we improve upon the formula (7.48) by including in it higher harmonics as well as a constant term.

In the first approximation the potential in the non-linear element will be

$$V = f(a \cos \theta), \quad \vartheta = \omega t + \psi. \quad (7.50)$$

Expanding this expression into a Fourier series, we get

$$V = \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\theta,$$

where, as usual,

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) d\vartheta$$

and

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta) \cos n\theta d\theta$$

We now note that the harmonic component of the potential

$$f_n(a) \cos(n\omega t + n\psi) \quad (n = 0, 2, 3, \dots)$$

gives rise to a current

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\psi)$$

in the linear element.

We now introduce the absolute value and the phase of the complex resistance

$$Z(i\Omega) = R(\Omega) e^{ip(\Omega)}$$

In this case

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\psi) = \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\omega t + n\psi - \varphi(n\omega)).$$

Thus the improved version of the formula (7.48) will be

$$I \approx a \cos \vartheta + \sum_{(n=0,2,3,\dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)). \quad (7.51)$$

Then a criterion for the applicability of the method under discussion follows immediately. We require that the term $a \cos \vartheta$ be the basic term and the others the correction terms only. Hence, for applying the method, it is required that

$$\left| \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \right| \ll a \quad (n = 0, 2, 3, \dots).$$

We utilize the expression (7.51) for improving the formula (7.50). We have

$$V = f(a \cos \theta + \xi),$$

where

$$\bar{\zeta} = \sum_{(n=0,2,3,\dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\theta - \varphi(n\omega));$$

would be

$$V = f(a \cos \theta) + \xi f'(a \cos \theta).$$

Now, expanding this expression into a Fourier series, we obtain

$$\begin{aligned} V = & \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\theta + \\ & + \left\{ \sum_{(n \geq 1)} [\Phi_n(a) \cos n\theta + G_n(a) \sin n\theta] + \Phi_0(a) \right\} \end{aligned} \quad (7.52)$$

where the sum within the brace brackets is a Fourier expansion of the function

$$\xi f'(a \cos \theta).$$

We are particularly interested in the values of $\Phi_1(a)$ and $G_1(a)$. For these we introduce the corresponding formulae

$$\begin{aligned} \Phi_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ G_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Taking again the stationary oscillations, we equate the first harmonic of the potential in the expansion (7.52) to the first harmonic of the potential in the linear element :

$$Z(i\omega)a \cos(\omega t + \varphi) = R(\omega)a \cos(\omega t + \psi + \varphi(\omega)),$$

whence we obtain

$$\begin{aligned} f_1(a) \cos(\omega t + \varphi) + \Phi_1(a) \cos(\omega t + \varphi) + G_1(a) \sin(\omega t + \varphi) = \\ = R(\omega)a \cos(\omega t + \varphi + \varphi(\omega)). \end{aligned}$$

From this we derive the improved equations of harmonic balance :

$$\begin{aligned} R(\omega)a \cos \varphi(\omega) &= f_1(a) + \Phi_1(a), \\ R(\omega)a \sin \varphi(\omega) &= -G_1(a), \end{aligned}$$

or

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= f_1(a) + \Phi_1(a), \\ a \\ Y(\omega) &= -\frac{G_1(a)}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

We now simplify the expressions for $\Phi_1(a)$ and $G_1(a)$. We have

$$\begin{aligned}
\Phi_1(a) &= \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \theta) \cos \theta \cos(n\theta - \varphi(n\omega)) d\theta = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(n \neq 1)} \frac{df_n(a)}{da} \frac{R(n\omega)}{\cos \varphi(n\omega)} \\
G_1(a) &= \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \theta) \sin \theta \sin(n\theta - \varphi(n\omega)) d\theta = \\
&= \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta
\end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \theta) \sin \theta \sin n\theta d\theta &= -\frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(a \cos \theta)}{\partial \theta} \sin n\theta d\theta = \\
&= \frac{n}{a\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta) \cos n\theta d\theta = \frac{nf_n(a)}{a}
\end{aligned}$$

i.e.

$$G_1(a) = \sum_{(n \geq 2)} \frac{nf_n^2(a)}{aR(n\omega)} - \cos \varphi(n\omega).$$

Thus, we obtain the improved equations of harmonic balance, for the stationary oscillations, as

$$\left. \begin{aligned}
X(\omega) &= f_1(a) + \frac{1}{2} \sum_{(n=0,2,3,\dots)} \frac{df_n^2(a)}{da} \frac{da}{aR(n\omega)} \cos \varphi(n\omega) \\
Y(\omega) &= - \sum_{(n>2)} \frac{nf_n^2(a)}{a^2 R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega).
\end{aligned} \right\} (7.54)$$

Comparing these equations with those of the first order approximation (7.49), we find that in this case the influence of the overtones of oscillations comes into play. The given formula (7.54) may also be used

for a more detailed investigation of the limits of applicability of equations of the first approximation.

We further note that these results may also be obtained with the help of the method of asymptotic expansions. For this purpose it is convenient to represent the basic equation of the oscillatory process (7.47) in the form

$$\{(p^2 + \omega_0^2) Q(p) + sS(p)\} I = zf(I). \quad (7.55)$$

10.2.8 8. Non-linear Oscillating Systems with Slowly Varying Parameters

We now examine a non-linear oscillating system in which there are certain parameters like the mass of the system, rigidity, coefficient of friction and others, which change slowly with time ("slowly" in relation to the natural unit of time-the period of natural oscillations). Here, we shall examine the following non-linear differential equation with slowly varying coefficients :

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x = s \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (8.1)$$

in which, as before, z is a small positive parameter and $z\tau$ is the "slowing" time.

Determination of the approximate solutions of equation (8.1) does not present further theoretical difficulties and may be effected with the help of the asymptotic method already described. In order that the asymptotic series may be formed, it is necessary, we note, that the coefficients of equation (8.1), $m(\cdot)$ and $k(\cdot)$ as well as $f(-, x, \frac{dx}{dt})$, should have a sufficient number of derivatives with respect to τ for all finite values of τ ; besides, for any value of τ in the interval $(0 \leq \tau \leq L)$, [we will examine the oscillatory process described by the differential equation (8.1) only in this interval of time $(0, \frac{L}{\varepsilon})]$, $k(\cdot) \neq 0$, $m(\cdot) \neq 0$ and are positive.

It is quite obvious that if we consider ε to be a constant parameter in the coefficients of the equation (8.1), we arrive at the equation discussed in 1, for which asymptotic formulae have been derived, taking into consideration all those supplementary phenomena that arise in the oscillating system on account of the non-linear perturbations.

When $\varepsilon := \varepsilon t$, i.e. the non-linear oscillating system under examination contains certain parameters that change with time, though slowly, we naturally expect some additional changes in the solution which are not to be observed in oscillating systems with constant mass, rigidity, etc. Such changes will include the dependence of the 'natural' frequency on the "slowing" time etc.

With all this in view, it is natural to look for the general solution of equation (8.1) in the form of the expansion :

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \psi) + \dots, \quad (8.2)$$

in which $u_1(\tau, a, \psi), u_2(\tau, a, \psi), \dots$ are periodic functions of the angle ψ with a period 2π and the quantities a and ψ , as functions of time, are defined by the differential equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

where $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ is the 'natural' frequency of the given oscillating system. Thus, as also in 1, the problem of constructing asymptotic - approximate solutions of equation (8.1) reduces to that of determining expressions for the functions

$$u_1(\tau, a, \varphi), u_2(\tau, a, \varphi), \dots, A_1(\tau, a), A_2(\tau, a), \dots, B_1(\tau, a), B_2(\tau, a), \dots \quad (8.4)$$

and then integrating the system of equations (8.3) in order to find out the amplitude and the full phase of the oscillations.

As we found in 1, it is necessary to impose additional restrictions on the functions $u_1(\tau, a, \psi), u_2(\tau, a, \psi), \dots$, in order to determine uniquely the functions appearing on the right-hand-sides of equations (8.3). For these restrictions we take the conditions (1.8) which must, in the given case, be fulfilled for any value of τ in the interval $0 \leq \tau \leq L$.

After these preliminary remarks we take up the problem of determining the functions (8.4). For this purpose we differentiate the right-hand-side of the expression (8.2), take account of equations (8.3) and then substitute in equation (8.1), with its right-hand-side expanded as a Taylor Series. After this we equate the coefficients of like powers of ε

$$\begin{aligned}
 m(\tau) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_1 \right] &= f_0(\tau, a, \psi) + 2m(\tau)\omega(\tau)A_1 \sin \\
 &+ 2m(\tau)\omega(\tau)B_1 \cos \psi + d[m(\tau)\omega(\tau)]d\tau a \sin \zeta_1 \\
 m(\tau) \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_2 \right] &= \\
 &= f_1(\tau, a, \psi) + m(\tau) \left[2\omega(\tau)aB_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + aB_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m(\tau)} \right] \cos \psi + m(\tau) \left[2\omega(\tau)A_2 + 2A_1B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} A_1 + \right. \\
 &\quad \left. + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{dm(\tau)}{d\tau} - \frac{aB_1}{m(\tau)} \right] \sin \psi
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

where we have introduced the symbols :

$$\begin{aligned}
 f_0(\tau, a, \psi) &= f(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\
 f_1(\tau, a, \psi) &= f'_\alpha(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)u_1 + \\
 &+ f'_\alpha(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi'} \omega(\tau) \right] - \\
 &- m(\tau) \left[2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \psi} \omega(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} A_1 \omega(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega(\tau) B_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \frac{\omega(\tau)}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \right]
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Further, from equation (8.5) and from the condition for the absence of the first harmonic in the function $u_1(\tau, a, \psi)$, we get

$$u_1(\tau, a, \psi) = \frac{1}{2\pi k(\tau)} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{e^{in\psi}}{1 - n^2} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) e^{-in\psi} d\psi. \tag{8.9}$$

But the condition for the absence of the first harmonic in (8.9) gives us the following expressions for $A_1(\tau, a)$ and $B_1(\tau, a)$:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1(\tau, a) &= -2m(\tau)\omega(\tau) \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi \\
 B_1(\tau, a) &= -\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi
 \end{aligned} \right\} \tag{8.10}$$

Thus, we have to search for the asymptotic solution of (8.1), in the first order approximation, in the form

$$x = a \cos \psi, \tag{8.11}$$

where a and ψ are to be determined from the equations of the first approximation :

$$\left. \begin{aligned}
 da &= -2m(\tau)\omega(\tau) \\
 &\quad - 2\pi m(\tau)\omega(\tau) \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\tau \\
 dt &= d[m(\tau)\omega(\tau)] - \\
 dt &= \omega(\tau) \\
 &\quad 2\pi m(\tau)\omega(\tau)a \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi
 \end{aligned} \right\} \tag{8.12}$$

We note that, in analogy with 7, equations of the first order approximation, (8.12), may be written in the form :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -2m(\tau)\omega(\tau) \quad d[m(\tau)\omega(\tau)] \quad d\tau \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e(\tau, a),\end{aligned}\tag{8.13}$$

where $\delta_e(\tau, a)$ and $\omega_e(\tau, a)$ are respectively the equivalent damping decrement and equivalent frequency : these differ from the corresponding expressions in 7 merely in that there exists a 'slowing' time in these and that they are determined by the expressions

$$\left. \begin{aligned}\delta_e(\tau, a) &= 2\pi m(\tau)\omega(\tau)a \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi \\ \omega_e^2(\tau, a) &= \omega^2(\tau) - \pi m(\tau)a \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi\end{aligned}\right\}\tag{8.14}$$

non-linear oscillating systems with slowly varying parameters 137

For obtaining the second approximation, it is necessary to derive from the condition for the absence of the first harmonic in the function $u_2(\tau, a, \psi)$ expression for $A_2(\tau, a)$ and $B_2(\tau, a)$. From equation (8.6)

we get

$$\begin{aligned}A_2(\tau, a) &= \frac{1}{2\omega(-)} \left[a - \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} - 2A_1 B_1 - \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{m(\tau)} dm(\tau) B_1 \right] - 2\pi m(\tau) \Leftrightarrow (\tau) \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, t) \sin u du. \\ B_2(\tau, a) &= 2\omega(\tau)a \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - a B_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m(\tau)} dm(\tau) A_1 \right] - 2\pi m(\tau)\omega(\tau)a \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi.\end{aligned}\tag{8.15}$$

Consequently the asymptotic solution of equation (8.1), in the second approximation, will be

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi),\tag{8.16}$$

where a and ψ would be determined from the equations of the second approximation :

$$\left. \begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a)\end{aligned}\right\}\tag{8.17}$$

Hence, $A_1(\tau, a)$ and $B_1(\tau, a)$ are determined from equations (8.10) $A_2(\tau, a)$ and $B_2(\tau, a)$ from (8.15) and $u_1(\tau, a, \psi)$ from (8.9). We note that in all the formulae obtained by integrating over ψ, a and τ will be regarded as constants.

Comparing the expressions obtained for the first and the second order approximations with the results in 1, we come to the conclusion that the general scheme for the formation of solutions for an oscillating system described by equation (8.1) will be the same as those for the system described in & 1. The equations of the first order approximation obtained here differ from equations (1.24) in that there exists, in these new equations, a 'slowing' time and an additional term

$$- \frac{\varepsilon a}{2m(-)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}.$$

Thus, in the first approximation, the slow variation in the mass and the coefficient of elasticity, besides the absence of harmonics in the oscillation, leads to additional 'frictional forces' and the sign of these forces will depend on how the parameters of the given system undergo variation.

We now discuss the following situation. While constituting approximate asymptotic solutions we reduce the integration of a single equation of the second order, (8.1), to an integration of two equations of the first order, (8.12) or (8.17). These, however, in many cases, cannot be integrated in terms of elementary functions and we have to seek their solutions with the help of numerical methods.

Using numerical methods we may directly integrate equation (8.1). However, it is a complicated task, requiring a lot of time and in a majority of cases, it becomes difficult to perform (owing to the possible accumulation of large systematic errors). The numerical integration of equations of the first (or second) order approximation does not present difficulties because in these, there appear only the amplitude and the phase and not the oscillating functions of x itself. For obtaining a complete picture of the process here, it is sufficient to calculate a small number of points along a comparatively "smooth" curve; this simplifies the numerical integration. On the other hand, in the direct integration of equation (8.1) we have to determine not an envelope but a direct sinusoid.

We note that for working out the equations of the first approximation (8.12) as well as those of the second approximation (8.17) there is no need of using equations (8.10) or (8.15). For working out these equations we can directly use, as in the case of equation (1.1), equations of the harmonic balance which, in the present case, have the form :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x - \right. \\ \left. - \varepsilon f \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\}_{x=a \cos \psi + \dots} \cos \psi d\psi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x - \right. \\ \left. - \varepsilon f \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\}_{x=a \cos \psi + \dots} \sin \psi d\psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

We put into the integrands the values of x , $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$ derived from (8.2) upto an accuracy of the first order, take into account the fact that a and ψ are functions of time satisfying equations (8.3), and then integrate in order to obtain, for $A_1(-, a)$ and $B_1(-, a)$, expressions (8.10). Taking into consideration quantities proportional to z^2 in the substitutions for x , $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$, we obtain for $A_2(-, a)$ and $B_2(-, a)$ expressions (8.15). We note here that while calculating integrals (8.18) we shall consider both $-$, and a as constant parameters and integrate only over ψ .

Now we examine further some special cases arising from equation (8.1). In these cases the equations of first order approximation (8.12) take up quite simple forms. We assume that in the oscillating system under study there is no friction and that the equation of motion has the form

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau)x = sf(\tau, x) \quad (8.19)$$

In this case the equations of the first order approximation will be

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -2m(-)\omega \left(\frac{d[m(-)\omega(\tau)]}{d\tau} \right) \\ \frac{d\tau}{dt} &= \omega(\tau) - 2\pi m(\tau)\omega(\tau)a \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, t) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

The system of equations (8.20) can be integrated completely. Indeed, from the first equation, we obtain

$$a = \frac{a_0}{[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}} \quad (8.21)$$

where a_0 is the initial value of the amplitude i.e. when $t = 0$. Substituting the value of the amplitude thus obtained in the second of equations (8.20), we get :

$$\psi = \int_0^t \omega_e(\tau) d\tau, \quad (8.22)$$

where

$$\omega_c(\tau) = \omega(\tau) - 2\pi[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2} a_0 \int_0^{2\pi} f_0\left(\tau, [m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}, \psi\right) \cos \psi d\psi.$$

Thus, the oscillations described by equation (8.19) will be sinusoidal in the first approximation and will have an amplitude inversely proportional to $\sqrt{m(\tau)\omega(\tau)}$ and a phase changing according to the formula (8.22).

As a second typical case we examine a system with a slowly varying mass $m(\tau)$ under the action of a linear elastic force $k(\tau)x$, with a slowly varying elasticity coefficient and a non-linear friction depending upon the velocity and the 'slowing' time.

The oscillations of this system are described by the equation

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x = \varepsilon f \left(\tau, \frac{dx}{dt} \right). \quad (8.24)$$

In this case the equations of first order approximation take up the form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -2m(\tau)\omega(\tau) \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \\ &\quad - 2\pi m(\tau)\omega(\tau) \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

From the second of the equations derived above, we at once find the law of variation of the full phase of the oscillation :

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (8.26)$$

It follows from (8.25) that the frequency of oscillations, described by equation (8.24), does not depend, in the first approximation, on the amplitude but only on the character of the slowly varying coefficients $m(\tau)$ and $k(\tau)$.

As an example we shall examine the oscillations of a mathematical pendulum of a constant mass (additional difficulties do not arise in the case of changing mass) when there is a small damping proportional to the first power of the velocity and further the length varies slowly. A number of practical problems actually do reduce to this case. Denoting the angle of deviation of the pendulum from the vertical by θ , acceleration due to gravity by g , mass of the pendulum by m , the slowly varying length by $l = l(\tau)$ and the coefficient of friction by $2n$, we get the differential equation

$$\frac{d}{dt} \left[ml^2(\tau) \frac{d\theta}{dt} \right] + 2n \frac{d}{dt} [l(\tau)\theta] + mgl(\tau) \sin \theta = 0. \quad (8.27)$$

non-linear oscillating systems with slowly varying parameters !4

For small deviations, we can replace $\sin f$ by the first two terms of its expansion in a power series and then equation (8.27) may be written in the form:

$$\frac{d}{dt} \left[ml^2(\tau) \frac{d\theta}{dt} \right] + mgl(-)A = \varepsilon f \left(-, \theta, \frac{d\theta}{dt} \right), \quad (8.28)$$

in which

$$\varepsilon f \left(\tau, \theta, \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{mgl(-)}{6} \theta^3 - 2nl(-) \frac{d\theta}{dt} - 2\varepsilon n \frac{dl(-)}{d\tau} \theta_0. \quad (8.29)$$

In the first approximation, according to (8.11) and (8.12). we have

$$0 = a \cos \frac{u}{2},$$

where a and ψ would be determined by the system of equations of the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} da &= -\frac{na}{ml(\tau)} - \frac{3\varepsilon l'(\tau)}{4l(\tau)} a, \\ dt &= \omega(\tau) a^2, \\ d\psi, \\ dt \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

where $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}}$.

Integrating the first of the system of equations (8.31) and taking the initial values $t = 0, a = a_0$, we obtain for a the expression :

$$a = a_0 e^{-\frac{n}{m} \int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{3/4} \quad (8.32)$$

Substituting this value of a into the second equation of the system (8.31), we get

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau) \left(1 - a_0^2 e^{-\frac{2n}{m} \int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{8/2} \right) dt.$$

Formulae (8.32) and (8.33) enable us to draw the curve exhibiting the dependence of the amplitude and the phase on time when the length of the pendulum varies according to an arbitrary law.

If we put $l = \text{const}$ in these formulae, we get:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 e^{-\lambda t}, \\ \psi &= \omega \left(t + a_0^2 (e^{-\lambda t} - 1) \right) + \varphi, \\ 16\lambda \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

where $\lambda = \frac{2n}{ml}$ and φ is the initial value of the phase.

The last formulae coincide with the formulae (2.44) derived earlier.

Let us now assume that the length of the pendulum varies according to the linear law $l(-) = l_0 + l_1 \tau$; l_0 is the value of the length when $t = 0$, εl_1 is the rate of change of the length of the pendulum (for a small interval of time it is always possible to assume with sufficient accuracy that the length changes according to the linear law). In this case we have for the amplitude and the phase the equations

$$a = a_0 \left(\frac{l_0}{l_0 + l_1 \tau} \right)^{\frac{3}{4} + m}, \quad (8.35)$$

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l_0 + l_1 \tau}} \left[1 - \frac{a_0^2}{16} \left(\frac{l_0}{l_0 + l_1 \tau} \right)^{\frac{3}{2} + \frac{2n}{ml_1 \tau}} \right] dt. \quad (8.36)$$

According to formula (8.35), when the length of the pendulum changes slowly, the amplitude of oscillations will change not according to the exponential law as in the case of the usual linear friction, but in inverse proportion to a certain power function of time. Here it is obvious that when $n < 0, l_1 > 0$ and $\left| \frac{n}{ml_1 \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$ and that when $n > 0$ and $l_1 > 0$ the oscillations damp down.

Thus, a slow increase in the length of the pendulum, as we could expect, promotes the damping of oscillations. If $l_1 < 0, n > 0$ and $\left| \frac{n}{l_1 m \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$, the amplitude increases and when $\left| \frac{n}{l_1^- m \varepsilon} \right| > \frac{3}{4}$ it decreases. When $l_1 < 0$ and $n < 0$, the amplitude increases. In the absence of damping ($n = 0$) the amplitude of oscillations increases with a reduction in length and decreases with an increase in the length.

non-linear oscillating systems with slowly varying parameters 143

A similar analysis may be done for the frequency of oscillations. Thus, for example, when there is no damping, the instantaneous frequency decreases with an increase in the length of the pendulum and increases with a decrease in this length.

We now calculate the second order approximation for the given example of the oscillations of a pendulum with a slowly varying length. According to the formulae (8.16), (8.9) and (8.17) we get, after a series of calculations,

$$\theta = a \cos \psi - \frac{a^3}{192} \cos 3\psi, \quad (8.37)$$

where a and ψ would be determined by the equations of second approximation:

$$\left. \begin{aligned} da &= - \left(\begin{aligned} &\frac{3l'(\tau)}{dt} \\ &\frac{4l(\tau)}{dt} \\ &\frac{d\psi}{dt} \end{aligned} = \omega(\tau) - \frac{n}{ml(\tau)} \right) \left(a + \frac{a^3}{16} \right) \\ &\quad + \varepsilon(\tau) a^2 + 1 \\ &\quad + 2\omega(\tau) \left\{ \frac{n^2}{m^2 l^2(\tau)} + \right. \\ &\quad \left. ml^2(\tau) \left[5\varepsilon^2 l''(\tau) + 5\omega^2(\tau) a^4 - \frac{3\varepsilon^2 l'^2(\tau)}{4l(\tau)} + \frac{2^9 \cdot 3}{16l^2(\tau)} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

which may be integrated completely. Thus, from the first equation of the system (8.38), we obtain the following relation between a and t :

$$\sqrt{16 + a^2}^a = \frac{a_0}{\sqrt{16 + a_0^2}} e^{-\frac{n}{m} \int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{3/4} \quad (8.39)$$

and then we can also integrate the second equation of the system (8.38).

10.3 2 Method of the Phase Plane

10.3.1 9. Trajectories in the Phase-plane. Singular Points

The asymptotic methods described so far are limited in their application by the requirement that the relevant equations are to contain a small parameter. However, in many cases, we are to deal with equations of a more general type to which the aforesaid methods are inapplicable.

If the equations describing the motion of the dynamical system under study can be reduced to the form

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (9.1)$$

we can use qualitative methods for their investigation. All equations that have been studied earlier may be reduced to equations of the type (9.1). Further, we shall see later while investigating oscillating systems that are only slightly non-linear but are under the action of external periodic forces, that in the first approximation we again arrive at equations of the type (9.1)

For a qualitative investigation of the solutions of equations (9.1) it is convenient to regard x, y as the coordinates of a point on a plane. This plane, as we know, is called the phase plane and the points x, y the phasepoints. The motion represented by $x = x(t), y = y(t)$ occurs along a line that is called the phase trajectory.

Construction of a phase trajectory for a given system means drawing a curve expressing the relation between the velocity and the displacement for the motion under study.

The phase plane along with the phase trajectories, discloses immediately all movements that might occur in the dynamical system under investigation.

trajectories in the phase plane. singular points

For drawing the phase trajectories it is necessary either to obtain a solution of the system of equations (9.1) $x = x(t), y = y(t)$, representing the equation of the phase trajectories in the parametric form or to draw the characteristics, i.e. the integral curves of the equation

$$\begin{aligned} dy &= Q(x, y) \\ dx &= P(x, y) \end{aligned} \quad (9.2)$$

which express the relation between x and y indirectly.

We shall now deal with the simplest cases. We examine the equation of the linear vibrator:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (9.3)$$

Putting

$$\frac{dx}{dt} = y$$

we reduce equation (9.3) to the form

$$\left. \begin{aligned} dy &= -2hy - kx, \\ dt &= \\ dx &= y. \\ dt & \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

We assume that friction is small, i.e. $h^2 < k, k > 0$; the solution of the system of equations (9.4) is written in the form:

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ y &= -a\omega e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

where $\omega_1^2 = k - h^2, \theta = \arctg \frac{h}{\omega_1}$; a and α are arbitrary constants determined by the initial conditions.

Expressions (9.5) represent equations of the phase trajectory in the parametric form. With the help of these equations it is not difficult to analyse the character of the motion of phase points on the phase plane.

We note that equations (9.4) define, at each point of the phase plane, one and only one tangent to the integral curve, except at the point $x = 0, y = 0$. The slope of the tangent is given by the expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - kx}{y} \quad (9.6)$$

The direction of the tangent at the point $x = 0, y = 0$ remains indeterminate. Such points are designated as critical or singular points. In the case of the simplest singular point (singular point of the first order or an elementary point) either no integral curve passes through it or a number of them do so.

We first assume that $h = 0$. In this case the solution of equation (9.5) assumes the form

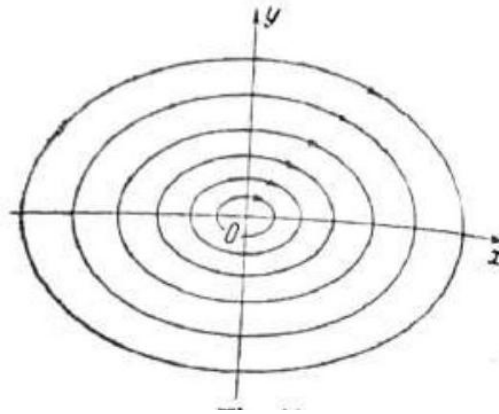


Fig. 41.

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha) \\ y &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (9.7)$$

On the phase plane we obtain a family of similar ellipses (Fig. 41), of which only one ellipse, corresponding to certain definite initial conditions, passes through any point of the phase plane.

Eliminating the time t from expressions (9.7) we obtain the equation of the family of ellipses in the form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\omega^2} = 1 \quad (9.8)$$

This equation may also be derived directly by integrating equation (9.6) with $h = 0$.

None of the integral curves passes through the origin of coordinates. Such a singular point, in the neighbourhood of which the integral curves are closed and contain this point, is called a centre.

Since all the phase trajectories appear as closed curves, ellipses in the present case, (excluding trajectories that degenerate at the point $x = 0, y = 0$) the motion of the dynamical system will be periodic.

A state of equilibrium in the oscillating system corresponds to the singular point $x = 0, y = 0$.

It is perfectly clear that in the general case of equations (9.1) the points on the phase plane, for which $\frac{dx}{dt} = 0$ and $\frac{dy}{dt} = 0$ simultaneously, i.e. the singular points of equations (9.2), are the points which correspond trajectories in the phase plane. Singular points - to the equilibrium

of the system. The closed phase trajectories of equation (9.2) on the phase plane correspond to the periodic motions of the dynamical system.

In what follows we shall use the concept of the stability of an equilibrium state. Here we shall only give its definition without going into details. The state of equilibrium will be stable if, given any region of permissible deviations from the state of equilibrium (region τ_i), we can indicate a region $\delta(\tau_i)$ surrounding the position of equilibrium such that none of the motions initiated within $\delta(r_1)$ penetrates into the region r_1 (Fig. 42).

This definition of stability may be analytically expressed as follows: the state of equilibrium $x = x_0, y = y_0$ is called stable if for any previously given r_i , taken as small as desired, we can find $\partial(r_i)$ such that if for $t = t_0$

$$|x(t_0) - x_0| < \delta(n), \quad |y(t_0) - y_0| < \delta(\eta),$$

then, for any t satisfying the inequality $t_0 < t < \infty$,

$$|x(t) - x_0| < \tau_1, \quad |y(t) - y_0| < \eta_0$$

It is not difficult to see that a position of equilibrium like the centre is a stable state of equilibrium.

Now let $h > 0$. This corresponds to a damping (attenuating) oscillatory process. In this case we obtain, according to expression (9.5), a family of spirals in the phase plane for which the origin of coordinates is an asymptotic point (Fig. 43), such that the lower the ratio $\frac{h}{\omega_1}$, i.e. lesser the friction, more the spiral approaches an ellipse during one turn.

The phase velocity in the given case is not zero except at the approaches the origin.

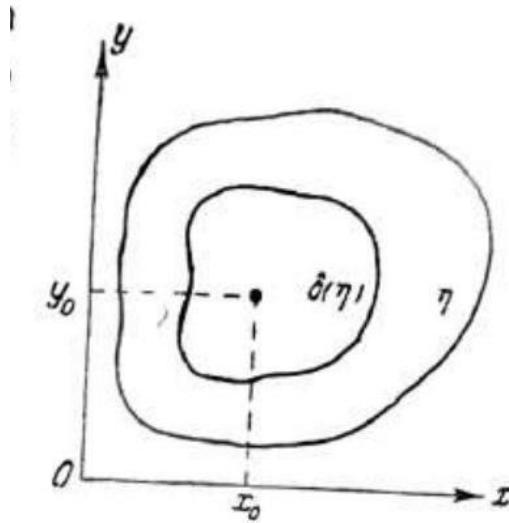


Fig. 42.

In the given case the phase trajectories correspond to the oscillating but attenuating motions while the singular point $x = 0, y = 0$ corresponds to the state of equilibrium.

The singular point examined in this case, which is the asymptotic point of all the integral curves having the form of a spiral, is called a focus. This is stable when $h > 0$.

Now let $h < 0$. In this case also we obtain a family of spirals (Fig. 44). The phase point, however, will move away from the origin of

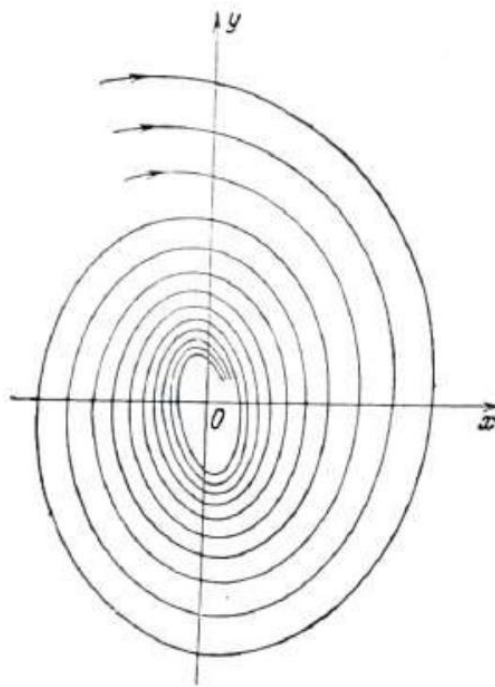


Fig. 43.

coordinates with the passage of time. The velocity of the point of representation on the integral curve is zero when $x = 0, y = 0$ and increases monotonically as the point moves away from the origin of the coordinates. In the given case the position of equilibrium is unstable

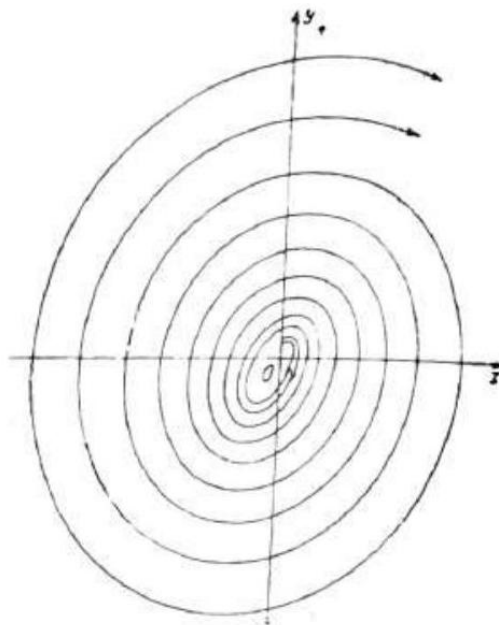


Fig. 44.

and the singular point, $x = 0, y = 0$, represents an unstable focus.

Now we examine the case $h^2 > k$. This corresponds to an attenuating aperiodic process, with $h > 0$. In this case the solution of equations (9.4) may be represented in the form

$$x = C_1 e^{-q_1 t} + C_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.9)$$

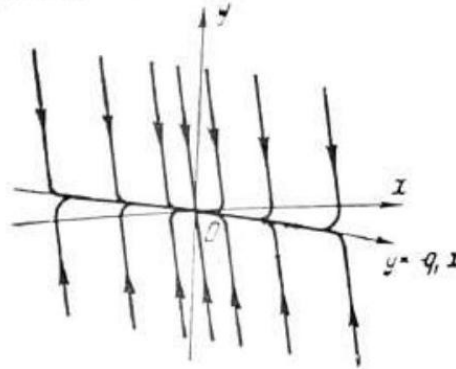
$$y = -C_1 q_1 e^{-q_1 t} - C_2 q_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.10)$$

where we use symbols :

$$\left. \begin{aligned} -q_1 &= -h + \sqrt{h^2 - k} \\ -q_2 &= -h - \sqrt{h^2 - k} \end{aligned} \right\} \quad ((9.11))$$

In order to obtain a picture on the phase plane we multiply expression (9.9) first by q_1 , then by q_2 and add to equation (9.10).

using (Fig. 46) with a singular point



$$y = -q_2 x$$

Fig. 45.

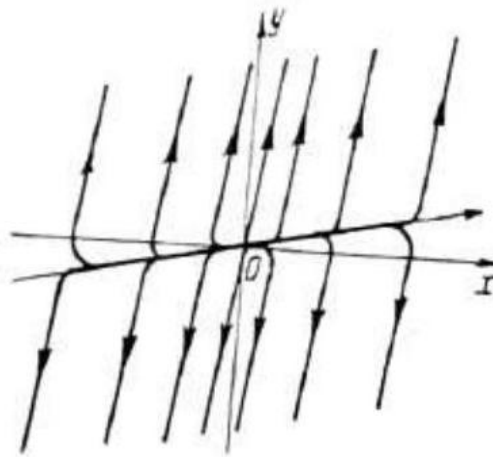


Fig. 46,

Raising the results thus obtained to powers of q_1 and q_2 , we get :
or

$$(y + q_1 x)_1^q = C (y + q_2 x)_2^q \quad (9.12)$$

$$y + q_1 x = C (y + q_2 x)^{a_2} \quad (9.13)$$

Thus, on the phase plane we obtain a family of deform of parabolas (Fig. 45) touching the straight line $y = -q_1 x$ at the the coordinates. It is not difficult to ascertain the directione point

will of the picture point along the integral curve. The pur by arrows in move along the integral curve in the direction shotes.

Fig. 45, i.e. will always approach the origin of coor point such that all

The point $x = 0, y = 0$ will be a solar point of this type is called integral curves pass through it. A singuent case the position of equia branch point or a node. In the pressonding to this position.

librium will be stable with a node corres of the integral curves on the

We now examine the character friction $h < 0, h^2 < k$. Here, phase plane when there is a large ne a family of curves of the parabolic using (9.13) we get on the phase plan the node type.

However, analyzing the motion of the phase point we can easily find that the phase point while moving along any one of the integral curves tends to depart from the state of equilibrium (vide Fig. 46 in which the directions of motion have been shown with arrows). Thus, the singular point discussed here represents an unstable node; instability depending as before on the condition $h < 0$. We note here that instability directly follows from an analysis of the expressions (9.9) and (9.10).

For completing the discussion we introduce yet another type of phase trajectories. We will come across these in the sequel. For this purpose we examine the differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \quad (9.14)$$

The singular point examined in this case, which is the asymptotic point of all the integral curves having the form of a spiral, is called a focus. This is stable when $h > 0$.

Now let $h < 0$. In this case also we obtain a family of spirals (Fig. 44). The phase point, however, will move away from the origin of coordinates with the passage of time. The velocity of the point of representation on the integral curve is zero when $x = 0, y = 0$ and

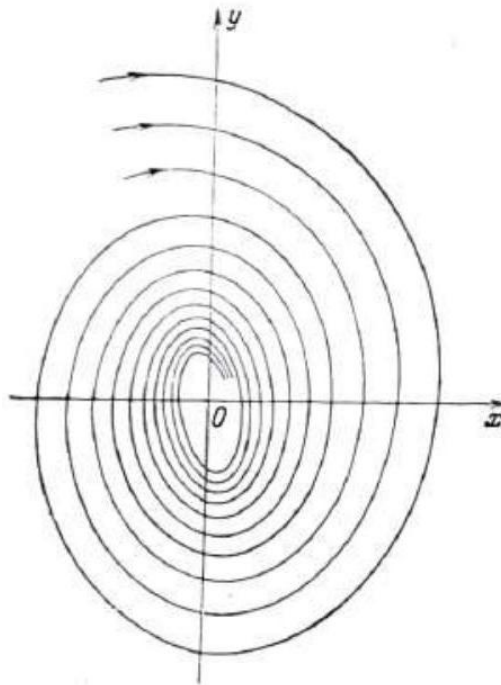


Fig. 43.

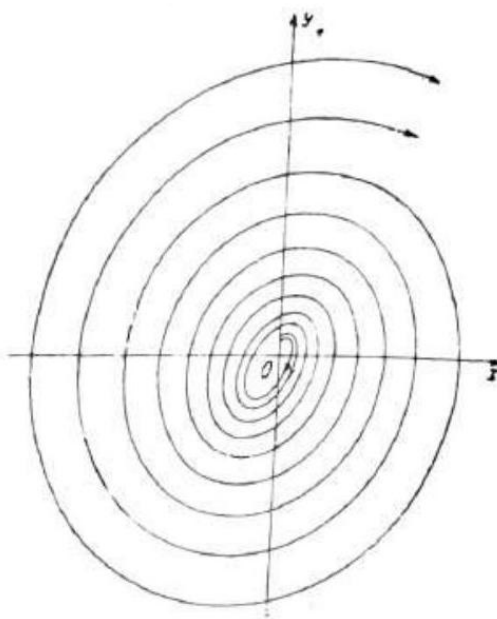


Fig. 44.

Now we examine the case $h^2 > k$. This corresponds to an attenuating aperiodic process, with $h > 0$. In this case the solution of equations (9.4) may be represented in the form

$$x = C_1 e^{-q_1 t} + C_2 e^{-q_2 t} \quad (9.9)$$

$$y = -C_1 q_1 e^{-q_1 t} - C_2 q_2 e^{-q_2 t} \quad (9.10)$$

where we use symbols :

$$\left. \begin{aligned} -q_1 &= -h + \sqrt{h^2 - k} \\ -q_2 &= -h - \sqrt{h^2 - k} \end{aligned} \right\} \quad ((9.11))$$

In order to obtain a picture on the phase plane we multiply expression (9.9) first by q_1 , then by q_2 and add to equation (9.10).

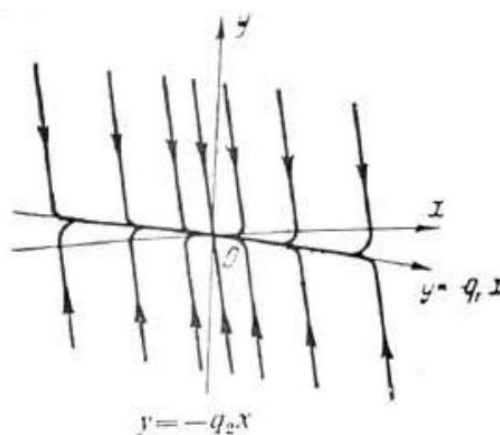


Fig. 45.

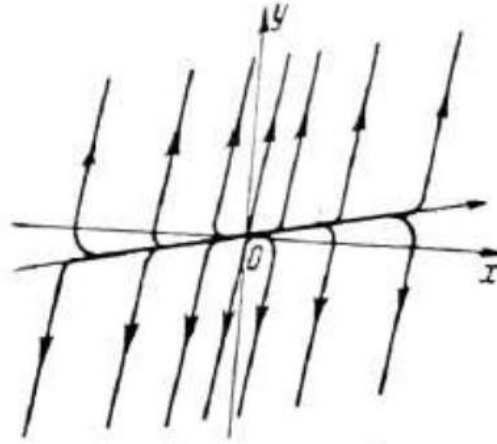


Fig. 46,

Raising the results thus obtained to powers of q_1 and q_2 , we get:
or

$$(y + q_1x)_1^q = C (y + q_2x)_2^q \quad (9.12)$$

$$y + q_1x = C (y + q_2x)^q_1. \quad (9.13)$$

Thus, on the phase plane we obtain a family of deformed parabolas (Fig. 45) touching the straight line $y = -q_1x$ at the origin of the coordinates. It is not difficult to ascertain the direction of motion of the picture point along the integral curve. The picture point will move along the integral curve in the direction shown by arrows in Fig. 45, i.e. will always approach the origin of coordinates

The point $x = 0, y = 0$ will be a singular point such that all integral curves pass through it. A singular point of this type is called a branch point or a node. In the present case the position of equilibrium will be stable with a node corresponding to this position.

We now examine the character of the integral curves on the phase plane when there is a large negative friction $h < 0, h^2 < k$. Here, using (9.13) we get on the phase plane a family of curves of the parabolic type (Fig. 46) with a singular point of the node type.

However, analyzing the motion of the phase point we can easily find that the phase point while moving along any one of the integral curves tends to depart from the state of equilibrium (vide Fig. 46 in which the directions of motion have been shown with arrows). Thus, the singular point discussed here represents an unstable node; instability depending as before on the condition $h < 0$. We note here that instability directly follows from an analysis of the expressions (9.9) and (9.10).

For completing the discussion we introduce yet another type of phase trajectories. We will come across these in the sequel. For this purpose we examine the differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \quad (9.14)$$

where k is positive. We obtain an equation of the type (9.14) by considering the small deviations of a pendulum about the upper position of unstable equilibrium.

The solution of equation (9.14) will be

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}. \\ x &= C_1 \sqrt{k} e^{kt} - C_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

It does not present any difficulty to construct the phase trajectories with the help of these relations. In fact, by using (9.15), we easily obtain an equation

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{Ck} = 1 \quad (9.16)$$

which represents the equation of a family of hyperbolas (Fig. 47). When $C = 0$ we obtain two asymptotes of this family of hyperbolas passing through the origin of the coordinates :

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{kx}, \\ y &= -\sqrt{kx}. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

The origin of coordinates is the only singular point such that, but for the asymptote, none of the integral curves passes through it. Such a singular point is called a saddle singular point or a singular point of the saddle type.

Examining the direction of motion of the picture point on the phase plane we are led to the conclusion that wherever the point initially be (except at the origin of coordinates and on the asymptote $y = -\sqrt{kx}$) it will always move away from the origin, the motion being aperiodic in character instead of being oscillatory.

The position of equilibrium corresponding to a saddle point will always be unstable because motion along the asymptote $y = -\sqrt{kx}$ can never be realised. In fact the probability of the initial state corresponding to the motion towards the singular point is equal to zero.

We now pass over to the consideration of the general case. At first we shall study the points of equilibrium,

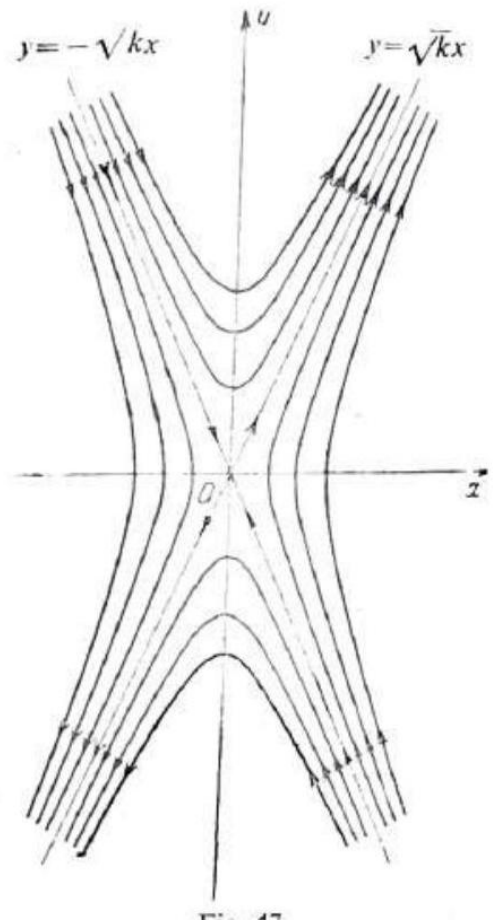


Fig. 47.

singular points of the equation (9.2) in which

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (9.18)$$

Let $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ be real analytical functions. We assume that the points of equilibrium, i.e. solutions of the equations (9.18), are isolated points and thus the number of singular points is finite in any limited region.

In this case, for analysing the behaviour of a dynamical system in the neighbourhood of a singular point $x = x_0, y = y_0$ we assume

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y. \quad (9.19)$$

We can take the singular point $x = x_0, y = y_0$ as the origin of the coordinates without violating the form of equation (9.1). In this case, putting (9.19) into equation (9.1) we get

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + P_2(x, y) \\ dy &= ax + by + Q_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

where, for the sake of facility in writing the variations δx and δy , they have been replaced by x and y and the following symbols have been used:

$$c = P'_x(0, 0), \quad d = P'_y(0, 0), \quad a = Q'_x(0, 0), \quad b = Q'_y(0, 0);$$

$P_2(x, y)$ and $Q_2(x, y)$ are functions possessing continuous partial derivatives up to second order inclusive and these functions, along with their partial derivatives of the first order, take zero values at the origin of the coordinates.

Neglecting terms of order higher than the small deviations from the point of equilibrium we get from equations (9.20) the following system of equations with constant coefficients :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

These equations, as we know, are called the "equations of variations" around the point of equilibrium.

The characteristic equation of the system (9.21) will be

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ad - bc) = 0 \quad (9.22)$$

We shall examine only the case in which the characteristic roots λ_1 and λ_2 are not equal to zero and hence $ad - bc \neq 0$. Corresponding critical points are called singular points of the first order or elementary points.

Solution of the system of equations (9.21) will be :

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1^{k_1} e^{\lambda_1 t} + C_2^{k_2} e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

where λ_1 and λ_2 are defined by the following expressions :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[b + c + \sqrt{(b - c)^2 + 4ad} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[b + c - \sqrt{(b - c)^2 + 4ad} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

and γ_1 and γ_2 are roots of the equation

$$dx^2 + (b - c)x - a = 0 \quad (9.25)$$

After analysing the right-hand-side of expressions (9.24) it is not difficult to establish relations among the coefficients of the equations (9.21), a, b, c, d such that the right-hand-sides of the equations (9.23) tend to zero or remain bounded when $t \rightarrow \infty$; hence the corresponding critical point is stable.

In order that the critical point be stable it is necessary that $b+c < 0$ when $(b-c)^2 + 4ad \leq 0$; and $ad - bc < 0$ when $(b-c)^2 - 4ad > 0$. If $b+c = 0$, it is necessary for stability that the inequality $(b-c)^2 + 4ad < 0$ be satisfied. When $b+c > 0$ the critical point will always be unstable.

If $ad - bc \neq 0$, the character of the critical point of equations (9.1) follows, essentially, from the character of the first approximation for these equations (except in the case when $b+c = 0$), i.e. from the character of the solution of equations (9.21) obtained by replacing $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ by their first order approximations.

It is quite obvious that the presence of terms of higher order, left out by us, does not alter the character of the motion in the neighbourhood of the point of equilibrium when $\text{Re}[\lambda_1, \lambda_2] \neq 0$; the

terms that have been neglected can only give rise to small additions to the "effective" values of the damping decrement. However, when $\text{Re}[\lambda_1] = 0$ or $\text{Re}[\lambda_2] = 0$, the small terms that are neglected may affect the character of the motion and hence its stability too will be determined once for all by these small additions.

We examine equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + x = 0 \quad (9.26)$$

which may be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -iy^3 - x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

For investigating the character of the point of equilibrium $x = 0, y = 0$, we get hold of the "equations of variations":

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

According to these equations, the point of equilibrium $x = 0, y = 0$ is stable because $b+c = 0, 4ad = -4 < 0$.

Evidently the character of motion represented by equations (9.27) changes, because the presence of the term $\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^3$ in equation (9.26) leads either to damping or to an unlimited increase in the amplitude of the oscillations depending upon whether λ is positive or negative.

Here we introduce a theorem which is a very special case of Liapunov's theorem.

Let $P_2(x, y)$ and $Q_2(x, y)$ appearing in equations (9.20) be functions possessing continuous partial derivatives up to the second order in the neighbourhood of the point $x = 0, y = 0$. Further, let $P_2(x, y), Q_2(x, y)$ and their partial derivatives of the first order be zero at this point.

Hence, if for the corresponding system of "first approximation" of (9.21), the real parts of the roots of the characteristic equation (9.22) are negative, the trivial solution $x = 0, y = 0$ of the system (9.20) is stable according to Liapunov. Moreover, all the solutions of the system (9.20) derived from the initial points sufficiently close to $(0, 0)$ will approach the trivial solution asymptotically for $t \rightarrow +\infty$.

The proof of this statement is very simple and can be obtained as follows.
Let

$$\left. \begin{aligned} x &= U_{11}(t), & y &= U_{21}(t), \\ x &= U_{12}(t), & y &= U_{22}(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

be solutions of the equations of the first order approximation with initial conditions :

$$\begin{aligned} U_{11}(0) &= 1, & U_{21}(0) &= 0 \\ U_{12}(0) &= 0, & U_{22}(0) &= 1 \end{aligned}$$

It is not difficult to see that equations of the type

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + F_1(t) \\ dy &= ax + by + F_2(t) \\ dt &= \end{aligned}$$

may be integrated by quadrature :

$$\begin{aligned} x &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{12}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau \\ y &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{22}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau \end{aligned}$$

Using these formulae for equations (9.20) we obtain

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{12}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau \\ y(t) &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{22}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Thus we replace the system of differential equations (9.20) with a system of integral equations.

We emphasize that since the real parts of the roots of the characteristic equation (9.22) are assumed to be negative, the functions $U_{as}(t)$ will attenuate exponentially so that we can write

$$|U_{ab}(t)| \leq ke^{-\alpha t}, \quad (9.31)$$

where k and α are positive constants.

We shall examine the integral equations (9.30) with the help of the usual method of successive approximations. Utilising the estimate (9.31), we arrive at the conclusions that when the initial values $x(0)$ and $y(0)$ are sufficiently small,

1. $|x_n(t)| \leq Ce^{-xt}$, $|y_n(t)| \leq Ce^{-xt}$, C being a constant independent of n .
2. $x_n(t)$ and $y_n(t)$ converge to solutions $x(t)$ and $y(t)$ uniformly for all values of t in the interval $(0, \infty)$.

Hence it follows that $x(t)$ and $y(t)$ will tend to zero when $t \rightarrow +\infty$.

We now analyse the character of the critical points on the phase plane. For this purpose we have to study the behaviour of the characteristic equation in the neighbourhood of a singular point.

The characteristic equation of the system in the parametric form is given by (9.23). Using these equations it is not difficult to construct the integral curves and analyse their character which depends upon the natural relations among the coefficients a, b, c and d .

We now examine a number of different cases.

Let $(b-c)^2 + 4ad < 0$. In this case the right-hand-sides of equations (9.23) possess an oscillatory character. If $b+c=0$, the family of ellipses containing the singular point, which will be of the nature of a centre, will themselves be the characteristics in the neighbourhood of the critical point. If $b+c \neq 0$, the family of spirals, for which the critical point which is of the nature of a focus is an asymptotic point, will be the relevant characteristics. In this latter case if $b+c < 0$ the characteristics tend to the origin of the coordinates when $t \rightarrow \infty$, and the focus will be the stable singular point. Further, if $b+c > 0$, the characteristics will tend to the origin of coordinates when $t \rightarrow -\infty$; the focus will be an unstable singular point.

Assume that $(b-c)^2 + 4ad > 0$. Eliminating time from expressions (9.23) we get the following equation of the characteristics in the phase plane, valid in the neighbourhood of the critical point,

$$y - \alpha_1 x = c(y - \alpha_2 x)^{\lambda_2}. \quad (9.32)$$

The last expression, as has been shown above, represents an equation of a family of parabolas or a family of hyperbolas depending upon the sign of the power index $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. If $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, (9.32) represents the equation of a family of parabolas. Thus, if $ad - bc < 0$, the critical point will be a branch point whose stability depends upon the sign of the expression $b+c$.

When $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ and $ad - bc > 0$, equation (9.32) will represent the equation of a family of hyperbolas and the critical point will be a singular point of the saddle type.

We now examine the case when $(b-c)^2 + 4ad = 0$. As a consequence of this relation, the roots of the characteristic equation (9.22) are equal and real: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(b+c)$.

In this case, if $a = d = 0$ and $b = c = \lambda$, we get from equation (9.21)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (9.33)$$

and the characteristic equation $y = cx$ represents the equation of a family of straight lines passing through the origin of coordinates. The singular point $x = 0, y = 0$ is called a branch point or a node in this case also.

In the general case it is necessary to introduce a change of variables in equations (9.21) according to the formulae

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + b - cy \\ \eta &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

After eliminating time we get the equation :

$$d\eta = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{C} \quad (9.35)$$

The solution of this equation

$$\eta_1 = \frac{1}{\lambda} \xi \ln \xi + C\xi$$

represents a family of curves passing through the singular point. These are represented in Fig. 48. The singular point also appears to be a

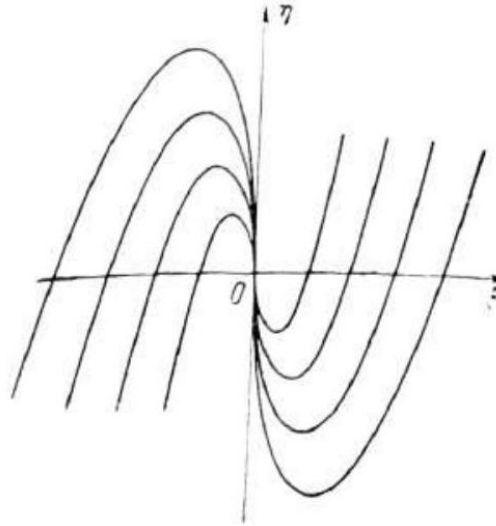


Fig. , 48

branch point which will be stable when $b + c < 0$ and unstable when $b + c > 0$. The observed results have been tabulated in Table 5.

Table 5

1	$(b - c)^2 + 4ad < 0$	$b + c \neq 0$ focus $b + c = 0$ centre	$b + c < 0$ stable focus $b + c > 0$ unstable focus
2	$(b - c)^2 + 4ad = 0$	branch point	$b + c < 0$ stable branch point $b + c > 0$ unstable branch point
3	$(b - c)^2 + 4ad > 0$	$ad - bc < 0$ branch point $ad - bc > 0$ saddle point	$b + c < 0$ stable branch point $b + c > 0$ unstable branch point

Now we pass on from local investigation of the character of motion near singular points to an investigation of the behaviour of the integral curves all over the phase plane.

For obtaining some direct information about the possible nature of the behaviour of integral curves on the phase plane, we first examine the approximate solution of equation (1.1) expressing the oscillations of a system with slight non-linearity :

$$x = a \cos \psi + \varepsilon \dots, \quad y = \frac{dx}{dt} = -a(0) \sin \psi + \varepsilon \dots; \quad (9.37)$$

the amplitude of oscillations a and the phase are defined by the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

Equations (9.37) represent equations of the phase trajectories in the parametric form. The behaviour of these phase trajectories will depend on the roots of the equation

$$\Phi(a) = a\delta(a) = 0, \quad (9.39)$$

corresponding to a stationary regime in the oscillating system, as well as on the sign of the function $\Phi'_a(a)$.

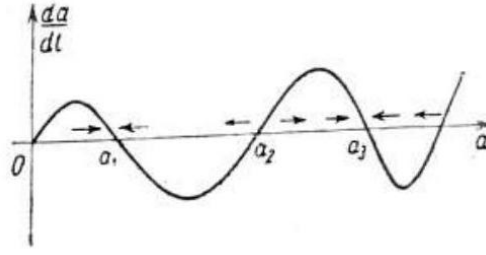


Fig. 49.

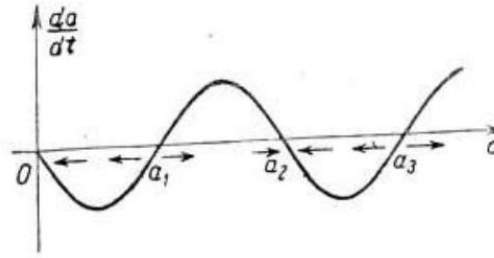


Fig. 50.

The trivial root $a = 0$, obviously, corresponds to a state of equilibrium.

Let equation (9.39) have a series of roots for which $\Psi'(a) \neq 0$.

In this case, we obtain a position represented in diagram of the type 49 or 50 .

Evidently, in the first case, a_1 and a_3 are roots of the equation (9.39) corresponding to a stable stationary regime of the oscillating system. The value a_2 corresponds to an unstable regime and $a = 0$ to an unstable condition of equilibrium. In the second case, $a = 0$ will correspond to a stable position of equilibrium, a_1 and a_3 to unstable stationary regime and a_2 to stable stationary regime.

Going over to the phase plane we obtain the point of equilibrium and a number of closed curves nearly like ellipses:

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2 \omega^2} = 1 \quad (a = a_1, a_2, a_3, \dots) \quad (9.40)$$

Figs. 51 and 52 show diagrams on the phase plane corresponding to the aforementioned type of the roots of equation (9.39).

Thus, we obtain on the phase plane the singular point corresponding to the zero root and the closed trajectories corresponding to the roots $a_1, a_2, a_3, \dots$, of equation (9.39). All other phase trajectories will asymptotically tend to these closed trajectories when $t \rightarrow \infty$ or when $t \rightarrow -\infty$.

In the given case the phase plane is divided into a number of bands, replete with integral curves asymptotically approaching some

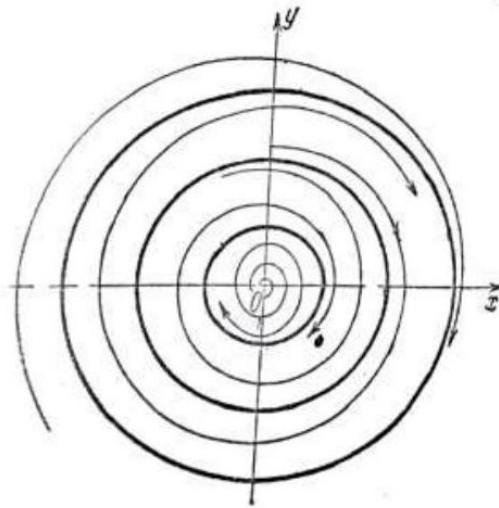


Fig. 51.

closed integral curve called the limiting cycle (or limit cycle) or else approaching a point of equilibrium.

The limit cycle will be stable if all the integral curves of the band in question reach the cycle when $t \rightarrow \infty$ and will be unstable if these curves reach the cycle when $t \rightarrow -\infty$.

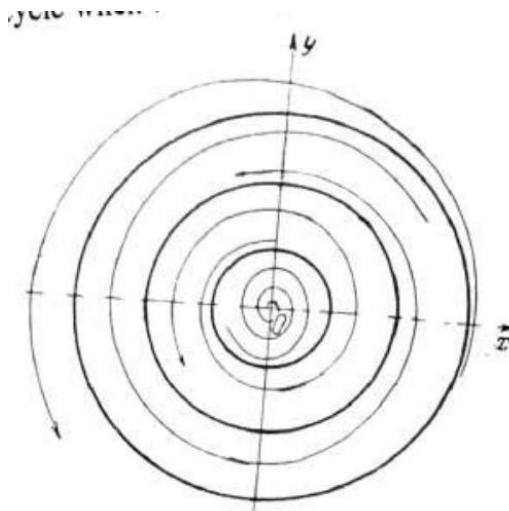


Fig. 52.

We note that if the oscillating system is conservative, $\Phi(a) \equiv 0$ and the system might possibly have a stationary periodic regime with an arbitrary amplitude depending only on the initial conditions. All family of closed cycles surrounding the centre-type singular point on the phase plane corresponds to this case (Fig. 53).

Of course, the argument advanced here is not a strict one and not even the principal one. It refers only to the particular case of systems very close to a linear harmonic vibrator for which (systems) only one singular point is possible.

The general case of the system of equations (9.1) was investigated by Poincaré with the help of strict qualitative methods which obtain in the end a picture of the behaviour of trajectories on the phase plane - a natural generalisation of the picture obtained above.

We shall assume that the system of equations (9.1) describes a certain oscillatory process. By making this assumption we exclude from examination the case when the phase plane may have trajectories receding to infinity.

In this case the phase plane contains singular points, closed trajectories and separatrices - integral

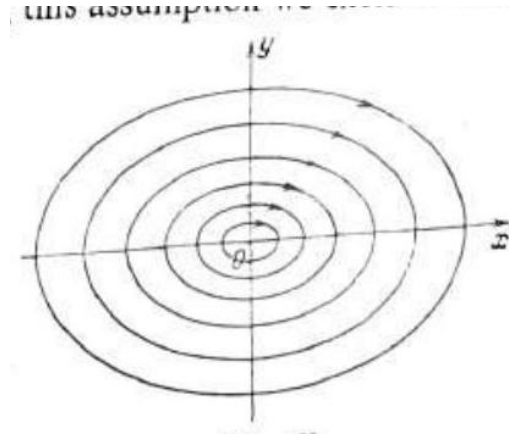


Fig. 53.

curves passing through a saddle type singular point. The separatrix plays a special role, because it divides the phase plane into a number of regions replete with trajectories of different kinds (Fig. 54).

Any open integral curve either 'spirals' to a limit cycle or approaches one or a number of singular points. Closed cycles may form both continuous and discrete families.

From the physical point of view, a picture in which cycles form a continuous family enclosing a singular point of the centre type is typical for the conservative systems.

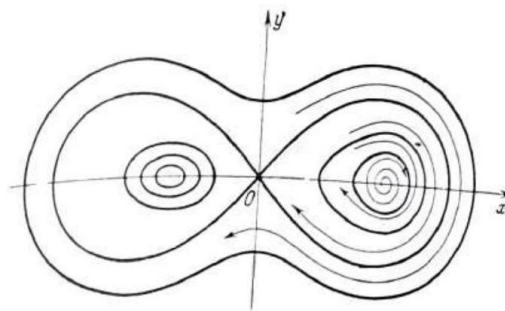


Fig. 54.

However, when the cycles form a discontinuous family they are enclosed in a band. All integral curves enclosed within such a band tend to a cycle that is called the limit cycle for the given case. If there is an approach to the given cycle when $t \rightarrow \infty$ we talk of a stable limit cycle and if there is an approach when $t \rightarrow -\infty$, we naturally talk of an unstable cycle.

A picture of this type is characteristic for an autonomous oscillating system. Stable limit cycles represent stationary regimes in autonomous oscillations. It is quite obvious that the stationary regime in an autonomous oscillating system is independent of the initial conditions lying within well-defined limits. Of course, in the presence of a number of limit cycles a change-over from one limit cycle to another is possible when the initial values undergo radical changes.

The aforementioned picture of the behaviour of trajectories on the phase plane is very clear graphically but it is very difficult to give a detailed picture while solving concrete examples.

Uptil now no sufficiently general theoretical methods are available for solving the question of the existence of limit cycles and for defining their positions except for systems which are approximately linear ($\varepsilon \ll 1$).

The concept of index introduced by Poincaré is very often of great value for investigating such problems. We take, on the phase plane under study, a closed curve Γ , assuming that this curve is simple, i.e. it does not have a double point and that it does not pass through a position

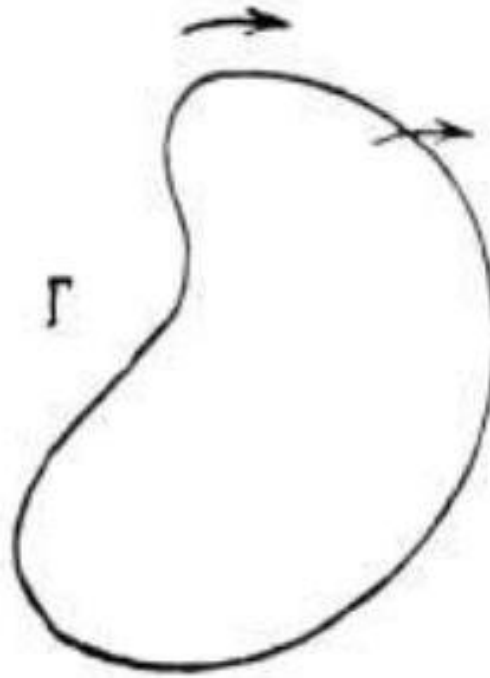


Fig. 55.

of equilibrium. We take some point S on this curve and through it draw a vector coinciding in direction with the tangent to the phase trajectory passing through this point.

Let the continuous function $\theta(t)$ define the angle formed by this

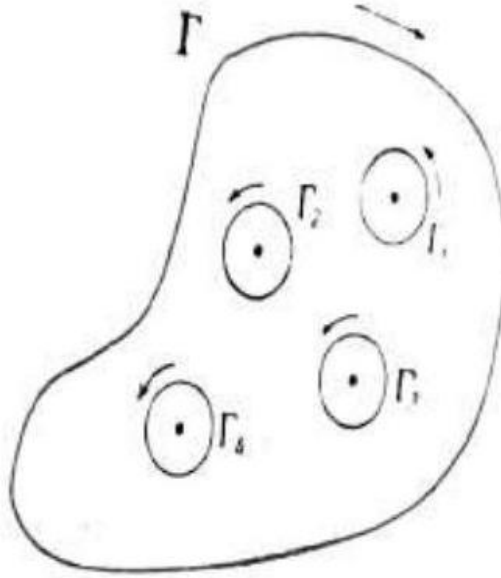


Fig. 56.

vector with the positive direction of the axis Ox . If the point S executes a full rotation along the closed curve Γ and comes back to its original position, this vector executes a number of rotations during this time and hence, $\theta(t)$ changes by $2\pi j$ where j is either a positive or a negative integer (Fig. 55). The number j is called the index of the closed curve Γ .

Evidently this number j may be expressed by a contour integral :

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\arctg \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} P dQ - Q dP \quad (9.41)$$

This curvilinear integral is that of a complete differential and hence, if the integrand and its derivative are continuous within the area enclosed by the curve Γ , the integral is zero. It is quite clear that such a continuity might fail only in the case of points for which

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

i.e. for the singular points of our equation. Hence, if there are no singular points inside the curve Γ , the index of the curve is zero.

In the general case when there are several singular points inside the curve Γ we have a picture like the one shown in Fig. 56. In this case the sum of integrals (9.41) taken along the curve Γ and curves $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, surrounding the singular points is zero, because there are no singular points in the corresponding multiply-connected region limited by the curves $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, etc.

Since we ascribed to the curves $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$ paths which are opposite to the one taken for determining the index, we find that the index of the curve Γ 's a sum of numbers depending only upon the properties of the corresponding singular points. These numbers are called indices of singular points. By the above definition the index of any singular point is equal to the integral

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} P dQ - Q dP$$

taken along the curve I , enclosing only one given point M and not depending upon the form of the curve Γ .

Hence, for an actual evaluation of the index, we may take for Γ an ellipse

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1, \quad (9.42)$$

as close to the point of equilibrium as desired. Here, as we find, we place the origin of coordinates at the singular point under study.

Thus, neglecting terms of higher order in the expressions for $P(x, y)$ and $Q(x, y)$, we obtain

$$j = q/2\pi \oint (xdy - ydx), \quad (9.43)$$

where

$$q = bc - ad.$$

By virtue of the well-known expression for the area in terms of a curvilinear integral,

$$j = \frac{q}{\pi} S$$

where $S = \frac{\pi}{|q|}$ is the area of the ellipse. We thus get

$$j = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Hence it follows immediately that the Poincaré' index for a branch point, focus and centre is $+1$ and for a saddle point it is -1 . The same results might also be obtained from a direct examination of the picture on the phase plane (Fig. 57).

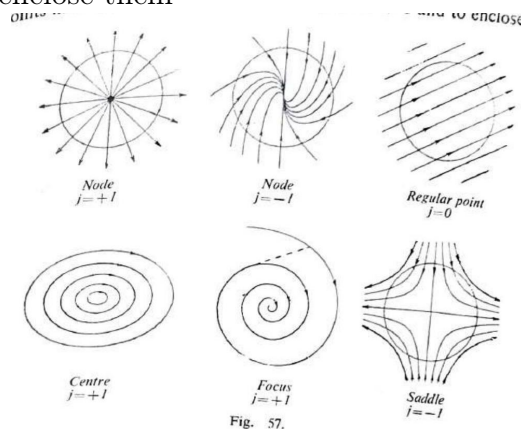
It should be emphasized that even if we know the character and the location of the singular points, such a knowledge would be quite insufficient for judging, in general, the behaviour of the integral curves of the differential equation (9.2). However, for a number of special cases we may arrive at certain important exceptions. We examine, for instance, a closed integral curve defined by the equation (9.2) without double points and singular points. As the vector tangent to such a curve describes an angle 2π for a full round of the curve in the positive direction, the sum of the indices of all the points enclosed within the closed integral curve is unity.

Thus it is obvious that there must be found at least one singular point within a closed integral curve and this must be either a centre or a focus or a branch point.

However, if there are more than one singular point within a closed integral curve the number of saddle points is less by one than the number of singular points of the other types.

The concept of an index enables us to determine the number and the position of the limit cycles for a given equation, i.e. to distinguish on the phase plane a number of rings of finite width each of which contains only one limit cycle.

For this purpose it is necessary to discriminate some singular points having the sum of the indices equal to $+1$ and to enclose them



with two closed curves so that there would not be any singular point in the annular region thus obtained.

After this it is necessary to study the velocity vector of the picture point along these curves. Depending upon the direction of this vector we can conclude whether a limit cycle exists or not and judge its character if it exists.

Thus, for example, if the velocity vector of the phase point is directed everywhere inward, in the annular region, there exists at least one stable limit cycle. Further, if the velocity vector is directed everywhere outward then there exists at least one unstable limit cycle and so on.

We give in the conclusion the elegant example*) for which it is easy to determine the limit cycle analytically. We examine the equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x} \quad (9.44)$$

*) I.G. Petrovskii : Lectures on the theory of ordinary differential equations, State Tech. Lit. Publish. House, Moscow Leningrad, 1947. State Tech. Lit. Publish. House, Moscow Leningrad, 1947.

Changing variables by substituting $\rho \cos \varphi$ for x and $\rho \sin \varphi$ for y , where ρ and φ are polar coordinates, we obtain the equation

$$\frac{d_i}{d_i} = 0 - 1 \quad (9.45)$$

The indefinite integral of this equation will be

$$\rho = 1 + Ce^{\rho}, \quad (9.46)$$

where C is an arbitrary constant. In order that ρ be everywhere positive it is necessary that $\rho \leq \ln |C|$ for $C < 0$. In this case the family of integral curves will consist of a circle of radius $\rho = 1$ (for $C = 0$), of spirals originating from the origin of the coordinates and approaching the circle asymptotically from within (spiralling upon the circle from within) when $\varphi \rightarrow -\infty$ (for $C < 0$), and of spirals asymptotically approaching the circle from out-

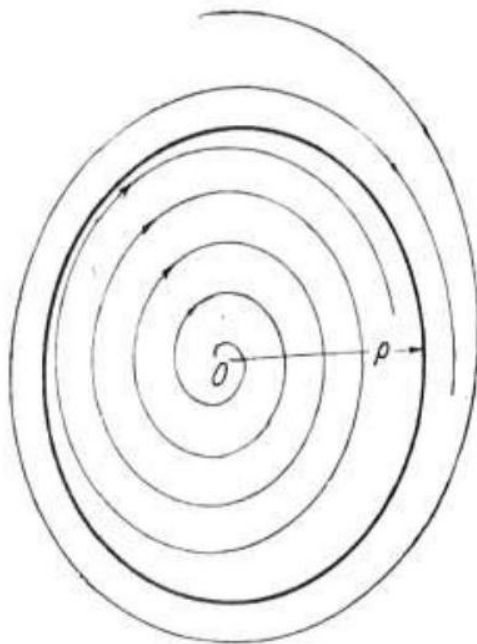


Fig. 58.

side (spiralling upon the circle from without) when $\varphi \rightarrow -\infty$ (for $C > 0$). The circle with radius $p = 1$ in the given case will be a limit cycle of the equation (9.44) (Fig. 58).

10.3.2 10. Lienard's Method

In many important special cases it is convenient to study the nonlinear differential equation (9.2) with the help of graphs of integral curves on the phase plane. The most elegant method for constructing the integral curves graphically is the one proposed by the French engineer Lienard [26]. This method enables us to study all types of motions permitted by a given equation and to derive the limit cycles.

Lienard studied an equation of the form :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (10.1)$$

It is known that Van-der-Pol equation belongs to this type and moreover the equations of Rayleigh and others can also be reduced to this form.

After the work of Lienard the question of finding criteria for the existence and uniqueness of a limit cycle for an equation of the type (10.1) became a subject for investigation with a number of authors. We may mention, for instance, the works of V.S. Ivanov, Levinson, Smith and A.V. Dragilev.

We give here the formulation of a theorem of A.V. Dragilev. We introduce the notation

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x)dx \quad (10.2)$$

Hence, if

1. $g(x)$ satisfies the Lipschitz conditions:

$$xg(x) > 0, x \neq 0; G(\infty) = \infty;$$

2. $F(x)$ is defined uniquely in the interval $-\infty < x < \infty$ and in any finite interval it satisfies the Lipschitz conditions and moreover, for sufficiently small x $F(x) < 0$ if $x > 0$ and $F(x) > 0$ if $x < 0$;
3. there exists a number M and numbers k and $k', k' < k$, such that

$$\begin{aligned} F(x) &\geq k, & \text{when } x > M, \\ F(x) &\leq k', & \text{when } x < -M, \end{aligned}$$

then equation (10.1) has at least one limit cycle.

As we see here, the existence of at least one limit cycle is established under very general conditions.

The theorem of Levinson and Smith is concerned with the question of uniqueness of the limit cycle.

Let

1. $g(x)$ be an odd function such that $g(x) > 0$ for $x > 0$.
2. $F(x)$ be an odd function, there existing a value x_0 such that $F(x) < 0$ for $0 < x < x_0$ and $F(x) \geq 0$, and increases monotonically. for $x \geq x_0$.

3. $F(\infty) = G(\infty) = \infty$.
4. $f(x)$ and $g(x)$ satisfy Lipschitz conditions in any finite interval.

Under such conditions equation (10.1) has a limit cycle and this limit cycle is unique.

We shall not give here a proof of these theorems*).

We examine a much simpler case when the following restrictive conditions are satisfied :

1. $f(x)$ is an even function, $g(x)$ odd and further, $xg(x) > 0$ for any x , while $f(0) < 0$.
2. $f(x)$ and $g(x)$ are analytic functions.
3. $F(x) \rightarrow \infty$ when $x \rightarrow \infty$.
4. The equation $F(x) = 0$ has one and only one positive root $x = a$ and, further, for $x \geq a$ the function $F(x)$ increases monotonically.

It is not difficult to find that the Van-der-Pol equation and the Rayleigh equations satisfy these conditions.

We shall show that when these conditions are satisfied, equation (10.1) possesses one and only one closed cycle which is stable. We give the proof with the help of a very simple and elementary method given in S. Lipschitz's book [24].

We put

$$y = \frac{dx}{dt} + F(x), \lambda(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x) \quad (10.3)$$

With these notations, $\frac{y^2}{2}$ may be interpreted as the kinetic energy and the function $G(x)$ as the potential energy. We now find the energy dissipated by the system during oscillations expressed by the equation (10.1). We have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + G(x) \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} + F(x) \right)^2 + G(x) \right\} = \\ &= \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) \right) + F(x) \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} + F(x) \right) \end{aligned}$$

or, in view of (10.1) and the notations (10.2) and (10.3), we obtain, after omitting dt for the sake of brevity,

$$d\lambda = F(x)dy \quad (10.4)$$

*) Proof of these theorems may be looked up in the book by V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov [33].

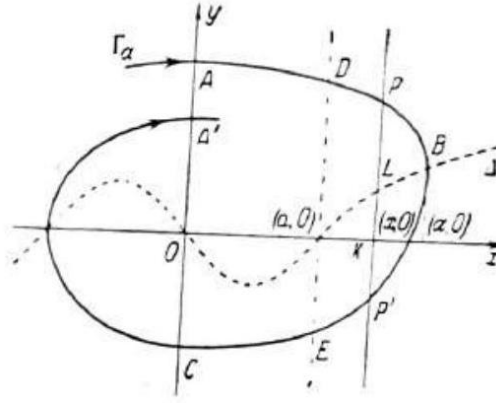


Fig. 59.

Thus the energy dissipated by the system will be given by the value of the integral $\int F(x)dy$ taken along the integral curve.

Changing over to the variables x and y we obtain from equation (10.1) an equivalent system of equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Thus, we have to show that the system of equations (10.5) has a unique stable cycle.

The equations (10.5) have the following obvious properties:

1. If $x(t)$ and $y(t)$ are solutions of the system of equations (10.5), $-x(t)$ and $-y(t)$ are also solutions of this system by virtue of the restrictions mentioned above (because $F(x)$ is an odd function); hence the curve which is symmetric with the integral curve about the origin of coordinates, is also an integral curve of equations (10.5) :
2. The only critical point of the system (10.5) on the phase plane is the origin of coordinates and hence the limit cycle must encircle the origin.
3. The slope of the integral curve Γ is determined by the equation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y - F(x)} \quad (10.6)$$

As $g(0) = 0$, all tangents to the trajectory of F at points lying on the Oy -axis (excluding the origin of coordinates) are horizontal.

On the other hand, if we examine the curve Δ , with its equation $y - F(x) = 0$ (Fig. 59, dotted line), it is not difficult to find that all tangents to Γ at the points of its intersection with Δ are vertical, except at the origin of coordinates (because

$$y - F(x) = 0 \text{ at } \Delta, \text{ and hence } \frac{dy}{dx} = \infty)$$

Further, since $g(x)$ is odd and $xg(x) > 0$, so according to (10.5), along the curve Γ , y decreases on the right of the Oy -axis and increases on its left. Moreover, x increases when Γ lies above Δ (as in this case $y - F(x) > 0$) and decreases when Γ lies below Δ . Hence the curve Γ has the form shown in Fig. 59.

We now denote the abscissa of the point B by α and write Γ_α instead of Γ in future. We shall now find the conditions under which Γ_α will be a closed cycle.

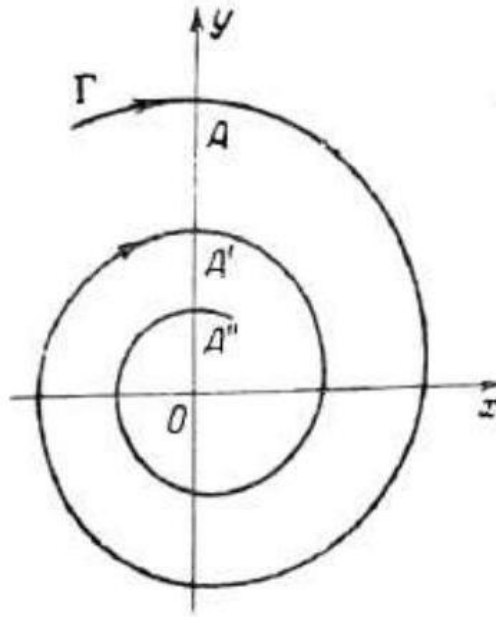


Fig. 60.

Obviously it is necessary that $OA' = OA$, because if it were not so we find, repeating our argument with the point A'' lying below A' (Fig. 60), by producing the curve Γ beyond the point A' that the cycle cannot cross itself and so on. We can similarly have other points like A'' .

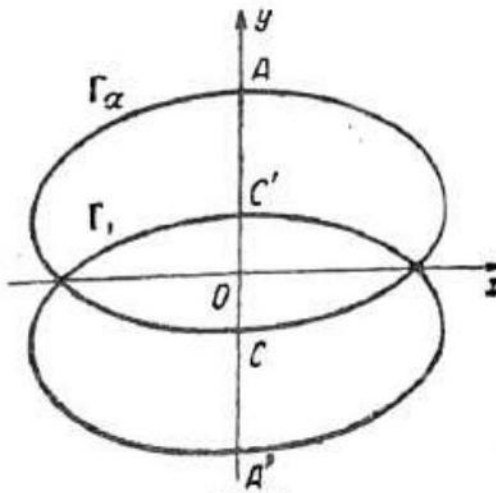


Fig. 61.

Thus, if $OA' \neq OA$, the curve Γ_α cannot increase either at the point A or at the point A' and hence cannot be a closed curve. Hence Γ_α must intersect each axis in two and only two points. It follows from this that $OA = -OC$.

If we assume, that $OA \neq -OC$ and let A' and C' be points symmetric to A and C about the origin of coordinates, then according to the first property of the system of equations (10.5) the curve symmetric to Γ_α about the origin of coordinates will be the closed integral curve Γ_1 passing through A', C' . As the Oy -axis is perpendicular to Γ_α we would pass on to the position represented graphically in Fig. 61, when the curves Γ_α and Γ_1 cross each other which is impossible. Thus $OA = -OC$.

On other hand, if we assume $OA = -OC$, then the curve symmetric to the arc AC about the origin of coordinates is an arc of the cycle joining the point A to the point C on the left of Oy -axis. This, along with the arc AC , forms a closed cycle.

Thus, in order that Γ_α be a closed cycle it is necessary that $OA = -OC$. Using the notations of (10.2), $\therefore (O, y) = \frac{y^2}{2}$, the last condition may be stated as follows:

In order that Γ_α be a closed cycle it is necessary and sufficient that

$$\lambda(A) = \lambda(C). \quad (10.7)$$

Thus, we would show that when the conditions to be satisfied by the functions $f(x)$ and $g(x)$ are satisfied, equation (10.7) is also satisfied; hence equation (10.1) possesses a limit cycle.

In order to show this we shall examine the following curvilinear integral taken along the curve Γ .

We put

$$\varphi(\alpha) = \lambda(C) - \lambda(A) = \int_{ABC} d\lambda = \int_{ABC} F(x)dy \quad (10.8)$$

If $\alpha \leq a$ (vide Fig. 59), $dy < 0$, and by the fourth condition (vide page 168) $F(x) < 0$ and thus $\varphi(\alpha) > 0$, i.e. $\lambda(C) > \lambda(A)$.

Thus, in this case Γ_α cannot be a closed cycle. (In this case $\int_{ABC} F(x)dy > 0$, i.e. the energy dissipated by the system is positive and hence, evidently, there cannot be any undamped oscillation in the system).

Hence we assume that $x \geq a$, i.e. the curve Γx has a form as shown in Fig. 59. We write

$$\varphi_1(\alpha) = \int_{AD} d\lambda + \int_{CE} d\lambda, \quad \varphi_2(\alpha) = \int_{DBE} d\lambda;$$

whence

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha).$$

With the help of (10.4) and (10.6) we can write

$$d\lambda = F(x) \frac{dx}{dx} = -\frac{F(x)g(x)}{y - F(x)} dx \quad (10.9)$$

Since $F(x) < 0$ for $x < a$, $d\lambda$ is positive when l'_x drawn in the direction from A to D or from E to C and thus $\varphi_1(x) > 0$. On the other hand, we have $d\lambda < 0$ along DBE and hence $\varphi_2(\alpha) < 0$.

It is obvious that when α increases, arc AD will rise and arc CE will fall, and thus, for a fixed x , $|y|$ will increase. As the limits of integration for

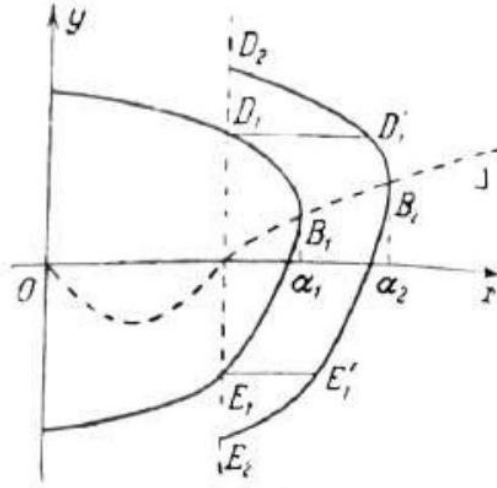


Fig. 62.

$$d\lambda = \frac{g(x)}{y} dx$$

will decrease with an increase of y .

We now pass on to determine the nature of the changes of $\varphi_2(\alpha)$ when α increases. Let α_1 and α_2 be two successive values of α , with $\alpha_2 > \alpha_1$. We show that

$$\varphi_2(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1)$$

We draw perpendiculars $D_1D'_1$ and $E_1E'_1$ to the straight line D_2E_2 (Fig. 62).

In this case,

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x)dy = \int_{D_2D'_1} F(x)dy + \int_{D'_1E'_1} F(x)dy + \int_{E'_1E_2} F(x)dy \quad (10.10)$$

As $F(x) > 0$ and $dy < 0$, we have here

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x)dy < \int_{D'_1E'_1} F(x)dy \quad (10.11)$$

From the construction of D'_1 and E'_1 we find that y changes within the same limits (from higher to lower value) along both the curves $D_1B_1E_1$ and $D'_1E'_1$.

On the other hand, for a given value of y , the abscissa x of a point of the curve $D'_1E'_1$ will be greater than that of the corresponding point of the curve $D_1B_1E_1$.

Hence, for a given value of y , $F(x)$ on $D_1B_1E_1$ will be less than $F(x)$ on $D'_1E'_1$. Therefore, since $dy < 0$,

$$\int_{D'_1E'_1} F(x)dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x)dy \quad (10.12)$$

and we get from (10.11)

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x)dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x)dy \quad (10.13)$$

i.e. in fact $\varphi_2(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1)$, when $\alpha_2 > \alpha_1$.

Thus $\varphi(\alpha) = \varphi_1(a) + \varphi_2(\alpha)$ will be a monotonically decreasing function of α when $\alpha \geq 0$.

We note that when $x \leq a$, we have

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) > 0.$$

We will now show that

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty, \text{ as } \alpha \rightarrow \infty.$$

For this, we fix some value x_1 such that

$$a < x_1 < \alpha$$

and draw the axis PP' parallel to the Oy axis through the point x_1 on the axis Ox (Fig. 59).

We have

$$\int_{DBE} d\lambda < \int_{PBP} d\lambda = \int_{PBP_1} F(x) dy. \quad (10.14)$$

However, for the arc PBP_1 we have $x \geq x_1$. Hence

$$F(x) \geq F(x_1).$$

We thus arrive at the relation

$$\int_{DBE} d\lambda \leq F(x_1) \int_{PBP_1} dy = -F(x_1) |PP_1|$$

whence it follows that

$$-\varphi_2(\alpha) = - \int_{DBE} d\lambda > KL \cdot KP \quad (10.15)$$

It is, however, clear that the sections KP and KL may be taken as large as desired when α is sufficiently large. Hence, as was to be proved,

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty, \quad \text{when } \alpha \rightarrow \infty$$

Thus, we show that $\varphi(\alpha)$ is a monotonically decreasing function of α with values varying from $\varphi(\alpha) > 0$ to $\varphi(\alpha) = -\infty$ as $\alpha \rightarrow \infty$.

Hence $\varphi(\alpha)$ becomes zero once and only once for $\alpha = x_0$, and Γ_{α_0} will be the unique closed characteristic which satisfies the condition (10.7).

We now show that Γ_{α_0} will be a stable limit cycle.

If $\alpha < \alpha_0$, $\varphi(\alpha) > 0$ and hence $\lambda(C) > \lambda(A)$.

If $\alpha > \alpha_0$, $\varphi(\alpha) < 0$ and hence $\lambda(C) < \lambda(A)$.

Let the points A_0 and C_0 correspond to the intersection of Γ_{α_0} with the y -axis; it is clear that the point C is nearer Γ_{α_0} than the point A if $\alpha < \alpha_0$, and hence the point A' will be nearer Γ_{α_0} than A .

Arguing similarly for

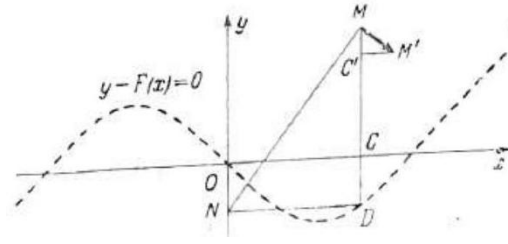


Fig. 63.

We now pass over to the discussion of a method for the actual construction of integral curves in the phase plane.

The graphical method of Lienard is usually employed only when the elastic force $g(x)$ is linear in x ; with this choice of our variables we can reduce equation (10.6) to the form

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - F(x)} \quad (10.16)$$

without affecting the generality.

The method of graphical integration proposed by Lienard for equations of the type (10.16) is as follows. We construct a curve Δ , in the phase plane, whose equation is

$$y - F(x) = 0 \quad (10.17)$$

(Fig. 63).

After constructing this curve we can graphically find the direction of the tangent to the integral curve of equation (10.16) passing through any point of the phase plane. For this we draw a perpendicular MC on the axis of abscissae through the point $M(x, y)$ in question and produce this perpendicular until it intersects the curve Δ at the point D . We also draw a particular DN on the axis of ordinates through the point D . Hence, the line NM will be perpendicular to the integral curve of equation (10.16), passing through the point M . Indeed, if the phase point of equation (10.16) at the instant $t = 0$ coincides with the point $M(x, y)$, then after a time interval dt it will shift along the axis of the ordinates by an amount

$$dy = -xdt = NDdt = MC'$$

and along the axis of abscissae by an amount

$$dx = (y - F(x))dt = MDdt = C'M'$$

Since triangles NDM and $MC'M'$ are similar, we have

$$\frac{MC'}{ND} = \frac{C'M'}{DM} = \frac{M'M}{MN}$$

hence $\overline{M'M} \perp \overline{MN}$.

Thus, in order to draw a tangent through the given point $M(x, y)$, in the x, y plane, to an integral curve Γ passing through this point, it is sufficient to draw a vertical straight line MCD , a horizontal straight line DN and then join the points N and M . This tangent to the curve Γ will be perpendicular to the straight line NM . It follows that for any arbitrary curve Δ and for arbitrary initial conditions x_0, y_0 represented by the point $M_0(x_0, y_0)$, it is quite easy to find the direction of the tangents and thus draw the approximate integral curve.

Therefore, for drawing an integral curve Γ passing through the given point of the phase plane, $M(x, y)$, we find the

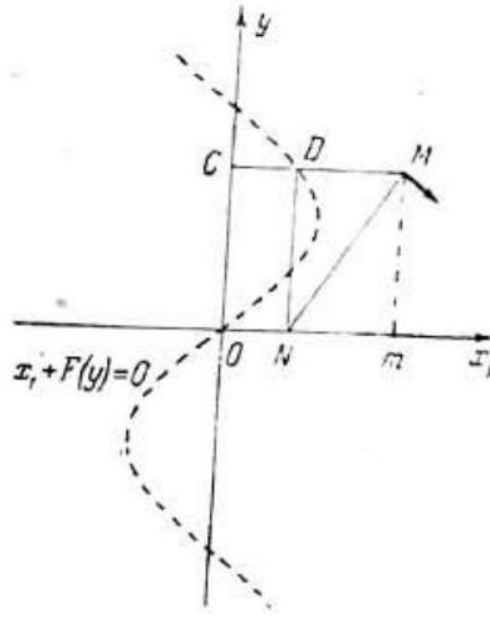


Fig. 64.

tangent at the given point and replace the integral curve in the neighbourhood of this point by a small segment of a tangent, then at the end of this segment we again determine the direction of the tangent and replace the integral curve in the neighbourhood of this point by another segment of a straight line. As a result of such a procedure we obtain an approximate integral curve in the form of a broken line, the degree of accuracy of the curve depending upon the magnitudes of the separate segments.

In many cases of transformation of the equation (10.1), it is more convenient to introduce the variable

$$x_1 = \int x dt$$

instead of the change of variables given by (10.3).

We then examine the equation in the form

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + F\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + x_1 = 0 \quad (10.18)$$

or, writing $\frac{dx_1}{dt} = y$ and eliminating t , we have

$$y \frac{dy}{dx_1} + F(y) + x_1 = 0 \quad (10.19)$$

In this case the equation of the auxiliary curve will be

$$x_1 + F(y) = 0 \quad (10.20)$$

and on the phase plane we obtain a construction like the one shown in Fig. 64.

Drawing, through the point M , perpendiculars Mm and MC on the axes of abscissae and ordinates respectively and also drawing, through the point D , a perpendicular on the axis of abscissae we obtain, according to equation (10.19),

$$Nm = -y \frac{dy}{dx_1} \quad (10.21)$$

Hence, equation (10.19) may be written in the form

$$Nm = CM = -CD, \quad (10.22)$$

because $CM = x_1$ and $CD = -F(y)$.

Thus, in this case also, we can proceed with the construction of approximate integral curves according to the scheme given above.

If the curve Δ is symmetric about the origin of coordinates the integral curves Γ thus drawn will 'spiral' upon closed curves, i.e., limit cycles corresponding to the periodic regime; the existence and stability of these were proved above.

We note that the graphical construction proposed by Lienard does not presuppose any compulsory symmetry of the curve Δ . This graphical method is applicable also in the case when Δ is more or less like a symmetric curve, namely the curve determined by the characteristic of a neon tube and the like.

Here the curve Δ need not necessarily be expressed by some algebraic equation. This curve can be obtained experimentally and this procedure is very important from the practical point of view.

We now give some examples illustrating the above mentioned method for the graphical construction of integral curves.

We note that for certain special cases the method of Lienard straightaway gives an integral curve and the necessity for the construction of an approximate broken line does not arise.

For example, in the case of free linear oscillations described by equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (10.23)$$

the equation of phase trajectories will be

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (10.24)$$

In this case the equation of the curve Δ will be $x = 0$, and the point N coincides with the origin of coordinates for all positions of the point D . Hence, circles with the origin of coordinates as centre will be the integral curves.

If the system executes oscillations under the action of a linear elastic force in the presence of coulomb friction, the equation may be written in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (10.25)$$

In this case, we obtain for the curve Δ

$$\left. \begin{array}{l} x = A \text{ when } \frac{dx}{dt} > 0 \\ x = -A \text{ when } \frac{dx}{dt} < 0 \end{array} \right\} \quad (10.26)$$

Evidently, for the integral curve l irrespective of the given values of the coordinates of point D , the point N coincides with the point S_1 in the upper half plane and with the point S_2 in the lower half plane (Fig. 65). Thus, the integral curve l will consist of arcs of circles with centres at

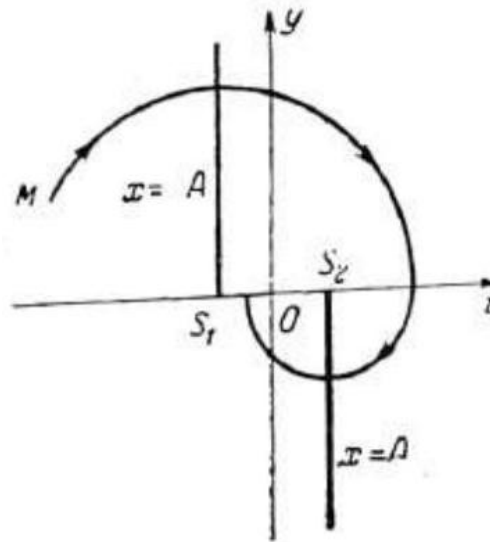


Fig. 65.

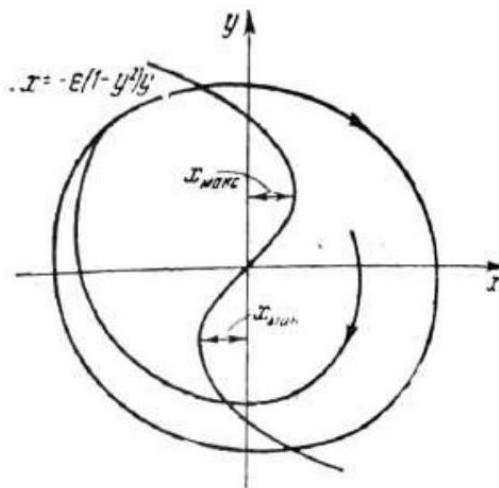


Fig. 66.

every passage between the two successive positions of rest ($y = 0$) until the oscillating system no longer approaches the state of rest.

Now we integrate Van-der-Pol equation which may be written in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left(1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (10.27)$$

by the method of Lienard.

The equation of the curve Δ in the phase plane will be

$$x - \varepsilon (1 - y^2) y = 0 \quad (10.28)$$

where ε is a certain parameter.

The properties of the function $-\varepsilon (1 - y^2) y$ are as follows :

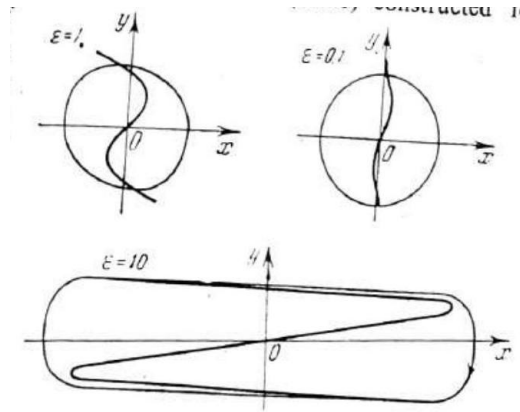


Fig. 67.

LIENARD'S METHOD

- 1) when $y = 0$ and $y = \pm 1, x = 0$;
- 2) when $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, x$ takes up the experimental values

$$x = \pm \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

(Fig. 66).

According to this, when ε increases the loop stretches itself along the x -axis, approaching the pair of straight lines $y = \pm 1$ (Fig. 67).

For $\varepsilon = 0$ the integral curves for the equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z(1-y^2)y - x}{y} \quad (10.29)$$

form a family of concentric circles with centres at the origin of coordinates. In this case the foregoing equation corresponds to a simple harmonic motion.

When $\varepsilon \neq 0$ we investigate the behaviour of the integral curves of equation (10.27) by using the graphic method of Lienard. According to this method we construct for the curve (10.28) a guiding field and arrive at the limit cycles. Fig. 67 shows curves (10.28) constructed for three different values of $s = 0.1, 1$ and 10 . In these figures limit cycles have also been drawn by the method of Lienard. As we know, in the case $\varepsilon > 0$ the origin of coordinates is an unstable position of equilibrium and all integral curves going out from the origin will be described around it by expanding spirals. However, the spirals untwisting themselves around the origin cannot spread indefinitely away because for large values of y damping in the oscillating system described by equation (10.27) remains positive.

During the expansion of each spiral its successive windings approach one another more and more and all the spirals asymptotically 'spirate' from within upon a closed curve - the limiting cycle.

Not only spirals near the origin but also those away from it spiral upon this limiting cycle. The closed integral curve, the limit cycle to

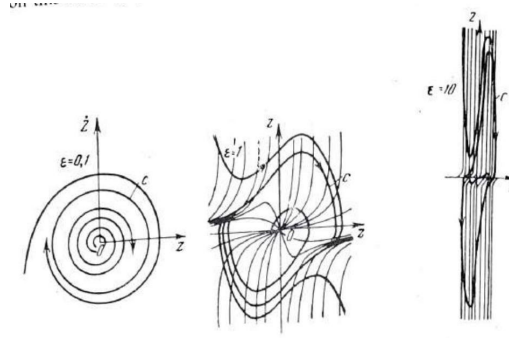


Fig. 68.

which all integral curves of equation (10.29) tend, corresponds to the periodic solution of the equation (10.27).

We also note that the closed cycle contains within it a singular point with the index $+1$, this point being an unstable focus for $\varepsilon = 0.1$

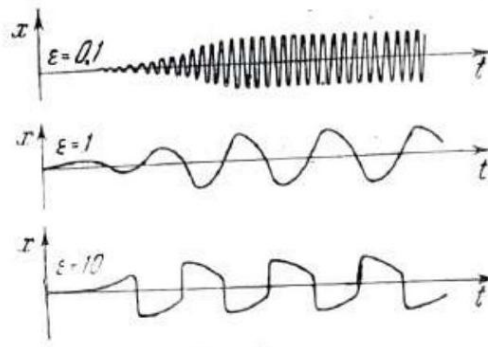


Fig. 69.

and $\varepsilon = 1.0$ and an unstable branch point for $\varepsilon = 10$.

From Fig. 67 we can judge the manner in which the character of the system changes with the parameter ε . For any value of ε there occur in the system autonomous oscillations but the total amplitude and the form of these oscillations and the nature of their setting up are different. In Fig. 68 we have compared the results of numerical integration of equation (10.29) for the same values of the parameter ε and also the curves characterising directly the changes of x with time (Fig. 69).

Finally we note that Rensuki Usui* combined the method of Lienard (worked out in detail by the author in the case when the characteristic is symmetric) and the method of Kirschstein (extremely complicated for practical application), and worked out a standard graphical method for the solution of non-linear differential equations which represented the process in self-excited systems. The method worked out by him may be used for studying oscillatory processes in complex circuits and also in coupled circuits.

However, we would not take up a discussion of this method and rest content with a reference to the relevant specialised literature as a matter of interest only.

10.3.3 11. Relaxation Oscillation Systems

Uptil now we have studied the Van-der-Pol equation particularly when s is small and have shown in 9 the changes occurring in the solution when ε increases.

We now study the Van-der-Pol equation when ε is large and, in particular, try to derive an approximate form of the solution when $\varepsilon \rightarrow \infty$.

For such an investigation it is convenient to take the Van-der-Pol equation in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left[\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \right] + x = 0 \quad (11.1)$$

and arrange to have a small parameter before the second derivative.
Putting into equation (11.1)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varepsilon \eta_1 \\ x &= \varepsilon t_1, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

we get

$$\frac{1}{s^2} \frac{d^2\gamma_1}{dt_1^2} - \left[\frac{dr_1}{dt_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{d\eta_1}{dt_1} \right)^3 \right] + \eta_1 = 0 \quad (11.3)$$

or

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = \frac{\dot{\eta} - \frac{1}{3}\dot{\eta}^3 - \eta_1}{\dot{\eta}}. \quad (11.4)$$

*) Rensuki Usui, Non-linear theory of electrical generators : Report of Radio Research in Japan, Vol V, No. 2, 1935.

When $\varepsilon \gg 1$, in equation (11.4) we can neglect the term $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\eta}{d\eta}$ in the first approximation, and thus obtain a relation between γ_1 and γ_2 :

$$\dot{\eta}_1 - \frac{1}{3}\dot{\eta}_1^3 = r_1. \quad (11.5)$$

It is not difficult to analyse with the help of this result the character of motion on the phase plane. We plot the curve (11.5) (Fig. 70) and note that according to (11.4) the guiding field on curve (11.5) is horizontal because $d\dot{\eta} = 0$ for all η and η satisfying equation (11.5). At other points of the phase plane (excluding the points very close to the curve (11.5)) when $\varepsilon \rightarrow \infty$ the guiding field tends to be vertical because, according to (11.4), $dr_r \rightarrow \infty$ when $\varepsilon \rightarrow \infty$ for all points not dr_1 satisfying the equation (11.5). From this we see that when the values of ε are large the curve of equation (11.4) passing through any arbitrary

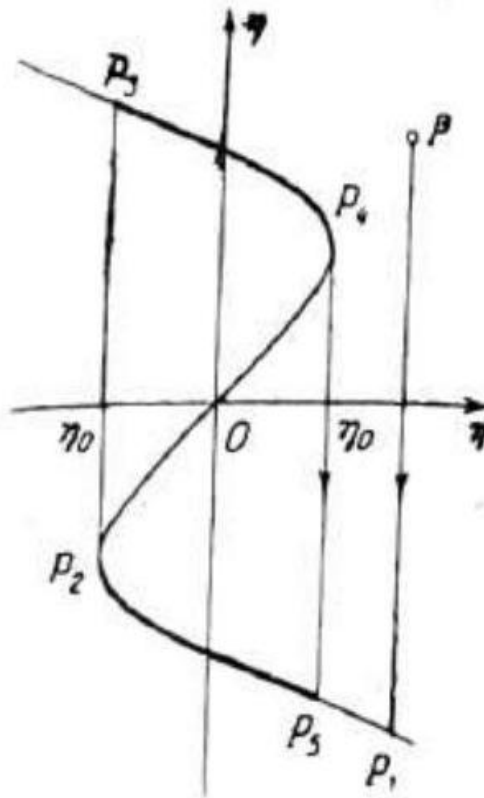


Fig. 70.

point P (Fig. 70) will be very near the vertical straight line almost upto the point P_1 lying on the curve (11.5). Further, the integral curve passes along the curve (11.5) remaining below it until it reaches the neighbourhood of the point P_2 and after reaching this point it goes vertically upwards until once again it reaches the curve (11.5). Thereafter the integral curve follows the curve (11.5), remaining above it and after reaching the point P_1 it turns vertically downwards. Thus, we obtain the limit cycle which, when $\varepsilon \rightarrow \infty$, will have a form shown in Fig. 70.

We obtain a picture of this form because the segments P_3P_4 and P_2P_5 of the curve (11.5) have the property of attraction and higher the value of ε greater is this attraction. As the guiding field at any general point is vertical but horizontal for points lying on the curve (11.5), any general point tends towards the curve (11.5), approaches it but leaves it as the guiding field is vertical and then again tends to approach the curve (11.5). If ε is sufficiently large we do not note the aforementioned deviations and, in practice, obtain a picture shown in Fig. 70.

The asymptotic value for the period of oscillations in the approximation under study is obtained by calculating the integral along the limit cycle.

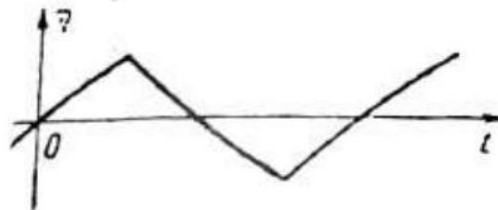


Fig. 71.

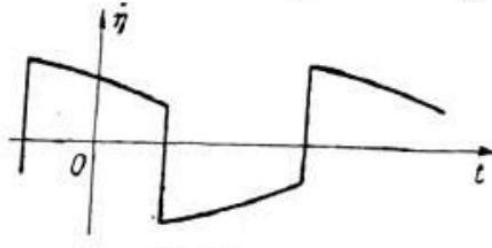


Fig. 72.

For the equation (11.4) we have

$$dt_1 = \frac{d\tau_1}{i_1}, \quad (11.6)$$

whence

$$T_1 = \oint \frac{dr_1}{r_1} \quad (11.7)$$

As $d\eta = 0$ on the vertical segments of the cycle we can write instead of (11.7)

$$T_1 = 2 \int_{\dot{\eta}_1}^{\dot{\eta}_2 d(\dot{\eta}_1 - \frac{1}{3}\dot{\eta}_1^3)} = 2 \left(\ln \dot{\eta}_1 - \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2 \right) \dot{\eta}_1^{\dot{\eta}_2} \quad (11.8)$$

According to (11.5), we have $r_{11} = 1, r_{12} = 2$ and hence for a period T_1 when the values of ε are large we obtain the formula

$$T_1 = 1.614 \quad (11.9)$$

or, changing over to old variables, we obtain the asymptotic formula

$$T = 1.614\varepsilon \quad (11.10)$$

Thus, for $s \gg 1$, the oscillatory process will, in the asymptotic treatment, run as follows. When η increases, starting from $-\tau_0$, the velocity η will be positive and the picture point on the phase plane will move along the curve P_3P_4 (Fig. 70). When γ_1 attains the maximal value $+\eta_0$ the picture point jumps from the position P_4 to P_5 ; this corresponds to an instantaneous change in sign of the velocity r . Further, when τ_1 decreases the velocity n becomes negative and the picture point moves along the curve P_5P_2 . A change in sign of the velocity occurs once again at P_2 and the picture point on the phase plane jumps to the position P_3 .

Thus, during a single period of oscillation, the velocity η experiences two discontinuities - at the moments of attainment of the maximal and the minimal value by the quantity η . As a matter of fact, the velocity is continuous though it changes very quickly because ε , though large, is finite and while talking of jumps we have introduced the simplification corresponding to the asymptotic approximation.

After we have derived the relation between velocity and position on the phase plane and also the period of oscillation, we do not find any difficulty in constructing curves representing η and η as functions of t (Figs. 71 and 72).

The oscillations examined here are called relaxation oscillations and are widely met with in nature.

The idealised discontinuous treatment of the Van-der-Pol equation with large values of ε discussed here may also be applicable to the general case while investigating non-linear oscillating systems with $\varepsilon \gg 1$. In this treatment we leave out of the equation the inertia term. Hence, the relaxation oscillations are described by a differential equation of the first order

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \quad (11.11)$$

this being conveniently converted in terms of $\frac{dx}{dt}$ and written in the form

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) \quad (11.12)$$

Here, $\Phi(x)$ represents a certain multivalued function of the type schematically represented in Fig. 74.

We also give another example of a relaxation oscillating system defined by an equation of the type (11.12).

We examine an electrical circuit (Fig. 73) consisting of a selfinductance L , a resistance R and a non-linear element with a current voltage characteristic of an " S " type, connected in series with a source of constant voltage E_u . Here, the current-voltage characteristic of the

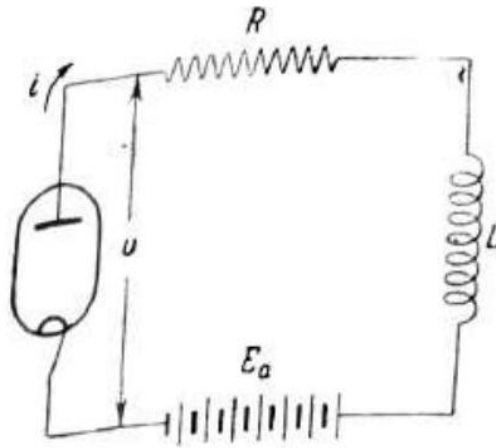


Fig. 73.

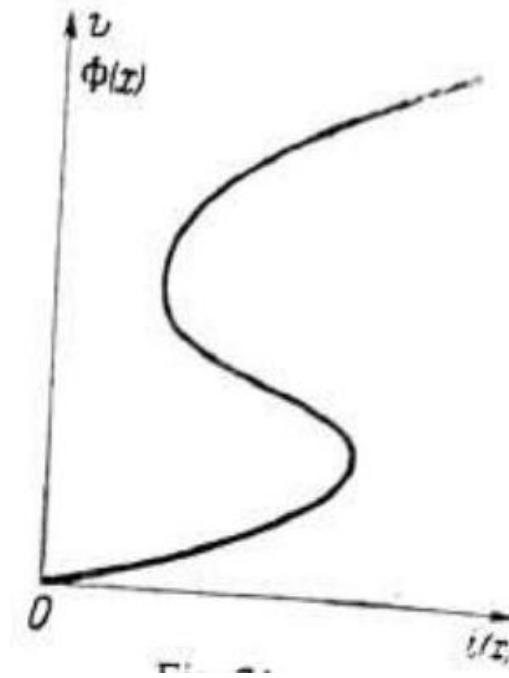


Fig. 74.

element " S " has a form diagrammatically represented in Fig. 74. We can take an electron tube in dynatron condition as a definite example of such a non-linear system.

Considering the balance of voltages for the given circuit we arrive at a differential equation of the type

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = E_v. \quad (11.13)$$

We note that since in our example the only reservoir capable of storing energy of oscillations is the self-inductance, the energy stored in the circuit is equal to $\frac{1}{2}Li^2$. Since during the course of the oscillation process energy must change continuously, it is evident that the magnitude of the current i must also change continuously, i.e. increase and decrease smoothly. On the other hand, it is not difficult to see from Fig. 74 that during a smooth increase and also during a smooth decrease of the current i the voltage v must change in the way shown in Fig. 75. We express the relation between voltage and current represented graphically in this figure (only the continuous linear segments being taken into account) by the functional equation

$$v = f(i), \quad (11.14)$$

in which $f(i)$ has two values for i varying in the interval (i_0, i_1) .

Let the parameters of the oscillator be so chosen that the values of the function

$$\Phi(i) = \frac{E_a - Ri - f(i)}{L} \quad (11.15)$$

in the interval (i_0, i_1) , corresponding to the lower branch of $f(i)$, are positive and for the higher branch negative.

In this circuit a relaxation oscillation is excited for which the current i changes between the limits i_0 and i_1 . The differential equation describing the oscillation process belongs

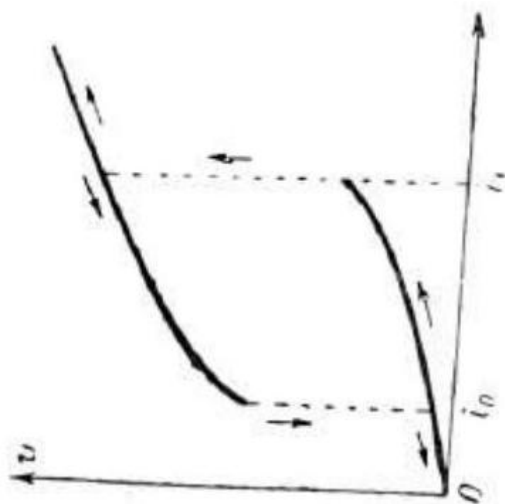


Fig. 75.

to the type (11.12).

Evidently, in the given example we did not carry the matter as far as constructing a differential equation of the

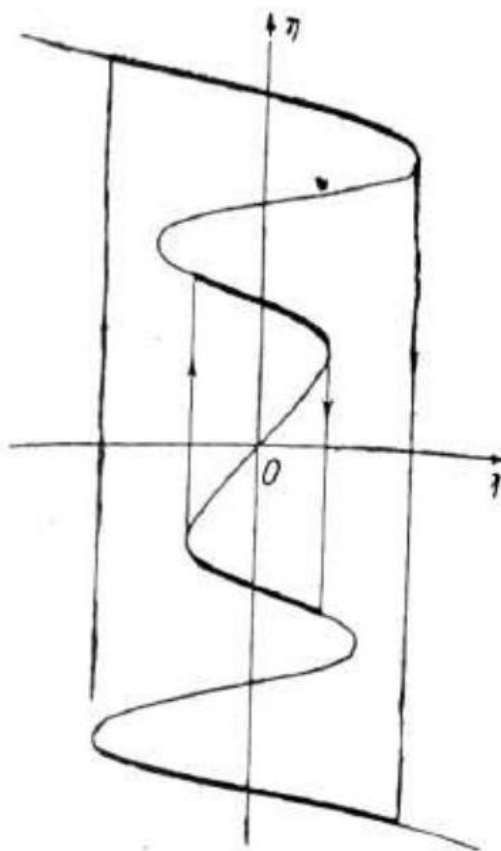


Fig. 76.

second order but rather immediately took up a circuit that led us to a discontinuous equation of the type (11.12) in which the inertial term was not taken into account.

Uptil now we have discussed a case in which a single closed cycle was present. If the curve characterising the relation (11.12) has the form shown in Fig. 76 we will obtain two closed cycles.

We note that the relaxation oscillating processes under study run without any external periodic forces and hence equation (11.12) is naturally called the equation of free relaxation oscillations.

The discontinuous treatment of the relaxation oscillating processes discussed here is only intuitively grasped. However, if we wanted to prove it strictly or calculate the corresponding errors for the form, and the period T , of the oscillations it would be necessary to turn to a rigorous method for asymptotic approximations worked out by A. A. Dorodnitsin.

10.3.4 12. Method of A. A. Dorodnitsin for Van-der-pol Equation

In the present section we shall discuss the method worked out by A.A. Dorodnitsin [15] with the help of which we can construct integral curves on the phase plane when $\varepsilon \gg 1$.

The essence of this method lies in the introduction of certain 'connecting' regions and the construction, for these regions, of particular asymptotic expansions in powers of $\frac{1}{\varepsilon}$.

As a definite illustration of this method we introduce, after A. A. Dorodnitsin, the solution of the Van-der-Pol equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (12.1)$$

for large values of the parameter ε^* .

On the phase plane (x, y) where $y = \frac{dx}{dt}$ this equation is transformed into the form

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon (1 - x^2) y + x = 0, \quad (12.2)$$

As we know, the limit cycle for equation (12.2) has the form shown in Fig. 77.

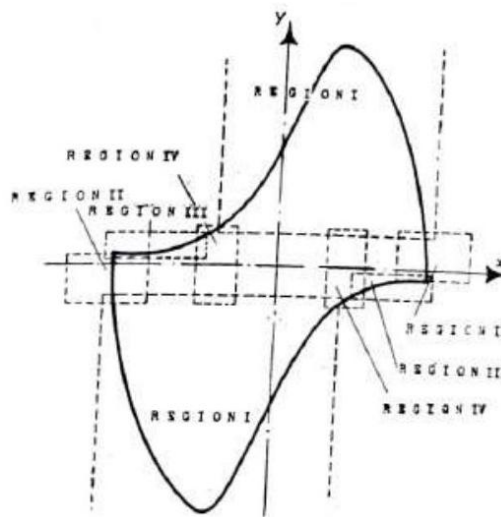


Fig. 77.

For large values of the parameter ε the solutions of equation (12.2) in the regions I and III tend towards the solutions of the "reduced" equations

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon (1 - x^2) y = 0 \quad (12.3)$$

$$- \varepsilon (1 - x^2) y + x = 0 \quad (12.4)$$

respectively.

However, regions I and III in which we can study equations (12.3) and (12.4) respectively, instead of equation (12.2), have no point in common. Hence the solutions of the equations can be treated as conjugate ones because it is not known as to how one should choose the constant of integration in equation (12.3) so that during the analytic continuation of the solution into region III it may pass over to the solution of the equation (12.4).

In order that such a conjugation of the solutions may be established, two 'connecting' regions II and IV are introduced and asymptotic solutions of equation (12.2) are constructed for these regions: in these we cannot use the "reduced" equation. The regions I, II, III and IV mutually intersect and hence we can derive the solution for any cycle with an accuracy of any order beyond $\frac{1}{\varepsilon}$.

We now discuss the construction of the asymptotic solutions of equation (12.2) for the regions introduced (vide Fig. 77). Hence we note that in view of symmetry we can examine only one part of each one of these regions.

We first construct a solution for the region I. For this we denote by a_1 and a_2 the values of x for which $\frac{dx}{dt} = 0$ (for the limit cycle $a_1 = a_2 = a$). The region I will be defined by the following inequalities:

$$\left. \begin{aligned} -1 + v < x < a_1 - v, y > 0, v > 0; \\ +a_2 + v < x < 1 - v, y < 0, v > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

As has been shown above it is sufficient to seek a solution of the first part of the region (12.5). We look for a solution in the form of a series

$$y = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_n(x) \quad (12.6)$$

Putting the value (12.6) of y into the equation (12.3) and equating coefficients of like powers of ε we obtain a system of equations from which we obtain successively all the $f_n(x)$'s ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$).

Thus, for the first two functions we have the expressions:

$$f_n(x) = c + x - \frac{1}{3}x^3 \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} \left[\ln \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{(2x + x_1)^2 - 3(x_1^2 - 4)}{4(x_1^2 - 3)} \right] - \\ + \frac{x_1^2 - 2}{x_1^2 - 1} \sqrt{x_1^2 - 4} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{2x + x_1} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_1}{\sqrt{3}(x_1^2 - 4) - 4}} \right] \end{aligned} \quad (12.8)$$

^{0*)} We note that V. Kazakevich worked out an interesting method for solving equation (12.1), ("On approximate integration of the Van-der-Pol equation", Doklady Academy of Sciences, XLIX, 6, 1945).

where x_1 denotes the real positive root of the equation $f_0(x) = 0$, it being supposed that $c > \frac{2}{3}$, which is true in the case of the limit cycle. The functions $f_n(x)$ have a singularity in the neighbourhood of the point $x = x_1$; however, the series (12.6) preserves its asymptotic character upto a value of x , satisfying the condition

$$O(x_1 - x) > O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2}\right)$$

In particular, Fig. (12.6) becomes an asymptotic series when $x = x_1 - O\left(\frac{1}{z}\right)$. Here y will be of the order of unity.

We now derive an asymptotic solution for the region II, in the neighbourhood of points $y = 0, x = a_1; y = 0, x = -a_2$. For the sake of definiteness we shall study that part of the region II for which $y = 0, x = a_1$.

We introduce a new variable z defined by $z = -zy$ and determine x as a function of z . Equation (12.2) is written in the form

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z^2} z (x^2 - 1) - x \quad (12.9)$$

We shall search for the solution of this equation in the form of the series

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) z^{-2n} \quad (12.10)$$

Putting the value (12.10) of x into equation (12.9) and equating coefficients of like powers of z we obtain a system of equations for determining the functions $\chi_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). For the first two functions we have the expressions

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= \frac{1}{a_1^2 - 1} [z + a_1^2 - 1 \ln(1 - a_1^2 - 1z)], \quad (12.11) \\ \chi_2(z) &= \frac{a_1^2 a_1^2}{(a_1^2 - 1)^1} \left\{ (a_1^2 - 1) = \left(z + \frac{a_1^2 + 1}{a_1(a_1^2 - 1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1} + 2a_1 z - 2(a_1^2 - 1)z^2 \right] \right\} \frac{\ln[1 - z(a_1^2 - 1)]}{1 - za_1^2 - 1} + a_1 = \quad (12.12) \end{aligned}$$

These functions have singularities for $z \rightarrow \frac{a_1}{a_1^2 - 1}$, and for $z \rightarrow -\infty$. The series (12.10), however, preserves asymptotic character for all values of z , satisfying the condition

$$O\left(\frac{a_1}{a_1^2 - 1} - z\right) > O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2}\right)$$

and also, when $z < 0$, for all z satisfying the condition

$$O(z) < O(\varepsilon^2)$$

Here, the series (12.10) converges asymptotically when $z = -\varepsilon$, i.e. $y = 1$.

As the series (12.6) and (12.10) converge asymptotically for the same values of x for which $y = O(1)$, we can make them conjugate. For this purpose it is necessary to determine the constant a_1 from the given value of the constant c . Assuming $y = 1$ in (12.6) and (12.10), we get the following two equations (with two unknowns x^* and u_1) :

$$1 = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^*) \varepsilon^{-2n}, \quad x^* = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(-\varepsilon) z^{-2n} \quad (12.13)$$

We find the value of x^* from the first equation and then obtain a_1 , in terms of either c or x_1 , from the second equation.

We now proceed to find the solution for the region III. This region is defined by the following intervals :

$$\left. \begin{aligned} a_1 - v > x > 1 + v, & \quad y < 0, & \quad v > 0; \\ -a_2 + v < x < -1 - v, & \quad y > 0, & \quad v > 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

and has essential significance for the relaxation oscillations. When x falls in the region (12.14), the oscillations of the system pass over, with a high level of accuracy, to the steady state oscillations.

We shall now examine that part of the region III for which $y = 0$. After some amount of calculation it is easy to show that the solution of equation (12.2) in this region may be obtained in the form of a series :

$$y = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \varepsilon^{-2n}, \quad (12.15)$$

where $P_n(x)$ are determined, as before, from a series of recurrence equations and are of the form

$$P_0(x) = x/x^2 - 1, \quad P_1(x) = -\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^1}, \dots \quad (12.16)$$

The series (12.15) retains its asymptotic character under the condition $O(x - 1) > O(\varepsilon - 2/3)$, $y(12.15)$ being of an order of $\varepsilon - 1/3$ while approaching the limit of convergence.

We now proceed to determine the solution in the region IV. This region is defined by the inequalities

$$\left. \begin{aligned} 1 - v < x < 1 + v, & \quad p < 0, & \quad v > 0; \\ -1 - v < x < -1 + v, & \quad p > 0, & \quad v > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

As shown above, while approaching the boundary of the region III, y approximates $O(\varepsilon^{-1/3})$. Hence, it is natural to change over to new variables:

$$y = -\varepsilon - 1/3Q(u), \quad u = z^{2/3}(x - 1). \quad (12.18)$$

Now, with this change the equation (12.2) assumes the form

$$Q \frac{dQ}{du} - 2uQ + 1 = z^{-2/3} (u^2Q - u) \quad (12.19)$$

We again search for the solution of this equation in the form of an asymptotic series

$$Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) \varepsilon - 2n/3 \quad (12.20)$$

We put this into equation (12.19), equate the coefficients of like powers ${}_0\varepsilon$ and obtain equations for determining the functions $Q_n(u)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) successively. Here, the initial conditions for $Q_n(u)$ must be so defined that the solution obtained will be conjugate to the solution in the region III.

After a series of calculations we get :

$$\begin{aligned} Q_0(u) &= u^2 + x + \frac{1}{u} - \frac{x}{3} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{4u^1} + \frac{x}{5u^5} + \dots, \\ Q_1(u) &= \frac{1}{A(u)} \left[C + \int_0^u A(u) \left(u^2 - \frac{u}{Q_0} \right) du \right] \\ A(u) &= \exp \left(- \int_0^u \frac{du}{Q_0^2} \right) \end{aligned} \quad (12.21)$$

where z is the lowest root of the equation

$$J_{1/3} \left(\frac{2}{3} - 3/2 \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} - 3/2 \right) = 0.$$

For conjugation with the solution (12.15) for the region III, it is necessary that when $u = Q(\varepsilon'')$, the quantity $\varepsilon - 2/3 Q_1(u)$ be bounded.

Analysing the expression for $Q_n(u)$, we find that the series (12.20) preserves its asymptotic character upto values of x limited by the condition $Q(u) < Q(\varepsilon^{2/3})$, i.e. for values of x satisfying the condition $0(x-1) < 0(1)$, and thus the regions to which the solutions (12.20) and (12.15) are suited intersect each other.

It now remains to conjugate the solutions for the regions I and IV. For this we must conjugate the solution (12.6) with the solution (12.20) changing the variables in the latter according to (12.10).

We note that since $y > 0$ for $x = -1$, the constant c must be greater than $2/3$.

We put $c = \frac{2}{3} + \gamma$ and determine the order of y . Since, $y(-1) = 0(z^{-13})$, z_y will also be of the order z^{-13} and hence $\gamma = 0(\varepsilon^{-43})$.

It is not difficult to show that the series (12.6) preserves asymptotic character upto values of x satisfying the condition $0(x-1) > 0(\varepsilon^{-13})$,

METHOD OF A. A. DORODNITSIN FOR VAN-DER-POLE RELATIONS

and thus, the regions to which the solutions (12.20) and (12.5) are suited intersect, the asymptotic convergence of these expansions being guaranteed for $x = -1 + \varepsilon^{-13}$.

Thus the constant of integration c may be determined by equating, when $x = -1 + \varepsilon^{-1/3}$, the values of y obtained from the formulae (12.20) and (12.6) :

$$\varepsilon^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2/3n} Q_n(-\varepsilon^{-1/3}) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_x(-1 + \varepsilon^{-1/3}). \quad (12.22)$$

Evaluating :- from this equation with an accuracy of the order ε^{-83} , we obtain

$$y = a\varepsilon^{-43} - \frac{4}{9} \ln \varepsilon + \left(b_0 - 1 - \frac{2}{3} \ln \frac{3}{2} \right) \varepsilon^{-2} + 0(\varepsilon^{-33}), \quad (12.23)$$

where $b_0 = b_0(\alpha)$ is a known quantity.

Defining the constant $c = \frac{2}{3} + \gamma$, it is easy to find x_1 , the root of the equations $f_0(x_1) = 0$. Then by using the equations (12.12) we obtain for the amplitude of the autonomous oscillations

$$\begin{aligned} a \approx & 2 + \frac{a}{3} \varepsilon^{-43} - \frac{16 \ln \varepsilon}{27 \varepsilon^2} + \\ & + \frac{1}{9} (3b_0 - 1 + 2 \ln 2 - 8 \ln 3) \varepsilon^{-3} + O(\varepsilon^{-83}) \end{aligned} \quad (12.24)$$

The period of these oscillations may be calculated by the formula

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{y(x)}. \quad (12.25)$$

For this purpose we divide the whole range of integration into five parts corresponding to different regions:

1. from $-a$ to $-x_2$, corresponding to region II. Here x_2 is the value of x obtained from (12.10) with

$$z = \frac{(1 - 3^{-43})a}{a^2 - 1};$$

2. from $-x_2$ to $-(1 + z^{-13})$, corresponding to region III;
3. from $-(1 + \varepsilon^{-1/3})$ to $-(1 - \varepsilon^{-13})$, corresponding to region IV ;
4. from $-(1 - \varepsilon^{-1/3})$ to x^* , corresponding to region I. Here x^* is determined from the formula

$$\begin{aligned} x^* = x_1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{x_1^2 - 1} - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2 (x_1^2 - 1)^2} - \\ - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \ln x_1 (x_1^2 - 1) - \frac{g}{x_1^2 - 1} + \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^3} \right] - \\ - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^3} (x_1^2 - 1)^4 + O(\varepsilon^{-3}); \end{aligned} \quad (12.26)$$

5. from x^* to a , corresponding to region II .

In this case the full period T will be

$$T = 2 [T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5] \quad (12.27)$$

where T_i is the part of the integral (12.25) taken over the i -th interval of integration.

Performing the integration for the full period, we obtain

$$\begin{aligned} T \approx (3 - 2 \ln 2)\varepsilon + 3\alpha\varepsilon^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + \\ + \left(3 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6} + b_0 - 2d \right) \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}) \end{aligned} \quad (12.28)$$

or putting the numerical values of the coefficients :

$$T \approx 1.613706\varepsilon + 7.01432\varepsilon^{-1/3} - \frac{22 \ln \varepsilon}{9} + 0.0087\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}) \quad (12.29)$$

When ε is sufficiently large we neglect in this formula all terms except the first. As a result of this we obtain an asymptotic expression for the period which agrees with the formula (11.10) obtained in the previous section.

For the asymptotic solutions (12.6), (12.10), (12.15) and (12.20) we can prove without a difficulty the (asymptotic) convergence in the corresponding regions by the method of successive approximations.

It has already been clear from the asymptotic formulae obtained here that the case of large values of ε is considerably more complex than the case of small values. When $\varepsilon \ll 1$ we had pure asymptotic formulae in the form of power series. Here, however, for $\varepsilon \gg 1$ there enter fractional powers and logarithmic terms. We have greater sensitivity in such a form of the equation than in the case $\varepsilon \leq 1$. Hence it is natural that when non-linearity is large the actual construction of the approximate solutions requires greater particularisation of the differential equations under study.

We note that for studying this important and difficult problem of deriving the asymptotic solutions in the presence of a large parameter (or a small parameter before the highest derivative) we can successfully apply the effective asymptotic methods developed by A.N. Tishonov [43] and his followers.

10.4 3 Influence of External Periodic Forces

13. Asymptotic expansions in the 'non-resonance' case

We now proceed on to study the oscillating systems, subject to the action of external periodic forces explicitly depending on time.

We shall examine a system with one degree of freedom, in which case the differential equation of the motion may be represented in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (13.1)$$

where ε is a small positive parameter, $f(vt, x, \frac{dx}{dt})$ a function periodic in vt with a period 2π , and may be represented in the form

$$f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^N e^{invt} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (13.2)$$

Here we would suppose that the coefficients $f_n(x, \frac{dx}{dt})$ in the finite sum (13.2) are some polynomials in x and $\frac{dx}{dt}$.

The equation (13.1) may, evidently, be interpreted as the equation of oscillations of a certain mechanical system having unit mass and a natural frequency (ω), and subject to the action of a small non-linear perturbation $\varepsilon f(vt, x, \frac{dx}{dt})$ explicitly depending on time. We have come to be apprised of the numerous examples of oscillations described by an equation of this type in the Introduction.

Before passing over to a discussion of the methods used for deriving asymptotic solutions of equation (13.1), we would once more dwell upon the analysis of the influence of a periodic action upon the system, from the point of view of physical considerations.

When perturbation is absent, i.e. when $\varepsilon = 0$, we obtain pure harmonic oscillations:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi), \\ dx &= -a(\omega) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

where a and φ are arbitrary constants.

It is obvious that if we determine the functions $u_1, u_2, \dots$ by using methods discussed in the previous Chapter, then because of the time dependence of the external action the Fourier series expansion of the function $\varepsilon f(vt, x, \frac{dx}{dt})$ (after putting $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ and $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$ in it), which is periodic in vt , would contain terms containing $\sin(nv + m\omega)t$ and $\cos(nv + m\omega)t$, where m and n are integers. Thus, harmonic components with combination frequencies of the

type $(nv + m\omega)$ will appear in the right-hand-side of the differential equations determining $u_1, u_2, \dots$

It is perfectly clear that when one of such combination frequencies approaches the natural frequency of the system, the corresponding harmonic of the perturbing force may exert considerable influence on the nature of the oscillations even if the corresponding coefficient in the expression for the imposed perturbing force appears to be very small (amplitude of the corresponding harmonic be small). It goes without saying that in order that this influence might be considerable, the smaller this coefficient is, the smaller must be the detuning between natural and external frequency.

Thus in the non-linear oscillatory systems, the resonance phenomena occur not only when $\omega \approx \nu$ as in ordinary linear systems, but also when one of the combination frequencies of the external force is near the natural frequency of the system, i.e. if $nv + m\omega \approx \omega$.

Thus, in the non-linear oscillatory systems, resonance may ensue upon the fulfilment of the condition

$$v \approx \frac{p}{q}\omega, \quad (13.3)$$

where p and q are mutually prime integers (usually small). We introduce the following classification of the various cases of resonance :

1. $p = q = 1$, i.e. $v = \omega$; this case will be called 'chief' or 'ordinary resonance' ;
2. $q = 1$, i.e. $v = p\omega$ or $\omega = \frac{v}{p}$; this will be called 'overtone resonance of the natural frequency' or 'demultiplicative resonance' (fractional, because in this case oscillations occur with a frequency equal to a fractional part of natural frequency) or 'parametric resonance'. Resonance of this type is also possible in linear systems with periodic coefficients ;
3. $p = 1$, i.e. $\omega \approx qv$; this case will be called 'overtone resonance of the external frequency'.

Here it is necessary to note the following circumstance. Because p and q may take up all possible integral values, the set $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ is compact and hence the ratio $\frac{p}{q}$, with proper choice of the numbers p and q , may approach any previously given number. Hence one may carry the impression that resonance is possible for arbitrary p and q in a nonlinear system. In fact it is not so, because not all the possibilities flowing from the equation (13.3) are practically realised, speaking otherwise there will not be resonance corresponding to any p and q .

In practice, the expansion (13.2) has a finite number of terms and the numbers p and q are fully determined by the nature of the given oscillatory system.

Now we shall find out the resonances that appear in the first approximation, We shall assume, as usual, that oscillations in the first approximation remain purely harmonic and in each individual cycle may approach ordinary harmonic with sufficient accuracy. Any small perturbing force of any complex structure whatsoever, may influence the course of oscillations by giving rise to slow but systematic changes in the amplitude and the phase of oscillations (slow compared to the natural unit of time, compared to time, period of the oscillation).

By the definition of resonance we can consider that the resonance is characterised just by the fact that a small perturbing force may lead to a large, sometimes very large, changes in the amplitude of the oscillations. This takes place when the work performed by the external force during a cycle of oscillation is not destroyed, because in the opposite case the external force might give rise to small 'chattering' (vibration).

The expression for the perturbing force $\varepsilon \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right)$ during the regime of harmonic oscillations (i.e. when

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

contain, as shown above, several harmonics with frequencies $\pm n \pm m\omega$.

We now construct the expression for the virtual work that might be performed, by this perturbing force during the regime of harmonic oscillations, in giving virtual displacements

$$\delta x_0 = \delta a \cos(\omega t + \varphi) - \delta \varphi a \sin(\omega t + \varphi), \quad (13.4)$$

corresponding to the virtual increase in amplitude and the phase of the oscillations.

For the purpose of calculations it is convenient to express the expression for the virtual work during the harmonic oscillation regime

$$\varepsilon f \left(vt, x_0, \frac{dx_0}{dt} \right) \delta x_0 \quad (13.5)$$

in the form of a sum of harmonic terms with frequencies

$$\lambda_{nm} = nv + m\omega,$$

with the help of Fourier series. But if we average this sum for a sufficiently large time-interval, only those terms for which the frequencies λ_{nm} are correspondingly small, will be of importance in this sum.

Thus, in the first approximation, only such resonances appear for which the frequencies in the expressions for the virtual work (13.5) are sufficiently near zero. Indeed, the intensity of resonance will be weaker, lesser the corresponding amplitude in the expression (13.5).

After these preliminary remarks we proceed on to the formulation of methods for the actual construction of approximate solutions.

- We start by examining an oscillatory system described by equation (13.1), at first in the non-resonant case being the simplest one, i.e. we will assume that none of the combination frequencies ($nv + m\omega$) entering into the approximations under view is not equal (and not near) to the frequency ω :

$$nv + m\omega \neq \omega. \quad (13.6)$$

Here we refer to a well-known fact in the theory of numbers. If $\frac{1}{\omega}$ be irrational, it is always possible to choose integers n and m such that the expression

$$m + (m - 1)\omega$$

is as near zero as desired.

Hence if harmonics with all the linear combinations $nv + mo$ are present in the expression for the approximate solution in question, conditions have to be imposed in order that the ratio $\frac{10}{(0)}$ may not be approximated by a rational number too quickly and result in the divergence of the expression in question (vide p.212).

While proceeding to construct the approximate solution of the differential equation (13.1), we shall start, as in the case of perturbation not containing time explicitly, from the same intuitive considerations.

When perturbing forces are completely absent ($\varepsilon = 0$) oscillations will evidently be purely harmonic, $x = a \cos \psi$, with a constant amplitude and a uniformly increasing phase-angle : $\frac{da}{dt} = 0, \frac{d\psi}{dt} = \omega$.

The influence of a perturbing force will be expressed in that, firstly, there would in the oscillations, appear not only overtones but also harmonics of combination frequencies of different orders of smallness ; and hence the solution has to be sought in the form:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi, vt) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, vt) + \dots \quad (13.7)$$

Here functions $u_1(a, \psi, vt), u_2(a, \psi, vt), \dots$ are periodic in both the angular variables ψ and v with a period 2π .

Secondly, now neither the amplitude of oscillation nor the velocity of phase rotation can remain constant and these should be determined, as in the preceding Chapter, by the differential equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

The right-hand-sides of these equations must depend only upon the amplitude, because in the absence of resonance the phase of the natural oscillations is not related to the phase of the external forces and hence the latter does not exert any influence either on the amplitude or on the full phase of the oscillation. Indeed, in the case of resonance we have to introduce the phase shift dependence not only in the expression for the instantaneous frequency but also in the expression for the instantaneous amplitude.

Thus the problem of the construction of approximate solutions of equations (13.1) in the non-resonant case reduces to one which is analogous to that discussed in the first section. We have to derive functions

$$u_1(a, v, vt), u_2(a, v, vt), \dots, \quad A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$$

such that the expression (13.7), with a and substituted by functions of time defined by equations (13.8), will be a solution of our original equation (13.1).

As in the first section, after we have derived explicit expressions for the coefficients of the expansions standing on the right-hand-sides of (13.7) and (13.8), the problem of integrating equation (13.1) reduces to the simpler problem of integrating equations (13.8). We should note that while determining a and in the non-resonance case we obtain an equation with separable variables. Further in the resonance cases, as we shall see below, variables in these equations do not let themselves be separated in the general case.

Before we proceed on to construct functions $u_1(a, v, vt), u_2(a, v, vt), \dots, \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$, it is necessary to introduce, as before, some additional conditions in order to determine the coefficients appearing in expansions (13.8) uniquely.

It is natural that one may take such conditions, as the condition necessary for the absence of resonance terms in the functions $u_1(a, i, vt), u_A(a, t, v, t), \dots$, i.e. terms whose denominators may turn to be zero.

This condition is equivalent to the condition for the absence of first harmonic of the argument ψ in the functions $u_1(a, \psi, vt), u_2(a, \psi, vt), \dots$. From the physical point of view, this corresponds to the choice of a as the full amplitude of the fundamental harmonic of the oscillation.

After these preliminary remarks we now proceed on to determine the functions $u_1(a, \psi, vt), u_2(a, \psi, vt), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$, taking into consideration the additional conditions proposed above.

Differentiating (13.7) we have

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\
&+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} + \\
&+ \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots, \quad (13.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2a}{dt^2} + \\
&+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \\
&+ \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \\
&+ \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right\} \times \\
&\times \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + 2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\
&+ 2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} + \\
&+ 2 \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right\} \times \\
&\times \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \quad (13.10)
\end{aligned}$$

Replacing $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d\psi}{dt}$ and $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in equation (13.10) by their expressions given by formulae (13.8) and (1.10) of the first section, we obtain the values of $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$. Putting these values and also those given by equation (13.7), in the left-hand-side of equation (13.1) and rearranging the result in powers of a small parameter ε we obtain

$$\begin{aligned}
d^2x d\omega^2 x &= \\
&= \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} \omega + \omega^2 u_1 - 2a\omega B_1 \cos \psi - 2\omega A_1 \sin \psi \right\} \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \omega^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial t} \omega + \omega^2 u_2 - 2a\omega B_2 \cos \psi - 2\omega A_2 \sin \psi - \right. \\
&+ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 \right) \cos \psi - \left(aA_1 \frac{dB_1}{da} + 2A_1 B_1 \right) \sin \psi - \\
&+ 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} B_1 \left. \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (13.11)
\end{aligned}$$

The right-hand-side equation (13.1), by virtue of (13.7) and (13.9) may be represented in the form

$$\left. \begin{aligned}
f \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right) &= \varepsilon f(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\
&+ \varepsilon^2 [f'_x(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \\
&+ f'_{x'}(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\
&\times \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)] + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

In order that the solution (13.7) we seek, may satisfy the original equation (13.1) with an accuracy of the order of ε^{m+1} (as before, we shall limit ourselves to the m -th approximation),

it is necessary to equate the coefficients of equal powers of ε in the right-hand-sides of (13.11) and (13.12) upto m -th order terms.

Thus we obtain a system of m equations for determining $u_1(a, \psi, vt), u_2(a, \psi, vt), \dots, u_m(a, \psi, vt)$ and also $A_1(a), A_2(a), \dots, A_m(a), B_1(a), B_2(a), \dots, B_m(a)$:

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = f_0(a, \psi, vt) + 2a\omega B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi. \quad (13.13)$$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 = f_1(a, \psi, vt) + 2a\omega B_2 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi$$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \omega^2 u_m =$$

$$= f_{m-1}(a, \psi, vt) + 2a\omega B_m \cos \psi + 2\omega A_m \sin \psi,$$

Here, for brevity, we have put

$$f_0(a, \psi, vt) = f(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi),$$

$$f_1(a, \psi, vt) = f'_x(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)u_1 + f'_{x'}(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] + \left(aB_1^2 - \frac{dA_1}{da} A_1 \right) \cos \psi + \\ & + \left(\frac{dB_1}{da} A_1 a + 2A_1 B_1 \right) \sin \psi - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \\ & - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} \omega A_1 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Evidently the functions $f_k(a, \psi, vt)$ are periodic functions with a period 2π for both the arguments ψ and vt and moreover these depend on a . The explicit expression for these functions will be known as soon as the values of $A_j(a), B_j(a), u_j(a, \psi, vt) (j = 1, 2, \dots, k)$ are found.

Before we proceed to determine the functions in hand we would give a brief discussion of the theory of multiple Fourier series.

If $f(x)$ be any periodic function of x with a period 2π (for any arbitrary period $2l$ we can arrive at the period 2π by a linear transformation of x), we know that it can be represented, under certain restrictions, in the form of Fourier series :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}, \quad (13.16)$$

where

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi. \quad (13.17)$$

In many cases it is convenient to use Fourier series in the complex form. In this case $f(x)$ may be represented in the form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (13.18)$$

where

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-in\xi} d\xi \quad (13.19)$$

(Here the index n takes up not only integral positive values but negative ones also). Here we have the following connection between the Fourier coefficients (13.19) and (13.17) :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (13.20)$$

We now take up the function $f(x, y)$ as a periodic one with a period 2π for both the variables x, y . Formally looking upon $f(x, y)$ as a function of x we have

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y) e^{inz}, \quad (13.21)$$

where

$$c_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, y) e^{-in\xi} d\xi \quad (13.22)$$

The function $c_n(y)$ in its turn may also be expanded into series in the form

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{imy}, \quad (13.23)$$

where

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_n(\eta_1) e^{-im\eta_1} d\eta_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, \eta) e^{-i(n\xi + m\eta)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (13.24)$$

Putting the expression obtained for $c_n(y)$ in (13.21) we have

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx + my)}, \quad (13.25)$$

or, in short,

$$f(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx + my)}, \quad (13.26)$$

which generalises the Fourier series in the case of two variables.

Exactly in the same way, for the periodic function $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ in N independent variables with a period 2π for each variable, we have

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \dots n_N} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_N x_N)} \quad (13.27)$$

where

$$c_{n_1 n_2 \dots n_N} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) e^{-i(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \dots + n_N \xi_N)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N. \quad (13.28)$$

The above-mentioned form for a multiple Fourier series with complex exponents is very convenient for calculations. However, it should be noted that it is completely equivalent to the usual form of expansion in terms of sines and cosines and hence the conditions for its convergence will be same.

We now proceed on to determine $A_1(a)$, $B_1(a)$ and $u_1(a, \psi, vt)$ from the equation (13.13). For this purpose we expand $f_0(a, \psi, vt)$ into a double Fourier series :

$$f_0(a, \psi, vt) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt + m\psi)} \quad (13.29)$$

where

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) e^{-i(n_0 + m'_+)} d\theta d\psi$$

We represent $u_1(a, \psi, vt)$ in the Fourier series:

$$u_1(a, \psi, vt) = \sum_n \sum_m \bar{f}_{nm}(a) e^{i(nvt + m\psi)} \quad (13.30)$$

Substituting the values of $f_0(a, \psi, vt)$ given by (13.29) and $u_1(a, \psi, vt)$ given by (13.30) in equation (13.13), we get

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \{ \omega^2 - (nv + m\omega)^2 \} \bar{f}_{nm}(a) e^{i(nvt + m't)} = \\ = 2a\omega B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi + \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt - m't)}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

It is necessary to determine such values of $\bar{f}_{nm}(a)$, $A_1(a)$ and $B_1(a)$, in that $u_1(a, \psi, vt)$ does not contain resonance terms. This latter condition is fulfilled if $A_1(a)$ and $B_1(a)$ are determined from the relation

$$\begin{aligned} 2a\omega B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi = - \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt + m'_t)}. \\ [\omega^2 - (nv + m\omega)^2 = 0] \end{aligned} \quad (13.32)$$

Equating the coefficients of the same harmonics in expression (13.31), we obtain

$$\bar{f}_{nm}(a) = \frac{f_{nm}^{(\theta)}(a)}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2}$$

for all values of n and m , satisfying the inequality

$$\omega^2 - (nv + m\omega)^2 \neq 0$$

or satisfying

$$n^2 + (m^2 - 1)^2 \neq 0 \text{ (i.e. } n \neq 0, m \neq \pm 1)$$

as we restrict ourselves to the non-resonance case. Substituting the value of $\bar{f}_{nm}(a)$ thus obtained in equation (13.30) and putting, for brevity, $vt = 9$. we obtain for $u_1(a, \psi, vt)$:

$$\begin{aligned} \mu_1(a, \psi, \theta) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi \end{aligned} \quad (13.33)$$

or changing over to trigonometric functions:

$$\begin{aligned} u_1(a, \psi, \theta) = & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n,m} \left\{ \frac{\cos(n\theta + m\psi)}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \right. \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) \cos(n\theta + m\psi) d\theta d\psi + \\ & + \sin(n\theta + m\psi) \\ & \left. (n^2 - (nv + m\omega)^2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) \sin(n\theta + m\psi) d\theta d\psi \right\} \end{aligned} \quad (13.31)$$

Equating the coefficients of equal harmonics in (13.32), we obtain for $A_1(a)$ and $B_1(a)^*$

$$\begin{aligned} A_1(a) = & -\frac{1}{4\pi^2(0)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, 0) \sin \psi d\theta d\psi \\ B_1(a) = & -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) \cos \psi d\theta d\psi \end{aligned} \quad (13.35)$$

After we have obtained the values of $u_1(a, \psi, \theta)$, $A_1(a)$ and $B_1(a)$ we easily get an explicit expression for $f_1(a, \psi, \theta)$ by using equation (13.15). Further, expanding it in Fourier series and using the equation (13.14), and also considering the condition for the absence of resonance terms in the expression for $u_2(a, \psi, \theta)$, we similarly obtain the values of $u_2(a, \psi, \theta)$, $A_2(a)$ and $B_2(a)$, which is necessary for constructing the second approximation. After a series of calculations we get :

$$\left. \begin{aligned} u_2(a, \psi, \theta) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{(n^2+(m^2-1)^2 \neq 0)} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi, \theta) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi \\ A_2(a) = & -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{dB_1}{da} a A_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ & -\frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \right. \\ & + f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) (A_1 \cos \psi - \\ & - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} v) \left. \right\} \sin \psi d\theta d\psi \\ Q_2(a) = & \frac{1}{2a\omega} \left[\frac{dA_1}{da} A_1 - aB_1^2 \right] - \\ & -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \right. \\ & + f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) (A_1 \cos \psi - \\ & - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} v) \left. \right\} \cos \psi d\theta d\psi \end{aligned} \right\} \quad (13.37)$$

^{0*)} It is easily seen that right-hand-side expression (13.32) contains only the first harmonic of the angle ψ .

Continuing this process of the successive determination of the expressions we require, we can construct the solution of the equation (13.1) to any approximation.

We note that if we proceed from considerations similar to those stated in Chapter I, there is no sense in retaining in the right-hand-part of the series (13.7) terms of the order s^n , while constructing the n -th approximation.

Closing the discussion of the non-resonance case we note that according to formula (13.35) only the free term $f_0(x, \frac{dx}{dt})$ of the expansion (13.2) for the perturbing force $f(0, x, \frac{dx}{dt})$ appears in the equation of the first approximation.

From the equation (13.2) we have the identity:

$$f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) dt \quad (13.38)$$

Hence, for obtaining the equation of the first approximation we may average the perturbing force over the time contained in it explicitly; after which we may take recourse to the formulae (1.27) of the first section.

Because the equations of the first approximation have, as also in the non-resonance case, the same form as the equations of the first approximation for the case (1.1) (i.e. for the case when the external perturbing forces do not depend on time explicitly) already discussed by us in detail, we would not stop here to study them.

Here, we would restrict our study only to a discussion of the expression for x in the second approximation :

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi, \theta) \quad (13.39)$$

where $u_1(a, \dots, 0)$ is determined by formula (13.33) or (13.34).

According to the formulae (13.39) and (13.34) the external periodic force in the non-resonance case exerts influence on the second approximation. Thus, for example, it follows straightaway from formula (13.39) that different combination harmonics, components with frequencies of the compelling force of different multiplicity, etc., may appear only in a solution in the second approximation. The amplitudes of all these additional harmonics will be of the order ε .

We examine once again the formula (13.39) in the case of stationary oscillations:

$$a = \text{const}, \psi = (1)(a)t + \vartheta, \theta = \text{const}. \quad (13.40)$$

In this case, the oscillating magnitude x comprises of natural oscillation with a frequency $\omega(a)$ (represented by the term $a \cos[\omega(a)t + \theta]$), forced oscillations with frequencies $m(n = 1, 2, 3, \dots)$ and combination oscillations with frequencies $nv \pm m\omega(n, m = 1, 2, 3, \dots)$. Here the intensity of the combination oscillations having frequency $nv + m\omega$ increases as it approaches the corresponding resonance, i.e. as the denominator in question, $\omega^2 - (nv \pm m\omega)^2$ decreases. .

In the particular case, when natural oscillations are absent, i.e. when $a = 0$, the formula (13.39) degenerates to

$$x = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{\omega^2 - n^2 v^2} \quad (13.41)$$

where

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, 0, 0) \cos n\theta d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, 0, 0) \sin n\theta d\theta$$

Thus, when $a = 0$ only forced oscillations with frequencies equal to those of the external excitations, nv ($n = 1, 2, 3, \dots$) are found in the oscillatory system.

Hence, in the given case we have to deal with the purely forced oscillations. Oscillations corresponding to formula (13.41) are often called hetero-periodic, because the periods of all the harmonics of the oscillation are thrust on the system from outside.

If the oscillatory system under study is such that the equivalent damping coefficient for the component $\varepsilon f_0(x, \frac{dx}{dt})$ (not depending on time explicitly) of the perturbation function $\varepsilon f(t, x, \frac{dx}{dt})$ is positive :

$$\dot{\lambda}_0^*(a) > 0, \quad (13.42)$$

where

$$\begin{aligned} \lambda_0^*(a) &= \frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\theta d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned}$$

we have (vide 7)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$$

and hence when the inequality (13.42) is satisfied any oscillation approaches the hetero-periodic one so that the hetero-periodic regime will be the only possible stationary regime.

The condition (13.42) for damping of the natural oscillations, generally speaking, depends on the amplitude of external periodic force. In the absence of external excitation, i.e. in a case when the right-handpart of the equation (13.1) does not explicitly depend on time, we obtain the usual condition for self-excitation

$$\lambda_0(a) < 0 \quad (13.43)$$

The corresponding condition for damping is

$$\lambda_e(a) > 0 \quad (13.44)$$

where

$$\lambda_*(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(0, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

Simultaneous fulfilment of the conditions (13.43) and (13.42) can be ensured depending on the composition of the non-linear function $f(0, x, \frac{dx}{dt})$. In this case it appears that a system which is self-exciting

*) $f(0, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)$ denotes the perturbing force $f(\theta, x, \frac{dx}{dt})$ in which $x = a \cos \psi$, $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \psi$ have been substituted and the amplitudes of the external periodic components are zero.

in the absence of external periodic influence loses self-excitation when an external periodic influence is present. Here we are concerned with the so-called non-resonance or asynchronous quenching.

We can also represent the opposite case of asynchronous excitation in a similar manner.

We had assumed in the beginning of the preceding section that the right-hand-side of the differential equation (13.1), $f(t, x, \frac{dx}{dt})$, is a periodic function in t with a period $\frac{2\pi}{v}$ and further can be represented in form of a finite sum (13.2), in which the coefficients $f_n(x, \frac{dx}{dt})$ are certain polynomials in x and $\frac{dx}{dt}$.

If we introduce a more general assumption that the function $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ can be represented in the form of a uniformly converging series

$$f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inv t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (13.45)$$

in which $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ are some arbitrary regular functions of x and $\frac{dx}{dt}$, then the double infinite series of the type

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, 0) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi \quad (13.46)$$

appears in the expressions for $u_1(a, \psi, \theta)$ and $u_2(a, \psi, \theta), \dots$ instead of the finite sums.

Because of presence of a denominator of the form $\omega^2 - (nv + m\omega)^2$ these series, in general, will be divergent.

As we know, in the general case, the points of divergence for series of this kind lying on the axis ν (i.e. value of ν for which the series diverges) forms a dense set everywhere.

Thus whatever be the value of ν , we can always obtain a value ν_0 as near to ν as desired, such that for this value the series (13.46) diverges.

On the other hand, we note that for almost any value of the ratio " (i.e. excluding the null set) we can derive*) such values of C and δ, ω that

$$\left| \frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} \right| \geq ccC(|p| + |q|)^{2+3}$$

for any integers p and q .

But in this case

$$|n\gamma + (m \pm 1)\omega| \geq \frac{C\omega}{n^{j+1}}$$

and hence each term of the series (13.46), in absolute magnitude, will be less than

$$\frac{n\delta^{+1}}{C\omega} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi \right|$$

Thus, the given series will be absolutely convergent only if $f_0\left(a, \frac{2}{4}, \theta\right)$ has a sufficient number of continuous partial derivatives with respect to the variable angles ψ and θ .

However, without going into such a theoretical and numerical hair-splitting, it is expedient in practice, not to carry the matter until an infinite sum of harmonic components appears and to attribute the residues of the series to the higher powers of ε .

*) Indeed we fix a certain positive quantity δ and a positive η as small as possible. We take a positive C such that

$$2C \sum_{|n|+|m| \geq 1} \frac{1}{(|n| + |m|)^{2+\delta}} \leq r_n$$

and construct a set of intervals l_{nm} (for any positive or negative numbers n, m) with the centre at the points $\frac{n}{m}$ and lengths $\frac{2C}{(|n|+|m|)^{2+\delta}}$.

On the one hand, it can be seen that for any number x not belonging to any of the intervals $I_{m,n}$, the inequality

$$\left| x - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{C}{(|n| + |m|)^{2+\delta}} \quad (\alpha)$$

is satisfied for all integers n, m .

On the other hand, the set x , which belongs to one of the intervals, has a measure less than

$$\sum_{n,m} \text{mes } l_{n,m} \leq \eta$$

Thus, for all x , with a possible exception of x belonging to a set with a measure less than η , the inequality (α) is fulfilled.

10.4.1 14. Resonance Cases

We now proceed on to the examination of the resonance cases. We assume that

$$\omega \approx \frac{p}{q}v,$$

where p and q are mutually prime numbers.

In this case, depending on the nature of the problem facing us, two different approaches to its solution may be made: 1) while studying resonance it is sufficient to limit ourselves to a study of the resonance domain only; 2) besides studying the resonance domain it is also necessary to pass over to this domain from the non-resonance zone.

We begin examining the first case, being the simplest. In view of the fact that in this case we propose to examine the value $\frac{p}{q}v$, sufficiently near to ω , it is natural to put

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q}v\right)^2 + \varepsilon\Delta, \quad (14.1)$$

where $\varepsilon\Delta$ represents the separation between the square of the natural and the external frequencies.

Hence the original equation (13.1) is written in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q}v\right)^2 x = \varepsilon \left\{ f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) - \Delta x \right\}. \quad (14.2)$$

Thus we attribute the detuning $\varepsilon\Delta$, owing to its smallness, to perturbing force. Therefore the solution of the equation (14.2) may be sought, as in the non-resonance case, in the form

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, vt, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, vt, \psi) + \dots, \quad (14.3)$$

where $u_1(a, vt, \psi), u_2(a, vt, \psi), \dots$ are periodic functions of the two angular variables vt and ψ and a and ψ are some functions of time which we must determine from certain differential equations.

For constituting these equations it is convenient to examine, besides the angular variable ψ representing the full phase of oscillation, the phase difference

$$\theta = \psi - \frac{p}{q}vt.$$

As has already been shown above, it follows from simple physical considerations that in the resonance cases the phase difference between the natural oscillation and the external action may exert vital influence on the change in the amplitude and the frequency of the oscillation. Hence in contradistinction to the cases examined above we would present da and $\frac{d\psi}{dt}$ as functions not only of a but also of ϑ . Speaking otherwise, we shall define a and ψ as the solutions of differential equations of the form :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p}{q}v + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

where $A_1(a, \vartheta), A_2(a, \vartheta), \dots, B_1(a, \vartheta), B_2(a, \vartheta), \dots$ are periodic functions of the angular variable θ with period 2π .

As the phase-angle θ , instead of the full phase enters into the right-hand-side of the expressions for $\frac{da}{dt}$ and $\frac{d\psi}{dt}$, it is expedient to exclude ψ from the expression (14.3) and the equations (14.4).

Hence assuming $\psi = \frac{p}{q}vt + \theta$, we obtain, instead of (14.3), the expression

$$\begin{aligned} x = a \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) + \varepsilon u_1 \left(a, \theta, \frac{qv}{q}t \right) + \\ + \varepsilon^2 u_2 \left(a, \theta, \frac{qv}{q}t \right) + \dots, \end{aligned} \quad (14.5)$$

in which the time functions a and θ must satisfy the equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

$$\begin{aligned} A_1(a, \theta), A_2(a, \theta), \dots, B_1(a, \theta), B_2(a, \theta), \dots, u_1 \left(a, \theta, \frac{p}{q}t \right), \\ u_2 \left(a, \theta, \frac{p}{q}t \right), \dots, \end{aligned}$$

in such a way that the expression (14.5) with solutions of equations (14.6) substituted for a and ϑ satisfy the basic equation (14.2) under study.

Differentiating (14.5) we arrive at :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\
&+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \dots \right\} \frac{d\theta}{dt} + \\
&+ \left\{ -a \frac{p}{q} v \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots \right\}, \tag{14.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2a}{dt^2} + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \\
&+ 2 \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \\
&+ 2 \left\{ -\frac{p}{q} v \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\
&+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \dots \right\} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \\
&+ \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} + \dots \right\} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \\
&+ 2 \left\{ -a \frac{p}{q} v \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} + \dots \right\} \frac{d\theta}{dt} + \\
&+ \left\{ -a \left(\frac{p}{q} v \right)^2 \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \right\}. \tag{14.8}
\end{aligned}$$

Further, from (14.6) we have :

$$\left. \begin{aligned}
d^2a &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\
\left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \varepsilon^2 B_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \\
d^2\theta &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\
dt^2 &= \varepsilon^2 A_1 B_1 + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned} \right\} \tag{14.9}$$

Putting (14.5) and (14.8) in the left-hand-side of the equation (14.2) and taking account of (14.6) and (14.9) we get after rearranging the result in powers of parameter ε :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \begin{pmatrix} p & v \\ q & v \end{pmatrix}^2 x - \varepsilon \left\{ -2 \frac{p}{q} v \sin \psi A_1 - 2 a \frac{p}{q} v \cos \psi B_1 \right. \\
+ {}^2u_1 \\
\left. \partial t^2 + \begin{pmatrix} p & v \\ q & v \end{pmatrix}^2 u_1 \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - a B_1^2 - \right. \right. \\
- 2 a \frac{p}{q} v B_2 \left. \right] \cos \psi + \left[-2 A_1 B_1 - 2 \frac{p}{q} v A_2 - \right. \\
- a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 - a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 \left. \right] \sin \psi + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + \\
\left. + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} B_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} p & v \\ q & v \end{pmatrix}^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \tag{14.10}
\end{aligned}$$

Expanding the right-hand-side of the equation (14.2) in powers of the small parameter, we have :

$$\begin{aligned}
&= \left\{ f \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\} = \varepsilon \{ -\Delta a \cos \psi + \\
&\quad + f \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) \} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ f'_x \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) u_1 + \right. \\
&\quad + f'_{x'} \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) (A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \\
&\quad \left. + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \Delta u_1 \} + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned} \tag{14.11}$$

Equating the coefficients of the same powers of ε in the right-hand-parts of (14.10) and (14.11) we obtain the following system of equations :

$$\begin{aligned}
\partial^2 u_1 \left(\frac{p}{\partial t^2} v \right)^2 u_1 = \\
+ 2a(a, vt, \xi) + 2 \frac{p}{q} v A_1 \sin \psi + \\
+ 2B_1 \cos \psi - \Delta a \cos \psi
\end{aligned} \tag{14.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} v \right)^2 u_2 = f_1(a, vt, \psi) + \left[2 \frac{p}{q} v A_2 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \right. \\
+ a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + 2A_1 B_1 \left. \right] \sin \psi + \left[2a \frac{p}{q} v B_3 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - \right. \\
\left. - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 + a B_1^2 \right] \cos \psi
\end{aligned} \tag{14.13}$$

where we have introduced the notations

$$\begin{aligned}
f_0(a, vt, \psi) &= f \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) \\
f_1(a, vt, \psi) &= f'_x \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) u_1 + \\
&+ f'_{x'} \left(vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \\
&\quad - \Delta u_1 - 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} - 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t'}
\end{aligned} \tag{14.15}$$

From these equations the unknown functions can be determined.

As in the cases discussed before, $f_k(a, vt, \psi)$ are periodic functions of the two angular variables vt and ψ with a period 2π , $[A_i(a, \theta)$ and $B_i(a, \vartheta)$ are periodic functions of ϑ with a period $2\pi]$.

We obtain from the equation (14.12), $u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q} vt + \vartheta \right)$, $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ by observing the condition of absence of such terms in the expression for $u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q} vt + \theta \right)$ for which the numerators can turn to zero.

Representing functions

$$u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) \text{ and } f_0 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right)$$

in the form of finite Fourier sums we have

$$u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) = \sum_n \sum_m u_{nm}^{(1)}(a) e^{i\{nvt+m(\frac{p}{q}vt+\theta)\}}, \quad (14.16)$$

$$f_0 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{nvt+m(\frac{p}{q}vt+\theta)\}}, \quad (14.17)$$

where

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\{n\theta+m\psi\}} d\theta d\psi$$

In this connection we note, that in fact when the right-hand-side of equation (13.1), i.e. $\varepsilon f \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right)$, is a polynomial in x and $\frac{dx}{dt}$, and contains a finite number of harmonics of the variable vt , the expansion (14.17) may be obtained with the help of elementary trigonometric transformations.

We put the right-hand-part of the expressions (14.16) and (14.17)

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{p}{q}v \right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v \right)^2 \right\} e^{i\{nvt+m(\frac{p}{q}vt+\theta)\}} u_{nm}^{(1)}(a) \\ &= \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{nvt+m(\frac{p}{q}vt+\theta)\}} + 2\frac{p}{q}vA_1 \sin \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) - \\ &+ 2a\frac{p}{q}vB_1 \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) - \Delta a \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right), \end{aligned} \quad (14.18)$$

from which we obtain, by equating coefficients of the equal harmonics

$$u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}v \right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v \right)^2} \quad (14.19)$$

for all values of n, m , satisfying the condition

$$\left(\frac{p}{q}v \right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v \right)^2 \neq 0$$

or the equivalent condition

$$nq + (m \pm 1)p \neq 0$$

We also obtain the relationship for determining $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$:

$$\begin{aligned} & 2\frac{p}{q}vA_1 \sin \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) + \left(2a\frac{p}{q}vB_1 - \Delta a \right) \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) + \\ & + \sum_{\substack{n \\ \{mq+(m\pm 1)p=0\}}} e^{i\{nvt+m(\frac{p}{q}vt+\theta)\}} f_{nm}^{(0)}(a) = 0. \end{aligned} \quad (14.20)$$

Putting the value $u_{nm}^{(1)}(a)$ (14.19) in the right-hand-side of the formula (14.16), we obtain

$$u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \vartheta \right) = \sum_n \sum_{\substack{m \\ [nq+(m \neq 1)]}} \frac{f_{nm}^{(0)}(a) e^{i \left(\frac{p}{q}v \right)^2 - \left(nv + m \left(\frac{p}{q}vt + \vartheta \right) \right)} }{q} v \right)^2.$$

We now turn to the equation (14.20). In this equation the summation is performed for all integral values of n and m (positive, negative or zero values) for which the relationship

$$nq + (m \pm 1)p = 0 \quad (14.22)$$

holds.

Hence, in the given sum there are complex exponents of the form

$$\begin{aligned} e^{i \{ (n+m\frac{p}{q})vt + m\theta \}} &= e^i \left\{ (nq + mp) \frac{v}{q}t + m\theta \right\} \\ &= e^{i \left\{ \frac{p}{q}vt + m\theta \right\}} = e^i \left\{ \left(\frac{p}{q}vt + \vartheta \right) + (m+1)\theta \right\} \\ &= \left\{ \cos \left(\frac{p}{q}vt + \vartheta \right) \mp i \sin \left(\frac{p}{q}vt + \vartheta \right) \right\} e^{i(m \pm 1)\theta} \end{aligned}$$

We note, moreover, that by virtue of (14.22) $m \pm 1$ is divisible by q , so that we can write this factor in the form $q\sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$).

Equating the coefficients of $\cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right)$ and $q\sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$) $\sin \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right)$ in (14.20), we have

$$\left. \begin{aligned} A_1(a, \theta) &= \frac{q}{4\pi^2vp} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta'} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ B_1(a, \theta) &= \frac{\Delta}{2} p\nu - \\ &- \frac{q}{4\pi^2apv} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi \\ &\quad \left(\theta' = \psi - \frac{p}{q}\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

In the formulae (14.23), summation is carried over all those values of σ , both negative and positive, for which the integrals standing under the summation sign are different from zero. These integrals differ from zero for those values of σ , for which the summary index of the corresponding exponent (obtained after expanding the expression under the integral sign into Fourier series) is zero. Thus, if the right-hand-side of equation (13.1) is a polynomial in $x, \frac{dx}{dt}, \cos vt$ and $\sin vt$, σ will take up a finite number of integral values.

Thus, the solution of equation (13.1) for the resonance case, in the first approximation, is

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right),$$

where a and θ are defined by the system of equations

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon q}{4\pi^2\nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\varepsilon \Delta q}{2pv} - \frac{\varepsilon q}{4\pi^2avp} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi \end{aligned} \quad (14.24)$$

As we have assumed that the detuning $\varepsilon\Delta$ in the resonance case is of the first order, we can represent, upto some accuracy, the system of equation (14.24) in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon q}{4\pi^2 v p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ &\quad - \frac{p}{q} \nu - \\ \frac{d\theta}{dt} &= - \\ &\quad \approx q \\ &\quad 4\pi^2 a v p \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi \end{aligned} \quad (14.25)$$

Knowing the expression for $u_1\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta\right)$, $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ we use (14.15) in order to derive an explicit expression for $f_1\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta\right)$, and then with the help of equation (14.13) we obtain the expressions for $A_2(a, \vartheta)$ and $B_2(a, \vartheta)$, which are necessary for constructing the second approximation :

$$\left. \begin{aligned} A_2(a, \vartheta) &= -2vp \left[a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ &\quad - 4\pi^2 v p \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ B_2(a, \vartheta) &= \frac{q}{2avp} \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - a B_1^2 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2 avp} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

We now proceed to examine the most general case.

Suppose it is necessary to investigate the behaviour of the system not only near resonance point but also for the stage in which it passes over from the non-resonance zone to the resonance zone. For this purpose, it is necessary to construct such approximate solutions which could make it possible to study the behaviour of the system for a sufficiently large interval of frequencies. From these solutions we might derive as special cases, the formulae derived above, for the resonance as well as for the non-resonance case.

Here we cannot, assume that the detuning is small and thus have to search for an approximate solution for the equation (13.1). Further, we have to introduce in the expressions for the instantaneous amplitude and frequency a relationship involving the angle of phase shift.

Thus, as was done above, we will search for the solution in the form of the series :

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \theta \right) + \varepsilon u_1(a, vt, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, vt, \psi) + \dots, \quad (14.27)$$

where a and θ must be determined from the following system of differential equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} v + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

the difference $\omega - \frac{p}{q} v$, v not necessarily being small.

Here, as everywhere, $u_1(a, vt, \psi)$, $u_2(a, vt, \psi)$ have a period 2π in respect of both the angular variables ψ and vt . Further, $A_i(a, \vartheta)$ and $B_i(a, \vartheta)$ ($i = 1, 2, \dots$) are periodic with a period 2π in respect of the angular variable θ .

For determining all these functions we might apply a repeatedly used method of directly differentiating the expansions (14.27), substituting the result in the basic equation and then

equating the coefficients of the equal powers. Instead of this method we may also use arguments that have been put forward while discussing the method of the harmonic balance.

In order to arrive at the first approximation we examine the principal harmonic

$$x = a \cos \psi, \psi = \frac{p}{q}vt + \theta. \quad (14.29)$$

According to the principle of harmonic balance, when equation (; 4.29) is substituted in equation (13.1) and account is taken of the system of equations (14.28), the principal harmonics on both sides of equation (13.1) must be equal.

In order to arrive to the second approximation we must, naturally, take account of terms with ε^2 while determining the principal harmonic in the left-hand-side of equation (13.1) and of terms with $\varepsilon u_1(a, v, t, t)$ in the expression for $f(vt, x, \frac{dx}{dt})$.

Thus, in the second approximation, we immediately get for the principal harmonic of the left-hand-side of equation (13.1), the expression

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2x + \omega^2x}{dt^2 + \omega^2x} \right\} = & \left\{ \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{p}{q}v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2\omega a B_1 \right] + \right. \\ & + \varepsilon^2 \left[\left(\omega - v \left(\frac{p}{q} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a\omega B_2 + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - B_1^2 a \right] \right\} \cos - \\ & - \left\{ \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{p}{q}v \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 \right] + \varepsilon^2 \left[\left(\omega - \frac{p}{q}v \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\omega A_2 + \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] \right\} \sin \left. \right\} \quad (14.30) \end{aligned}$$

Putting $x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, vt, \psi)$ in the right-hand-side of equation (13.1), we obtain the following expression for the principal harmonic with an accuracy of the second order :

$$\begin{aligned} \text{principal harmonic } & \left\{ \varepsilon f \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\} = \\ & = \varepsilon \sum_{n,m} f_{nm}^{(0)}(a) e^i \left\{ nvt + m \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) \right\} + \\ & [nq + (m \pm 1)p = 0] \\ & c^n \sum_{n,m} f_{nm}^{(1)}(a) e^i \left\{ nvt + m \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) \right\} = \\ & = \varepsilon \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\mu\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\theta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. \\ & + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{i1}(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \left. \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2-} f_1(a, 0, \psi) e^{-i\mu\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. \\ & + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\tau q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \left. \right\}, \quad (14.31) \end{aligned}$$

where we have used the following notations

$$f_0(a, 0, \psi) = f(0, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \quad (14.32)$$

$$\begin{aligned} f_1(a, 0, \psi) = & f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)u_1 + f'_{x'}(0, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\ & \times \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) \right] - \frac{du_1}{da}(\omega - pv) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \\ & - \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(\omega - pv) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} B_1(\omega - pv) - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} A_1 - \\ & - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) A_1 \end{aligned} \quad (14.33)$$

Equating the coefficients for the same harmonics in the expressions (14.30) and (14.31) we have obtained in the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} & \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega B_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iaq\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi \\ & \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 = \\ & = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

and in the second approximation :

$$\begin{aligned} & \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a\omega B_2 = - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - aB_1^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, 0, \psi) e^{iq\sigma\theta'} \cos \psi d\theta d\psi \\ & \left(\omega - \frac{p}{q}v \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\omega A_2 = \\ & = - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + 2A_1 B_1 \right\} \\ & - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, 0, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \end{aligned} \quad (14.35)$$

The expression for $\varepsilon u_1(a, vt, \psi)$ will be determined as forced oscillations, excited in x by the action of the higher harmonics of the external force $\varepsilon/vt, x, \frac{dx}{dt}$), during the regime of harmonic oscillations $(x - a \cos \psi, \frac{dx}{dt} - a(\theta) \sin \psi)$:

$$\varepsilon \mu_1(a, vt, v) = \sum_{\substack{n, m \\ |nq + (m \geq 1)p| \neq 0}} \frac{e^{i(nvt + m_p)}}{\omega^2 - (nv + m_\omega)^2} f_{nm}^{(n)}(a), \quad (14.36)$$

where

$$f_{um}^{(n)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(a, 0, \psi) e^{-i(n\theta + m_\psi)} d\theta d\psi \quad (14.37)$$

We note that in the preceding cases, both that of 'resonance' and that of 'non-resonance', we could construct the first as well as the second approximations by using the method of the harmonic balance discussed above.

We would, now, speak a few words about the determination of $A_i(a, \theta), B_i(a, \theta) (i = 1, 2)$ from the system of equations (14.34) and (14.35).

The right-hand-sides of these equations are periodic in θ and are represented as sums of the type $\sum k_n(a) e^{in\theta}$. Hence the solution for $A_i(a, \theta), B_i(a, \theta) (i = 1, 2)$ must be sought in the form of similar sums. Consequently, all calculations for determining $A_i(a, \theta), B_i(a, \theta) (i = 1, 2)$ reduce to purely trigonometric operations.

It is not difficult to see that we can derive all the formulae worked out previously from the formulae derived for investigating the resonance zone as well as transitions to such a zone. Thus, assuming $\omega - \frac{p}{q}v = \Delta$ in equations (14.34) we get, to an accuracy of the first order, expressions for $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ which are same as (14.23).

Resuming, we give here a scheme for constructing the solution of equation (13.1) in the first and the second approximations for the most general case. As first approximation we take :

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) \quad (14.38)$$

where a and θ must be determined from the equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) \\ d\vartheta &= \omega - p_q^p v + \varepsilon B_1(a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (14.39)$$

in which $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ are particular periodic solutions of the system (14.34). In the second approximation we assume

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) + \varepsilon u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) \quad (14.40)$$

where a and ϑ are determined by the equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a; \theta) \\ d\theta &= \omega - \frac{p}{q}v + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

$A_1(a, \vartheta), B_1(a, \vartheta), A_2(a, \vartheta)$ and $B_2(a, \vartheta)$, appearing in the above equations, must be derived from system of equations (14.34) and (14.35) and $u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right)$ from the formula (14.36).

We find, once more, that the equations of the second approximation, viz. (14.41), after substituting in it the expressions for $A_2(a, \theta)$ and $B_2(a, \theta)$ obtained from (14.35), appear to be quite complex. This is because, we have written them in the most general form. In particular cases, even in the second approximation, we obtain comparatively simple equations for determining the amplitude and the phase of the oscillation (vide, for example, equations (13.56) and (15.38)).

We now proceed on to discuss the first approximation. As distinguished from the non-resonance case, here the variables in the equations of the first approximation (14.39) are not separable and we have a system of two mutually connected equations for determining the two unknowns a and θ .

We note, to start with, that for sufficiently large values of p and q , because of the assumptions made earlier about the polynomial character of the functions $f_n \left(x, \frac{dx}{dt} \right)$, the first approximation in the resonance case does not differ from that in the non-resonance case. Indeed for sufficiently large values of p and q , only those terms in the sums standing in the right-hand-sides of equations (14.39) remain, for which $\tau = 0$. The resulting equation coincides with the expressions (13.35) derived for the non-resonance case.

Thus the effect of resonance appears, generally speaking, when the values of the numbers p and q are small. We now turn to examine the equations of the first approximation (14.39).

Because the right-hand-sides of these equations depend on a and θ they cannot be integrated in the closed form. However, the qualitative character of their solutions may be investigated, in the general case with the help of the theory of Poincaré, as here we have to deal with two equations of the first order.

According to the basic results of this theory (vide Chapter III) we can assert that any solution*) of the equations (14.39) can be approximated, with increasing time, either to constant solutions

$$a = a_i, \vartheta = \vartheta_i (i = 1, 2, \dots),$$

determined from the equations

$$A_1(a, \theta) = 0, \omega - \frac{p}{q}v + \varepsilon B_1(a, \theta) = 0, \quad (14.42)$$

or to the periodic solutions.

Thus, we obtain two basic types of stationary oscillations : oscillations corresponding to the constant solution or, as we say, to the "point of equilibrium" of the equations (14.39) and oscillations corresponding to the periodic solution.

In the first case, oscillations in the first approximation occur with a frequency precisely equal to $\frac{p}{q}v$ and hence in simple rational relation with the frequency of excitation. Hence such regime of oscillations is called synchronous.

In higher approximations (vide, for example, the formula (14.21)) there appear, in the expression for $u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right)$, besides the fundamental frequency $\frac{pv}{q}$, other overtones of the divided frequency $\frac{v}{q}$.

*) We should keep in mind that for any solution the magnitude a must remain finite. From the physical point of view this limitation is always satisfied because the amplitude of oscillations cannot increase indefinitely.

When the system has a constant solution of the type $a = 0$, corresponding to the absence of natural oscillations, the expression for $u_1 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right)$ (14.21) will be the same as in the non-resonance case (13.34) and represents a hetero-periodic regime of oscillations.

We now study the question of stability of the stationary synchronous regime. For determining the stability of the constant solutions a_0 and θ_0 determined by the equations (14.42), it is necessary to form variational equations corresponding to them.

On the basis of (14.39) the variational equations may be written in the form :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \varepsilon A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon A'_{1\theta}(a_0, \vartheta_0) \delta \theta \\ \frac{d\delta \theta}{dt} &= \varepsilon B'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon B'_{1\theta}(a_0, \vartheta_0) \delta \theta \end{aligned} \right\} \quad (14.43)$$

The characteristic equation for the system (14.43) will be :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon A'_{1a} - \lambda & \varepsilon A'_{1\theta} \\ \varepsilon B'_{1a} & \varepsilon B'_{1\theta} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (14.44)$$

or

$$\lambda^2 - (\varepsilon A'_{1a} + \varepsilon B'_{1\theta}) \lambda + \varepsilon - (A'_{1a} B'_{1\theta} - B'_{1a} A'_{1\theta}) = 0 \quad (14.45)$$

From (14.45) we obtain the following conditions of stability for the synchronous stationary oscillations under study:

$$A'_{1a}(a_0, \theta_0) + B'_{1\vartheta}(a_0, \theta_0) < 0, \quad (14.46)$$

$$A'_{1a}(a_0, \theta_0) B'_{1\vartheta}(a_0, \theta_0) - A'_{1\vartheta}(a_0, \theta_0) B'_{1a}(a_0, \theta_0) > 0. \quad (14.47)$$

In the second case, corresponding to the periodic solution of the equations (14.39), the oscillation in the first approximation will occur in two fundamental frequencies - with frequency ω or $\frac{p}{q}\nu + \Delta\omega$ and beat frequency $\Delta\omega$, where $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T being the period of the given periodic solution). These oscillations are called asynchronous.

As an example illustrating the character of synchronous and asynchronous regimes, we examine the electron tube generator under the influence of an external periodic force with frequency ν .

When the generator is set up according to the scheme shown in Fig. 78, the differential equation describing the oscillating process will be :

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \omega^2 e = -\omega^2 \left[\frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right] \quad (14.48)$$

where L is the self-inductance, M is the coefficient of mutual induction, R the resistance, D the penetrance of the tube, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ natural frequency of the linear circuit, C the capacitance, $i_a = f(E_0 + F \cos \nu t + e)$ the characteristic of the tube (i_a = anode current), $E = E_0 + F \cos \nu t + e$ the full control voltage, E_0 the constant component of the full control voltage, $F \cos \nu t$ the component of the non-linear control voltage created by external excitation, e control voltage component in the circuit due to the oscillations.

We now examine the case when $f(E_0 + u)$, with $u = e + F \cos \nu t$, is a cubic polynomial : $f(E_0 + u) = f(E_0) + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3$, in which $S_2 > 0$.

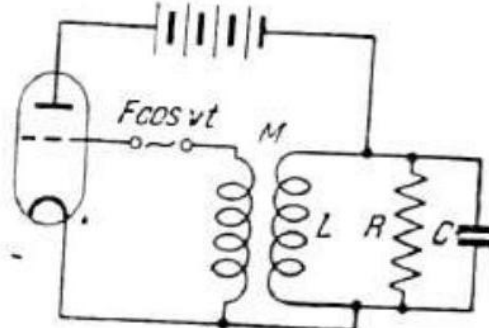


Fig. 78.

We assume that the terms on the right-hand-side of the equation (14.48) are small. In this case the oscillations will be close to harmonic oscillations and we can construct the approximate solution of the equation (14.48) by using the formulae introduced above.

We will now examine the 'resonance' case, when $p = 1, q = 2$, i.e. $\omega \approx \frac{\nu}{2}$.

We write the equation (14.48) in the form

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} e = -\omega^2 \left[\frac{Lde}{Rdt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right] - \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e. \quad (14.50)$$

We search the solution in the first approximation, in the form :

$$e = a \cos \psi, \psi = \frac{1}{2} \nu t + \theta,$$

where a and θ must be determined from the system of equations

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta), \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \theta),$$

and for determining these we use the method of the harmonic balance.

We calculate the principal harmonics in the left and the right-handsides of equation (14.50) and have (vide (14.10) in this connection):

$$\text{the principal harmonic } \left\{ \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{v^2}{4} e \right\} = \varepsilon A_1(a, \theta) v \sin \psi - \varepsilon B_1(a, \theta) a v \cos \psi;$$

$$\begin{aligned} \text{the principal harmonic } & \left\{ -\omega^2 \left[\frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL)f' \right. \right. \\ & \left. \left. (E_n + F \cos vt + e) \right] - \right. \\ & \left. - \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e \right\} = - \left\{ \delta_0 \nu \left[-\frac{3S_2}{4S_{cr}} u^3 + \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2}{S_{cr}} a \right] + \right. \\ & \left. + a v S_1 F \delta_0 \cos 2\theta \right\} \sin \psi - \left\{ a \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) - \frac{a \nu S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\theta \right\} \cos \psi. \end{aligned}$$

where we have introduced the notations

$$\delta_0 = \frac{1}{2RC}, S_{ar} = \frac{L}{R(M - DL)^*}$$

Equating the coefficients of equal harmonics and remembering that $\omega + \frac{v}{2} \approx v$, we obtain, for determining a and θ , the following system of equations :

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \delta_0 \left[-\frac{3S_2}{4S_{cr}} a^3 + \frac{S_0 - S_{cr}}{S_{cr}} \frac{3}{2} S_2 F^2 \right] \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{v}{2} - \frac{S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\theta. \end{cases} \quad (14.51)$$

In view of the fact that only one unknown function, θ , is found in the second equation of the system (14.51), it (the second equation) may be integrated by quadrature.

However, we shall discuss another problem.

We investigate the nature of relationships between the frequencies ω and v and the coefficients of the polynomial (14.49) so that stationary oscillations might occur in the tube.

We assume at first that

$$\omega - \frac{v}{2} < \frac{\delta_0 S_1 F}{2S_{cr}}.$$

Hence, integrating the second equation of the system (14.51), we obtain

$$\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta_0, \quad (14.53)$$

where

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin 2 \frac{\omega - \frac{v}{2} S_{cr}}{\delta_0 S_1 F} \quad (14.54)$$

From the first equation of the system (14.51), when (14.53) is satisfied, we obtain

$$a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a_0, \quad (14.55)$$

where a_0 is determined from the equation

$$\left(S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\theta_0 \right) a_0 - \frac{3}{4} S_2 a_0^3 = 0. \quad (14.56)$$

If

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\theta_0 < 0, \quad (14.57)$$

we obviously have

$$a_0 = 0$$

Thus, when the conditions (14.52) and (14.57) are fulfilled, a heteroperiodic regime comes to be established in the generator and this is the only possible stationary regime under the given circumstances.

Now let

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\theta_0 > 0, \quad (14.58)$$

In this case the solution $a_0 = 0$ is unstable and the system will be selfexciting.

From (14.56) we obtain the value of a_0 :

$$a_0 = \sqrt{\frac{4}{3S_0} \left[S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\theta_0 \right]} \quad (14.59)$$

Thus, when the conditions (14.52) and (14.58) are fulfilled a synchronous regime comes to be established in the oscillating system under study and in this first approximation we have

$$e = a_0 \cos \left(\frac{v}{2} t + \theta_0 \right) \quad (14.60)$$

where a_0 and θ_0 are determined by the expressions (14.59) and (14.54). This regime consists of stationary oscillation with constant amplitude and phase and with a frequency equal to one half of the excitation frequency.

In accordance with the condition (14.52), here, the detuning of resonance $\omega - \frac{v}{2}$ must not exceed a certain value. Speaking otherwise, synchronous regime is possible when the values of detuning are sufficiently small.

We now examine the case when ω is so sufficiently near $\frac{v}{2}$, that the condition of applicability of the equations (14.51) is fulfilled, i.e.

$$\omega - \frac{v}{2} > \frac{\delta_0 S_1 F}{2S_{cr}} \quad (14.61)$$

In this case, integrating the second equation of the system (14.62), we can represent θ in the form

$$\theta = \Delta\omega t + \Phi(\Delta\omega t + \theta), \quad (14.62)$$

where θ is an arbitrary constant, $\Phi(\theta)$ is a periodic function of θ with a period 2π , and $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \int_0^{2\pi} \omega - \frac{p}{2} - \frac{d\theta}{S_1 F \delta_0} \frac{\sin 2\theta}{2S_{cr}}$.

Putting the value of θ (14.62), into the first equation of the system (14.51), we get an equation of the first order with a periodic coefficient, that determines the stationary values of the amplitude.

This equation permits a solution $a = 0$ corresponding to a hetero-periodic regime. The question of stability of the solution $a = 0$ depends on the sign of the expression

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2}S_2 F^2 + \frac{1}{2}S_1 F \cos 2\theta \quad (14.64)$$

where $\overline{\cos 2\theta}$ denotes the average values of $\cos 2\theta$ over a period T :

$$\overline{\cos 2\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\theta dt \quad (14.65)$$

By virtue of (14.63), we have $\cos 2\theta = 0$ and hence the expression (14.64) assumes the form

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2}S_2 F^2 \quad (14.66)$$

If the expression (14.66) is negative, self-excitation is absent and the hetero-periodic regime $a = 0$ is stable. If, on the other hand, (14.66) is positive, there is self-excitation in the system and hence the heteroperiodic regime is unstable.

Thus, when condition (14.61) is fulfilled along with the condition

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2}S_2 F^2 > 0 \quad (14.67)$$

we can show that

$$a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A(\Delta\omega t + \theta) \quad (14.68)$$

Here $A(\Delta\omega t + \theta)$ is the corresponding periodic solution of the first equation of the system (14.51), after putting in it the value of θ obtained from (14.62) and its period is

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

In particular, when the values of the detuning $\omega - \frac{v}{2}$ are sufficiently large we obtain the expression :

$$A(\theta) = a_0 \quad (14.69)$$

where

$$a_0^2 = \frac{4}{3S_0} \left(S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2}S_2 F^2 \right)$$

i.e. the value of the stationary amplitude in the non-resonance case.

Thus, when the condition (14.61) and (14.67) are fulfilled, a stationary two-frequency (diplex) regime, consisting of asynchronous oscillations is set up in the generator. We obtain, in the first approximation, the following expression for the stationary oscillations :

$$e = A(\Delta\omega t + 0) \cos \left[\left(\frac{v}{2} + \Delta\omega \right) t + \theta + \omega(\Delta\omega t + \theta) \right]. \quad (14.70)$$

Here $\frac{v}{2} + \Delta\omega$ is the fundamental frequency, while the amplitude $A(\Delta\omega t + 0)$ and the phase $0 + \omega(\Delta\omega t + 0)$ oscillate with a frequency division $\Delta\omega$.

Analysing the expression (14.70), we can easily find that when the resonance is distant, the oscillations approximate to the non-resonance oscillations of the kind

$$e = a \cos(\omega t + \theta)$$

This fact is, obviously, true even in the general case. Studying the general equation of the first approximation (14.39), we can show, that when the detuning $\omega - \frac{v}{2}$ increases, the first resonance approximation passes over continuously to the non-resonance approximation.

10.4.2 15. the Influence of Sinusoidal Force on a Non-linear Vibrator

As a special case of an oscillatory system described by equation (13.1), we examine a non-linear vibrator under the influence of a harmonic force. Oscillations of such a system, as pointed out earlier, are described by the following differential equation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin vt^* \quad (15.1)$$

While analysing the equation in the introduction, we arrived at the conclusion that in the first approximation, only the fundamental resonance may appear.

*) In the given case we assume, that the amplitude of the external harmonic force is small. If such a condition cannot be fulfilled for the physical considerations, we have an equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + E \sin vt$$

which is reduced to an equation of the type (13.1) by making a change in the variables

$$x = y + \frac{E}{k - v^2 m} \sin vt$$

Thus, using the formula introduced before we construct the approximate solutions of the equation (15.1) in the case of fundamental resonance ($p = 1, q = 1$).

In accordance with (14.39) and (14.40), we have in the first approximation

$$x = a \cos(vt + \theta), \quad (15.2)$$

where a and θ must be determined from the system of equations :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E}{m(\omega+v)} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - v - 2\pi\omega a m \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \\ &\quad + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+v)} \sin \theta \end{aligned} \quad (15.3)$$

In the second approximation we assume

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \quad (15.4)$$

where $u_1(a, \psi)$ is determined as the forced oscillation excited in the system, by higher harmonics of the impressed force, in the regime of sinusoidal oscillations :

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq 1} \frac{e^{2im^2}}{(1-m^2)} f_m^{(0)}(a)$$

$$f_m^{(0)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) e^{-im} d''$$

Further a and θ must be determined from the system of equations of the second approximation, for whose construction, we use the formulae (14.34) and (14.35).

At first, with the help of (14.31) and (14.32), we arrive at the fundamental harmonic of the function $z^2 f_1(a, \psi)$:

fundamental harmonic $\{\varepsilon^2 f_1(a, \psi)\} =$

$$= \varepsilon^2 \cos \psi \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \cos \psi d\psi + \varepsilon^2 \sin \psi \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \sin \psi d\psi$$

where we introduce the notation

$$f_1(a, \psi) = f'(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1(a, \psi) +$$

$$+ f'_{x'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} (\omega - v) \right].$$

Further, for determining $A_2(a, \theta)$ and $B_2(a, \theta)$ we construct according to (14.35) :

$$\begin{aligned} m \left[(\omega - v) \left[\frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a(\omega B_2) \right] = \right. \\ = -m \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - aB_1^2 \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \cos \psi d\psi \\ \left. m \left[(\omega - v)a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\omega A_2 \right] \right] = \pi \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

- After this, if we know $A_1(a, \theta)$, $A_2(a, \theta)$, $B_1(a, \theta)$ and $B_2(a, \theta)$, it would not be difficult to constitute an equation determining a and θ in the second approximation.

We shall now study the first approximation in detail.

As in the case of the non-linear system under the influence of perturbation not depending on time, we introduce the abbreviations (vide 7.4)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a(\omega)} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi \\ k_e(a) &= k - \int_{\pi a}^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

We note that the parameters $\lambda_o(a)$ and $k_c(a)$ introduced here denote, respectively, the equivalent coefficient of damping and the equivalent coefficient of elasticity, for the given oscillating system in 'free' state, i.e. when the impressed excitation is absent, the system being described by an equation of the form

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (15.6)$$

Next, the equations (15.3) may be written in the following forms:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega+v)} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_e(a) - v + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+v)} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

where $\delta_e(a) = \frac{\lambda_o(a)}{2m}$, $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_o(a)}{m}}$ are, respectively, the equivalent damping decrement and the equivalent frequency of non-linear natural oscillations described by the equation (15.6).

We shall now examine stationary regimes of oscillations. For obtaining stationary values of the amplitude a and phase θ in the first approximation, it is necessary to equate to zero the right-hand-sides of the equations (15.7), whence we obtain the equations :

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega+v)} \cos \theta &= 0 \\ \omega_e(a) - v + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+v)} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

or the following relations

$$\left. \begin{aligned} 2mva\delta_e(a) &= -\varepsilon E \cos \theta, \\ ma[\omega_e^2(a) - v^2] &= -\varepsilon E \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

These relations are accurate upto the second order and from these, after eliminating the phase θ , we obtain a relation between the amplitude of stationary oscillations and the frequency of the impressed force :

$$m^2 a^2 \left[(\omega_e^2(a) - v^2)^2 + 4v^2 \delta_e^2(a) \right] = \varepsilon^2 E^2 \quad (15.10)$$

The equations (15.9) and (15.10) thus derived coincide with the equations which are used in the classical linear theory in order to determine the amplitude and phase of the forced oscillation

$$x = a \cos(vt + \vartheta) \quad (15.11)$$

in a system with a mass m , elasticity coefficient $k_e(a)$ and damping coefficient $\lambda_e(a)$ (and with frequency $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_s(a)}{m}}$ and damping decrement $\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$ respectively), under the influence of an impressed sinusoidal force $\varepsilon E \sin vt$.

Hence we can formulate the following rule. Suppose we have a given non-linear system under the influence of an impressed sinusoidal force with a frequency close to the natural frequency of the system and we have to derive the values of the amplitude and phase of the stationary synchronous oscillation (15.2). For this purpose we should linearize the given oscillating system in free state (i.e. not taking into account the impressed force $\varepsilon E \sin vt$) and then determine the functions of the amplitude-the equivalent decrement and the equivalent frequency of the natural oscillations. Putting the values thus obtained into the classical relationships of the linear theory of oscillations (15.9) and (15.10), we should obtain an equation for determining the unknown values of the amplitude and the phase.

The present rule is formulated for the special case of the oscillating system described by the differential equation (15.1) but it may also be extended to the more general case of the oscillatory systems.

We will now derive the condition for synchronous stationary oscillations that we are studying.

For the resonance case, the equations of the first approximation, (15.7), may be represented, correct to the second order, in the form

$$\left. \begin{aligned} 2v \frac{da}{dt} &= -2va\delta_e(a) - \frac{\varepsilon E}{m} \cos \theta \\ 2va \frac{d\theta}{dt} &= [\omega_e^2(a) - v^2] a + \frac{\varepsilon E}{m} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

and the equations of stationary synchronous regimes in the form

$$\left. \begin{aligned} R(a, \theta) &= 0 \\ \Phi(a, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

where $R(a, \theta)$ and $\Phi(a, \theta)$ denote the right-hand-sides of the equation (15.12) respectively.

Let a and $\hat{\theta}$ be some solutions of the equations (15.13). For studying the question of their stability we will use the equations (vide (14.46), (14.47)) derived above. In our case these will have the following forms :

$$aR'_a(a, \theta) + \Phi'_\theta(a, \theta) < 0 \quad (15.14)$$

$$R'_a(a, \theta)\Phi'_\theta(a, \theta) - R'_\theta(a, \theta)\Phi'_a(a, \vartheta) > 0 \quad (15.15)$$

We shall now reveal the meaning of these inequalities.

From (15.14) we have

$$aR'_a(a, \theta) + \Phi'_\theta(a, \theta) = -2va\delta_\theta(a) - 2va^2d\delta_e(a) + \frac{\varepsilon E}{m} \cos \theta$$

whence, taking into consideration the first equation of the system (15.12), we arrive at :

$$\begin{aligned} aR'_a(a, \vartheta) &= \Phi'_\theta(a, \vartheta) = -2va \frac{d(a\delta_e(a))}{da} - 2va\delta_e(a) = \\ &= -2v \frac{d(a^2\delta_e(a))}{da} \end{aligned} \quad (15.16)$$

In view of the notations in (15.5), we can write

$$2va^2\delta_e(a) = \frac{a^2\lambda_e(a)}{m}v = \frac{2v}{m\omega^2}W(a), \quad (15.17)$$

$$W(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)) \times \\ \times a\omega \sin(\omega t + \vartheta) d(\omega t + \vartheta)$$

represents the average power dissipated by the force $\varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$ during oscillations

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta)$$

Under usual laws of friction, $W(a)$ increases along with the amplitude, so that

$$W'(a) > 0$$

Thus, if we confine ourselves to the study of systems with the usual law of friction, the condition (15.14) will always be fulfilled by virtue of the expressions (15.16) and (15.17).

We will now examine the solution (15.15). For this purpose we examine the dependence of a and θ , solutions of the equations (15.13), upon the frequency v .

Differentiating (15.13) with respect to v , we have

$$\left. \begin{aligned} R'_a \frac{da}{dv} + R'_\theta \frac{d\theta}{dv} &= -R'_v \\ \Phi'_a \frac{da}{dv} + \Phi'_\theta \frac{d\theta}{dv} &= -\Phi'_v \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

whence we get

$$(R'_a \Phi'_\theta - \Phi'_a R'_\theta) \frac{da}{dv} = \Phi'_v R'_\theta - R'_v \Phi'_\theta \quad (15.20)$$

On the other hand, we have from (15.13)

$$\left. \begin{aligned} R'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \sin \vartheta, R'_v = -2\delta_v(a)a \\ \Phi'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta, \Phi'_v = -2va, \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

and with the help of these we can write the right-hand-side of the equation (15.20) in the form :

$$\Phi'_v R'_\vartheta - R'_v \Phi'_\vartheta = 2a\varepsilon \left(-v_m^E \sin \theta + \delta_0(a)_m^E \cos \theta \right),$$

or in view of the equation (15.9), in the form:

$$\Phi'_v R'_\vartheta - R'_v \Phi'_\vartheta = 2va^2 \left[(\omega_\theta^2(a) - v^2) - 2\delta_\theta^2(a) \right]. \quad (15.22)$$

Thus it follows from (15.20) and (15.22) that

$$(R'_a \Phi'_\vartheta - \Phi'_a R'_\vartheta) \frac{da}{dv} = 2va^2 \left[(\omega_c^2(a) - v^2) - 2\delta_c^2(a) \right]$$

After this, it is obvious, that the condition of stability (15.15) may be represented in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &> 0, \text{ if } \omega_e^2(a) > v^2 + 2\delta_e^2(a), \\ \frac{da}{dv} &< 0, \text{ if } \omega_e^2(a) < v^2 + 2\delta_e^2(a). \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

or with an accuracy of the first order, ($\delta_a^2(a)$ is a magnitude of the second order)

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &> 0, \text{ if } \omega_e(a) > v \\ \frac{da}{dv} &< 0, \text{ if } \omega_e(a) < v \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

The conditions of stability (15.24) obtained above are found very convenient while, representing graphically, the relation between the amplitude and the frequency.

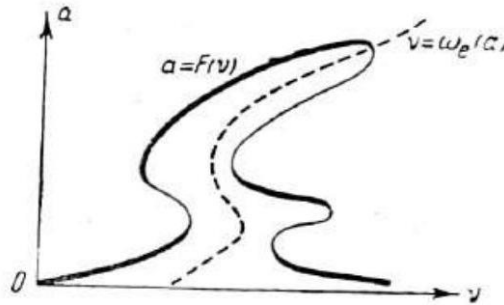


Fig. 79.

In fact, by using the equation (15.10), we construct the curve (Fig. 79)

$$a = F(v) \quad (15.25)$$

(resonance curve), and also draw the curve

$$a = F_0(v), \quad (15.26)$$

determined by the equation of the exact resonance

$$\omega_e(a) = v$$

(the so-called skeleton curve).

In this case, those sections on the branch of the curve (15.25), lying on left of the curve (15.26), will be stable, (i.e. correspond to stable amplitudes) for which a increases with v . Further, on the branches lying on the right of the curve (15.26), those sections will be stable for which a decreases with increasing v .

The graphical picture renders a visual representation of the dependence of the stable stationary amplitude upon the frequency of the exciting force and allows us to determine the points of discontinuity and jump causing hysteresis phenomena which are characteristic only of the non-linear systems.

As a definite example we shall consider a non-linear vibrator with a rigid characteristic of non-linear restoring force ($F = cx + dx^3$), subject to the influence of an impressed sinusoidal force. Let the oscillations of the vibrator be described by an equation of the form

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin vt \quad (15.27)$$

where x is the coordinate determining the position of the system, t the time, m the mass of the system, b the coefficient of resistance, $F = cx + dx^3$ the non-linear restoring elastic force, E and v the amplitude and frequency, respectively, of the impressed sinusoidal force.

For the sake of simplicity we introduce dimensionless quantities x_1 and t_1 :

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{d}} x, t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t$$

In this case equation (15.27) may be written in the form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x + x^3 = E_1 \sin vt \quad (15.28)$$

where $\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}$, $E_1 = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{a}{c}}$ and again, for the sake of simplicity, the indices are omitted from x and t .

We now assume that the friction in the system and the amplitude of the impressed force are small and that the characteristic of the nonlinear restoring force is sufficiently close to the linear one.

In this case, comparing equation (15.28) with (15.1), we have

$$\varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = -\delta \frac{dx}{dt} - x^3, \varepsilon E = E_1, \quad (15.29)$$

whence, using the formulae (15.2), (15.5) and (15.7), we obtain the first approximation of the solution of (15.18), for the case of fundamental resonance, in the form

$$x = a \cos(vt + \vartheta), \quad (15.30)$$

where a and θ are to be determined from the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1+v} \cos \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - v + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a(1+v)} \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

We now pass on to examine the stationary regime of the synchronous oscillations. In such a regime x , in the first approximation, will vary, according to (15.30), along a cosine curve with the frequency of external excitation, with the constant amplitude and the phase determined (correct upto the second order) by the system of equations:

$$a \left\{ \begin{aligned} -\delta a - E_1 \cos \theta &= 0 \\ \left[\left(1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - v^2 \right] + E_1 \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

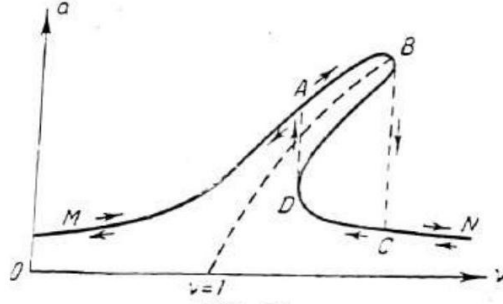


Fig. 80.

According to (15.5), we have for equation (15.28):

$$\delta_e(a) = \delta, \quad \omega_e(a) = 1 + 3a^2/8 \quad (15.33)$$

Eliminating the phase θ from (15.32) (or directly putting the values of $\delta_e(a)$ and $\omega_e(a)$ (15.33) into (15.10)), we obtain a relationship between the amplitude of the stationary oscillation and the frequency of the external force :

$$a^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - \gamma^2 \right]^2 + \delta^2 \right\} = E_1^2 \quad (15.34)$$

whence we obtain

$$v = \sqrt{\omega_0^2(a) \pm \sqrt{E_1^2 - \delta^2}} \quad (15.35)$$

With the help of this relationship we construct the resonance curve (Fig. 80) and the skeleton curve determined by the equation

$$1 + \frac{3a^2}{8} = v \quad (15.36)$$

(Fig. 80, dotted line).

It is easy to locate the zones of stable and unstable amplitudes, according to the rule worked out on page 243 from Fig. 80. Thus, the sections MAB and DCN of the response curve will correspond to stable amplitudes. The points B and D will be points of discontinuity and jump of the amplitude.

The diagram, shown in Fig. 80, permits us to analyse fully the character of the oscillations in the system under study when the frequency of the impressed force undergoes changes. Thus, when the frequency of the impressed force changes from the initial small values, the amplitude of the forced oscillations increases at first along the curve MAB . At the point B there occurs a break in the amplitude, the value of the amplitude jumps to the point C and when the frequency increases further it changes along the curve CN . If now we begin decreasing the frequency the amplitude of forced oscillations will change along the curve NCD . Proceeding upto the point D the value of the amplitude passes over to the point A and thereafter changes along the branch of the resonance

curve AM . We note that when we speak of changes in the frequency of the impressed force we mean very slow changes such that at any moment the system may be considered to be practically stationary. In the sequel this question will be discussed in detail in connection with the phenomenon of resonance.

We now give a solution of equation (15.28) corresponding to the second approximation. According to formulae (15.4) and (14.42) we have in this approximation

$$x = a \cos(vt + \theta) + \frac{a^3}{32} \cos 3(vt + \theta), \quad (15.37)$$

where a and θ are to be determined from the system of equations of second approximation

:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} + \frac{3a^3\delta}{16} - E_1 \left[\frac{1}{1+v} - \frac{3a^2(7-v)}{8(3-v)(1+v)^2} \right] \cos \theta - \\ &\quad - \frac{2(1+v)^2 \sin \theta}{256} \frac{d\theta}{dt} = 1 - v + \frac{3a^2}{8} - \delta^2 - 15a^4 + \\ &\quad + \frac{E_1}{a} \left[\frac{1}{1+v} - 8(3-v)(1+v)^2 \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\sin \theta - \frac{E_1\delta}{2a(1+v)^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (15.38)$$

As it follows from (15.37), higher harmonics appear in the second

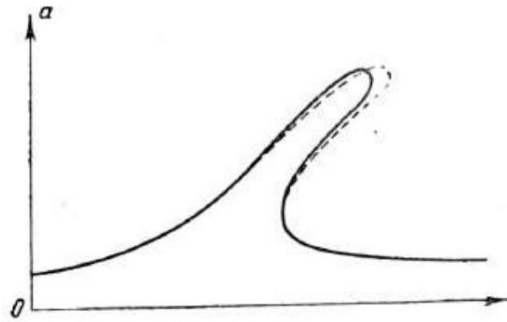


Fig. 81.

Equating the right-hand-sides of equations (15.38) to zero and eliminating the angle θ , we obtain a relationship between the amplitude of oscillation a and the frequency of impressed force v in the second approximation. With the help of this relationship we construct a response curve in the second approximation (Fig. 81, dotted line).

As has been shown above it is possible for only one resonance namely ($p = 1, q = 1$), to occur in an oscillating system described by the equation (15.1) in the first approximation. Multiplication of resonances can be obtained only when we are discussing higher approximations.

In order to illustrate this we construct the first and the second approximation for the oscillating system described by the equation (15.28) when $p = 1, q = 3$.

According to formulae (14.38) and (14.39) we have in the first approximation,

$$x = a \cos \left(\frac{1}{3}vt + \theta \right), \quad (15.39)$$

where a and θ are to be determined from the equation

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 - \frac{1}{3}v + \frac{3a^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

The right-hand-sides of equation (15.40) depend only on a and characterise a system in the non-resonance situation. Integrating these equations we obtain for x the expression

$$x = a_0 e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \left[t - \frac{3a_0^2}{8\delta} e^{-\delta t} + \vartheta_0 \right], \quad (15.41)$$

a_0 and θ_0 being certain arbitrary constants. Thus, in the first approximation, the oscillation of the system are cosinusoid, damping according to the exponential law and their frequency depends on the amplitudes.

There will be no resonance effect in the first approximation and as the amplitude of the external (impressed) sinusoidal excitation is of the order ε there will not be, in the first approximation, even forced oscillations with frequency of the excitation (forced oscillations will arise when we improve the first approximation).

We now calculate the second approximation. Making use of the formulae (14.40) and (14.41), we arrive at the following expression for x :

$$x = a \cos \left(\frac{1}{3}vt + \theta \right) + \frac{a^3}{32} \cos 3 \left(\frac{1}{3}vt + \theta \right) - \frac{E_1}{8} \sin vt, \quad (15.42)$$

where a and θ are the solutions of the equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{8a}{2} + \frac{3}{16}\delta a^3 - \frac{3a^2 E_1}{32(1+\frac{v}{3})} \cos 3\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 - \frac{v}{3} + \frac{3a^2}{8} - \frac{\delta^2}{8} - \frac{15a^4}{256} + \frac{3a E_1}{32(1+\frac{v}{3})} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (15.43)$$

Expressions (15.42) and (15.43) bear witness to the influence of the external excitation on the oscillating system that is observed in the analysis of the second approximation. Thus, according to (15.42), there would appear in the expression for x , besides overtones of the natural frequency, harmonics with the frequencies of the external force also.

With the help of equations (15.43) we can investigate the resonance zones and construct resonance curves.

Equating the right-hand-sides of equations (15.43) to zero we obtain, correct upto the third order, a relationship determining the stationary values of the amplitude a and the phase θ of the oscillations :

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a)a - \frac{3a^2 E_1}{32} \cos 3\theta &= 0 \\ \omega_e^2(a) - \frac{v^2}{9} + \frac{3a E_1}{32} \sin 3\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.44)$$

Here we have introduced the notation :

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(a) &= \delta - \frac{3}{8}\delta a^2 \\ \omega_e^2(a) &= 1 + \frac{3a^2}{4} - \frac{\delta^2}{4} - \frac{15a^4}{128} \end{aligned} \right\} \quad (15.45)$$

Eliminating the phase ϑ from the relationships (15.44) we obtain a relation between the amplitude and the frequency of the perturbing force :

$$\left[\omega_e^2(a) - \frac{v^2}{9} \right]^2 + \delta_e^2(a) = \frac{9a^2 E_1^2}{1026} \quad (15.46)$$

or

$$\left. \begin{aligned} f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= F'(x) \frac{dx}{dt} + \frac{\xi}{1+\xi} x, \\ F(x) &= \frac{1}{1+\xi} f_1(x) - 2\theta x, \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= x, -\frac{nMr}{L_0} \frac{E_0}{V_0} = E, t = \frac{\tau}{\tau_n} \\ 2\theta &= \frac{nR}{\omega L}, \xi = \frac{\omega^2 - n^2 \omega_0^2}{n^2 \omega_0^2} \\ I_a &= \frac{i_a}{I_0} = \frac{f_0(V_s)}{I_0} = f_1\left(\frac{dI}{d\tau}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

We now discuss the resonance case. In order that we can use the formulae of 14, for constructing the approximate solution, it is necessary to effect a change of variables

$$x = y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \quad (15.53)$$

in the equation (15.50). Then we obtain the equation :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon f \left[y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right]. \quad (15.54)$$

We assume that the feed-back occurs in the circuit through an electron tube with the characteristic

$$i_a = a + bx + cx^2 - dx^3 \quad (15.55)$$

where $V_0 = 126$, $I_0 = 142\text{Ma}$, a, b, c, d are constants. In this case, for the right-hand-side of equation (15.50), we obtain the expression

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (k + 2x + \gamma x^2) \frac{dx}{dt} + \xi_{0.016} x \quad (15.56)$$

in which we have employed the following substitutions:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{0.016}{1+\xi}, k = k_0 + 2\vec{\theta} \frac{\xi}{\beta}, \beta = 0.016 \\ \vec{\theta} &= 0.013, \gamma = -2, k_0 = -0.05 \\ (a &= 0.95, b = 3.35, c = 2.25, d = 1.5) \end{aligned} \right\} \quad (15.57)$$

Putting the value of $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, (15.56), into equation (15.54) we arrive at the following expression for the right-hand-side of the equation in question :

$$\begin{aligned} &f \left[y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right] = \\ &= \left[k + 2y + \frac{2E}{1-n^2} \sin nt + \gamma \left(y^2 + \frac{2yE}{1-n^2} \sin nt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E^2}{(1-n^2)^2} \sin^2 nt \right) \right] \left(\frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right) + \\ &\quad + \frac{\xi}{0.016} \left(y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt \right) \end{aligned} \quad (15.58)$$

We now construct the solution of equation (15.54), in the first approximation, for the case when $n = 2$, i.e. when a resonance of

"division by two" appears in the oscillating system.

Using the formulac (14.39) and (14.25) and putting $p = 1, q = 2$, we obtain, after a series of calculations,

$$y = a \cos(t + \theta) \quad (15.59)$$

in which a and θ are to be determined in the first approximation from the system of equations

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2}a \left(k + \frac{\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{aE}{6} \sin 2\theta \right\}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \left\{ -\frac{\xi}{2\beta} + \frac{E}{6} \cos 2\theta \right\}.\end{aligned}\quad (15.60)$$

The system of equations of first approximation, (15.60), enables us to study not only the stationary regime but also the process of setting-up of the oscillations in the case of the resonance of the second class.

For studying the process of setting-up of the oscillations it is necessary to integrate equations (15.60) and derive expressions for a and θ as functions of time. In the given case the integration of equations (15.60) may be carried out completely. For this, we change the variables according to the formulae

$$u = a \cos \theta, \quad v = a \sin \theta. \quad (15.61)$$

After a series of calculations we obtain, in place of equations (15.60), the following ones with the new variables u and v :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2}u \left[k + \frac{\gamma}{4}(u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma}{36}u + \frac{E}{6}v + \frac{\xi}{2\beta}v \right\} \\ \frac{dv}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2}v \left[k + \frac{\gamma}{4}(u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma}{36}v + \frac{E}{6}u - \frac{\xi}{2\beta}u \right\}\end{aligned}\quad (15.62)$$

The system of equations (15.62) can be reduced to a Bernoulli equation as has been shown in [29].

In fact, multiplying equation (15.62) by v and u respectively and subtracting the second result from the first we obtain :

$$v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} = v^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{2}{3} \left[- (u^2 - v^2) \frac{E}{3} - (u^2 + v^2) \frac{\xi}{\beta} \right]. \quad (15.63)$$

Multiplying the first equation of the system (15.62) by u and adding the result to the second equation multiplied by v , we obtain

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left[k + \frac{\gamma}{4} \left(a + \frac{2E^2}{9} \right) \right] + \frac{2\varepsilon uv}{3} E. \quad (15.64)$$

Putting

$$\frac{u}{v} = \chi, \quad (15.65)$$

we can write in place of (15.63) and (15.64) the following equations:

$$d\chi = \varepsilon \left[\left(-\frac{E}{3} - \xi \right) \chi^2 - \left(-\frac{E}{3} + \frac{\xi}{\beta} \right) \right], \quad (15.66)$$

$$dt = 2 \left[\frac{-\frac{\gamma}{4} \left(a + \frac{2E^2}{9} \right)}{da} - \frac{2\varepsilon Ea}{3} 1 + \chi^{2*} \right] = \varepsilon a \left[k + \frac{\gamma}{2} \right] \quad (15.67)$$

Equation (15.66) may be integrated quite readily.

After we derive $\chi(t)$ from equation (15.67), it may be reduced to the form

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon\gamma}{4}a^2 + \varphi(t)a, \quad (15.68)$$

where $\varphi(t)$ is a known function of time.

By substituting $W = \frac{1}{a}$, equation (15.68) may be reduced to the linear form

$$\frac{dW}{dt} = -\varphi(t)W - \frac{\varepsilon\gamma}{4} \quad (15.69)$$

As a result we obtain the following well-known formula expressing the law of variation of the amplitude of oscillation with time

$$a = \frac{e_0\varphi(t)dt}{C_1 - \frac{\varepsilon\gamma}{4} \int_0^t e^{\int_0^t \varphi(t)dt} dt}, \quad (15.70)$$

where C_1 is the constant of integration.

We now proceed to determine the steady state oscillations occurring with constant amplitude and phase.

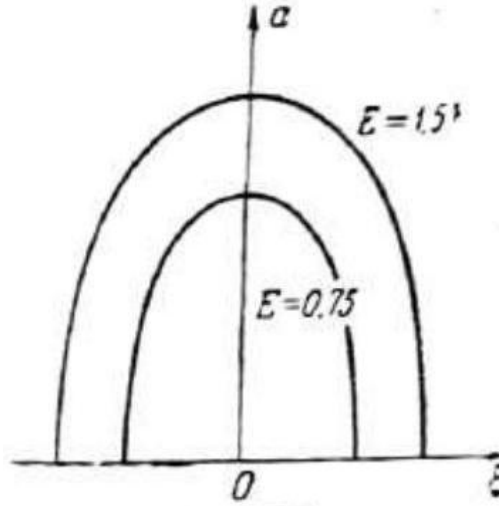


Fig. 83.

influence of sinusoidal force on a non-linear vibrator

Equating the right-hand-sides of equations (15.60) to zero we obtain the relations

$$\left. \begin{aligned} k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} + \frac{E}{3} \sin 2\theta &= 0 \\ -\frac{\xi}{\beta} + \frac{E}{3} \cos 2\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.71)$$

which determine the stationary values of the amplitude and the phase of the oscillations.

Eliminating the phase θ from (15.71), we obtain the well-known relationship

$$a^2 = -\frac{2E^2}{9} - \frac{4}{\gamma} \left[k \pm \sqrt{\frac{E^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} \right], \quad (15.72)$$

with the help of which we can construct the resonance curves characterising the dependence of the amplitude a on the detuning ξ (Fig. 83). We obtain the stationary values of the phase θ with the help of the formula

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18}}{\frac{\xi}{\beta}}, \quad (15.73)$$

where a is determined from (15.72).

For determining the stable values of the stationary amplitude we proceed according to the general rules. We first derive the quantities

$$\left. \begin{aligned} A'_a(a, \theta) &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\theta, \\ A'_\theta(a, \theta) &= \frac{Ea}{3} \cos 2\theta, \\ B'_a(a, \theta) &= 0, \\ B'_\theta(a, \theta) &= -\frac{E}{3} \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

and then form the variational equations:

$$\frac{d\delta a}{dt} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\theta \right\} \delta a + \frac{Ea}{3} \cos 2\theta \delta \theta \quad (15.75)$$

from which we derive the conditions for the stability of the stationary values of a and θ :

$$\left\{ \begin{aligned} &1 \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\theta - \frac{E}{3} \sin 2\theta < 0, \\ &\left\{ \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\theta \right\} \left(-\frac{E}{3} \sin 2\theta \right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

These equations may be represented, after a series of transformations, in the form of the following well-known inequalities:

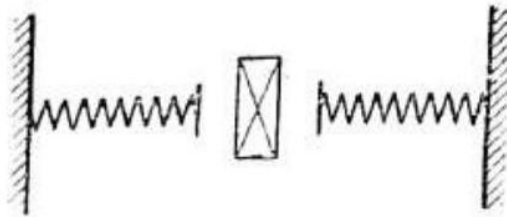
$$\left[\begin{aligned} &k + \frac{1}{2}\gamma a^2 + \frac{\gamma E^2}{18} < 0, \\ &\gamma \left[k + \frac{\gamma a^2}{4} + \gamma E^2 \right] > 0. \end{aligned} \right] \quad (15.78)$$

The analysis of these results, along with the relationship (15.72), enables one to determine the value of the bounds of the domain of stability of the periodic solution with a period of 2π . 16. The influence of a sinusoidal force on a non-linear system with a characteristic composed of rectilinear segments

As a second particular case we investigate the oscillations in a non-linear system with a characteristic composed of several rectilinear segments, subject to the influence of a sinusoidal perturbation force.

Oscillating systems in the case of which the non-linear restoring force has a characteristic consisting of rectilinear segments (Figs. 84, 85 86,87) are widely spread in engineering.

The study of forced oscillations in non-linear systems of such a type forms the subject-matter of a number of works, e.g. those of



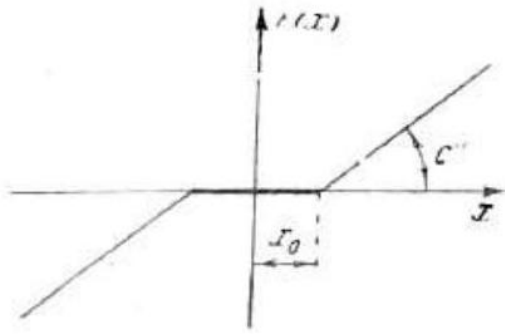


Fig. 84.

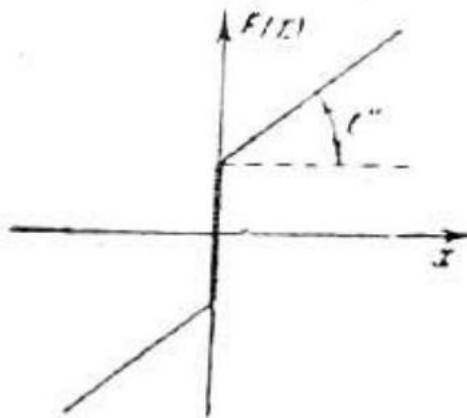
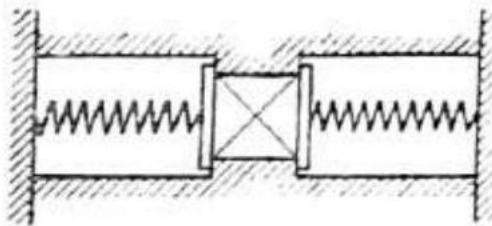


Fig. 85.

A. I. Laure and A. I. Chekmarev *) in which the solution is derived by the method of Galerkin.

For certain initial conditions of a special kind Den Hartog **) has developed a solution that can be regarded as exact. However, the procedure of the solution is extremely unwieldy.

For solving such problems we find it very convenient to use the asymptotic method discussed above. This method gives the same results as the method of Galerkin but at the same time it enables us to determine readily the second approximation, to calculate the corrections in the frequency in the second approximation and not only to study the stationary state but also to pursue the system during its period of oscillation. We thus assume that the oscillations of the system are described by an equation of the type

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin vt \quad (16.1)$$

where the function $F(x)$, expressing the dependence of the non-linear restoring force on the displacement, is an odd function of x (the case of symmetric non-linear characteristic) and has a form like the one shown in Figs. 84-87.

*) A. I. Laure and A. I. Chekmarev, "Forced oscillations in a non-linear system with a characteristic composed of two rectilinear segments," Journal of Applied Mathematics and Economics, Vol. 1, part 3 (1938).

**) J. P. Den Hartog and R. M. Heiles, "Forced vibrations in non-linear systems with various combinations of linear springs," Journal of Applied Economics, Vol. 3, part 4. p. 126-130 (1936).

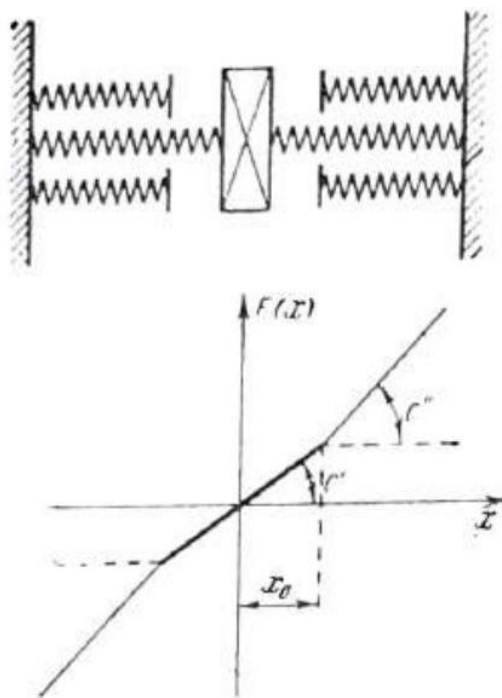


Fig. 86.

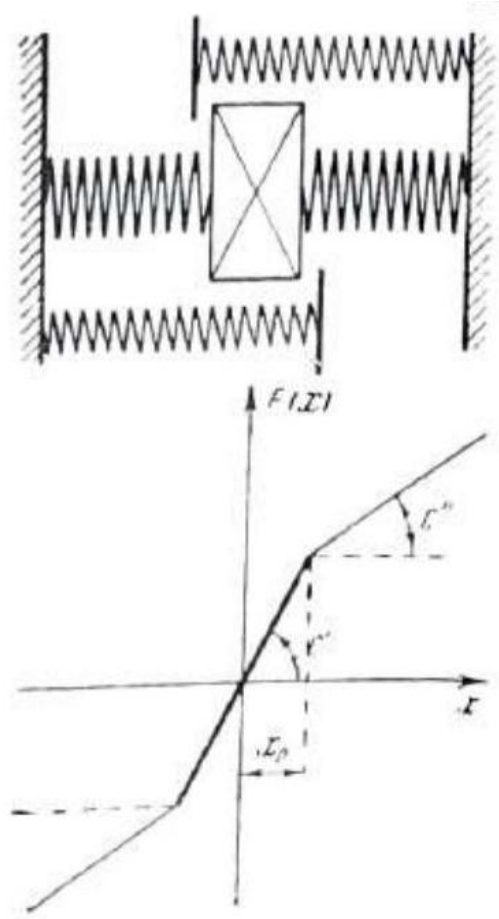


Fig. 87.

We note that if the characteristic of the non-linear restoring force is asymmetric, the construction of the solution with the help of the abovementioned method does not present any difficulty.

We assume that $F(x)$ may be written in the form :

$$F(x) = c''x + \varepsilon f(x) \quad (16.2)$$

Hence we may examine the following equation instead of equation (16.1) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c''x = -\varepsilon f(x) + \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin vt, \quad (16.3)$$

and thus, according to (15.2) and (15.3), we have, in the first approximation, the solution :

$$x = a \cos(vt + \vartheta), \quad (16.4)$$

where a and θ are to be determined from the system of equations :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E}{\omega+v} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - v + \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon E}{a(\omega+v)} \sin \theta. \end{aligned}$$

Bearing in mind that

$$\omega^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (16.6)$$

we transform (16.5) into the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{\omega + \gamma} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

where, as before,

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (16.8)$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (16.9)$$

Equating the right-hand-sides of equations (16.7) to zero and eliminating θ , we arrive at a relationship between a and v for the stationary regime :

$$a^2 \left[(\omega_e^2(a) - v^2)^2 + 4\gamma^2 \delta_e^2(a) \right] = \varepsilon^2 E^2. \quad (16.10)$$

If we neglect friction, we obtain, instead of (16.10), the following simple formula

$$a [\omega_e^2(a) - v^2] = \pm \varepsilon E, \quad (16.11)$$

on the right-hand-side of which we should take "+" for $a > 0$ and "-" for $a < 0$.

We also introduce the following formulae in the second approximation. Neglecting friction in equation (16.1), we have

$$x = a \cos(vt + \theta) + \varepsilon u_1(a, vt, vt + \theta), \quad (16.12)$$

where

$$u_1(a, vt, vt + \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(vt + \theta)}{\omega^2 (1 - n^2)} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (16.13)$$

while the amplitude of the stationary oscillations is determined by the equation

$$a [\omega_e^2(a) - v^2] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) [f_{n+1}^{(1)}(a) + f_{n-1}^{(1)}(a)]}{\omega^2 (1 - n^2)} = \pm \varepsilon E \quad (16.14)$$

in which the following substitutions have been made:

$$\left. \begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi \\ f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'_a(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

We now proceed on to construct the resonance curves. For the characteristic of the non-linear restoring force, shown in Fig. 84-87, we have

$$F(x) = \begin{cases} c'x & \text{for } -x_0 \leq x \leq x_0 \\ c''x + (c' - c'')x_0 & \text{for } x_0 \leq x \leq \infty \\ c''x - (c' - c'')x_n & \text{for } -\infty \leq x \leq -x_0 \end{cases} \quad (16.16)$$

Putting $a > 0, a > x_0$ and denoting by ψ_0 the root of the equation

$$x_0 = a \cos \psi. \quad (16.17)$$

Hence it is not difficult to see that

$$\varepsilon f(a \cos \psi) = \begin{cases} (c' - c'') a \cos \psi & \text{for } \psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0 \\ (c' - c'') a \cos \psi_0 & \text{for } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ -(c' - c'') a \cos \psi_0 & \text{for } \pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (16.18)$$

Splitting up the interval of integration into three parts, we arrive at the following result after an elementary calculation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ = c'' a + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (16.19)$$

When $a < 0, |a| > x_0$ we have after similar calculations:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ = c'' a - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Thus, when there is no friction we obtain, according to (16.11), the following relationship between the amplitude of the stationary solution and the frequency of the external force :

$$a (c'' - v^2) + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a} \right)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] = \pm \equiv E$$

or, putting $\left| \frac{a}{x_0} \right| = A,$

$$A (c'' - v^2) + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + A \arcsin \frac{1}{A} \right] = \pm \frac{\varepsilon E}{x_0}.$$

With the help of the relationship (16.21) we construct a family of resonance curves (Figs. 88-91) (the relationship between $\frac{a}{x_0}$ and ω_2 where $\omega_2 = \sqrt{c''}$) for different values of $\frac{E}{c'' x_0}$. The resonance curves drawn in these diagrams practically coincide (within the limits of accuracy of construction of the curves) with the ones constructed with the help of the exact formulae of Den Hartog and Heites.

For constructing the resonance curves in the second approximation it is necessary to determine an expression for the sum entering into the formula (16.14). We note that the calculation of this sum does not present any difficulty because its component reduces with increasing n and hence it is sufficient to calculate only the first few terms.

Taking into consideration (16.18), we arrive at the following

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi &= \frac{(c' - c'')}{\pi} a \left\{ \frac{2x_0}{na} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(n \arcsin \frac{x_0}{a} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \sin \left[(n-1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^2}{n+1} \sin \left[(n+1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] \right\} \\
&\quad (n = 3, 5, 7, 9, \dots) \tag{16.22} \\
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f'_a(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi &= -\frac{2}{\pi} (c' - c'') \sin n \arccos \frac{x_0}{a} \\
&\quad (n = 2, 4, 6, 8, \dots)
\end{aligned}$$

Substituting (16.22) in the expression (16.14) and limiting the sum to the fifth term, we obtain

$$\begin{aligned}
a(v^2 - c'') - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[x_0 \sqrt{1 - (x_0/a)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \\
+ \frac{1}{2\omega^2} \left\{ f_3(a) [f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a)] + \frac{f_5(a) [f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a)]}{24} \right\} \pm \equiv E = 0, \tag{16.23}
\end{aligned}$$

where $f_n(a)$ and $f_n^{(1)}(a)$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), are determined by the expressions

$$\begin{aligned}
\hat{f}_3(a) &= -4(c' - c'') x_0 \sqrt{3\pi} - \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[1 + 2\frac{x_0^2}{a^2} \right] a, \\
f_5(a) &= \frac{4(c' - c'')}{15\pi} x_0 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[3 - 11\frac{x_0^2}{a^2} + 8\frac{x_0^4}{a^4} \right] a, \\
f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a) &= -\frac{8(c' - c'') x_0}{\pi} \frac{a}{a} \sqrt{1 - x_0^2/a^2} [1 - a^2/a^2], \\
f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a) &= -\frac{4(c' - c'')}{\pi} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{2}{aa_0^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - x_0^2/a^2} \left(1 - 2\frac{x_0^2}{a^2} \right) \right]. \tag{16.24}
\end{aligned}$$

We construct the resonance curves in the second approximation with the help of the relationship (16.23) (see Figs. 92, 93, 94 in which the resonance curves as well as the skeleton curves in the second approximation appear dotted ; the scale of these curves is considerably exaggerated. The continuous lines are curves in the first approximation).

We have drawn in Figs. 95-98 families of resonance curves constructed by taking into account, according to the formula (16.10), the effect of friction. While constructing these curves we took friction to be proportional to velocity and $\frac{\delta^\delta}{c^n} = 0.1$.

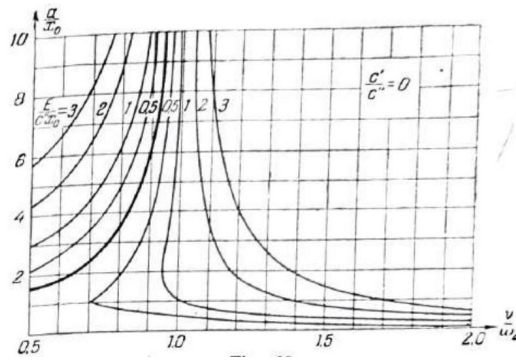


Fig. 88.

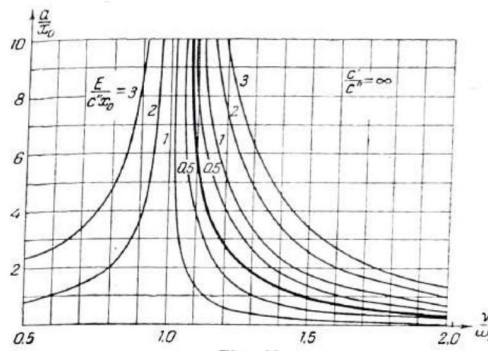


Fig. 89.

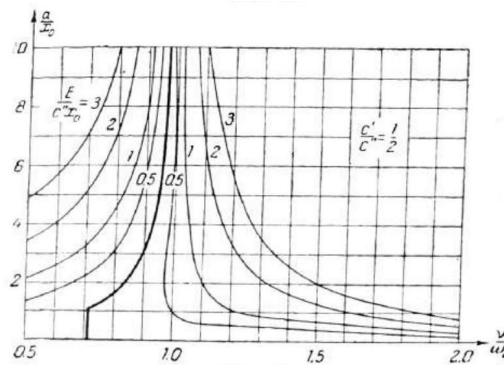


Fig. 90.

We examine also the case when the characteristic of the non-linear restoring force has the form shown in Fig. 99. For calculating $\omega_e(a)$ we have, according to formula (16.9),

$$F(x) = \begin{cases} c''x & \text{for } -x_1 \leq x \leq x_1 \\ c''x + (c'' - c')(x_1 - x) & \text{, , } x_1 \leq x \leq x_2 \\ c''x + (c'' - c')(x_1 - x) & \text{, , } -x_2 \leq x \leq -x_1 \\ c''x - (c'' - c')(x_2 - x_1) & \text{, , } x_2 \leq x \leq \infty \\ c''x + (c'' - c')(x_2 - x_1) & \text{, , } -\infty \leq x \leq -x_2 \end{cases} \quad (16.25)$$

For determining the integral on the right-hand-side of (16.9), we denote by ψ_1 and ψ_2 the lowest roots of the equations $x_1 = a \cos \psi$, $x_2 = a \cos \psi$, respectively. Hence, we may write :

$$F(a \cos \psi) = \begin{cases} \psi_1 \leq \psi \leq \pi - \psi_1 & c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_1 - a \cos \psi) \\ \psi_2 \leq \psi \leq \psi_1 & c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_1 - a \cos \psi) \\ \pi - \psi_1 \leq \psi \leq \pi - \psi_2 & c''a \cos \psi - (c'' - c')(a \cos \psi_2 - a \cos \psi_1) \\ 0 \leq \psi \leq \psi_2 & c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_2 - a \cos \psi_1) \\ \pi - \psi_2 \leq \psi \leq \pi & \end{cases} \quad (16.26)$$

We then divide the range of integration into five parts and obtain the following expression for $\omega_e^2(a)$:

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 + \frac{2(c'' - c')}{\pi} \left\{ \arccos \frac{x_2}{a} - \arccos \frac{x_1}{a} + \frac{x_1}{a} \sqrt{1 - x_1^2} - \frac{x_2}{a} \sqrt{1 - x_2^2} \right\} \quad (16.27)$$

Assuming, for the sake of simplicity, that friction is proportional to the first power of velocity $\varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) = -2\delta \frac{dx}{dt}$, we have

$$\delta_e(a) = \delta$$

For constructing the graph depicting relationship between the amplitude of the forced oscillations and the frequency of the perturbing force, we obtain the relationship :

$$v^2 = \omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 E^2}{a^2} - 4\delta^2 \omega^2} \quad (16.28)$$

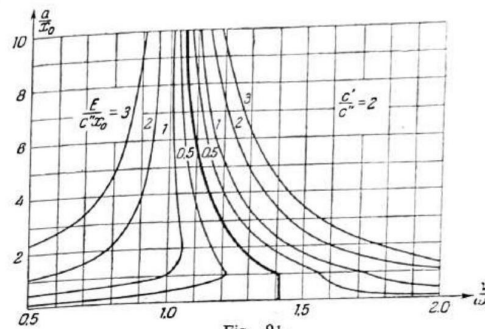


Fig. 91.

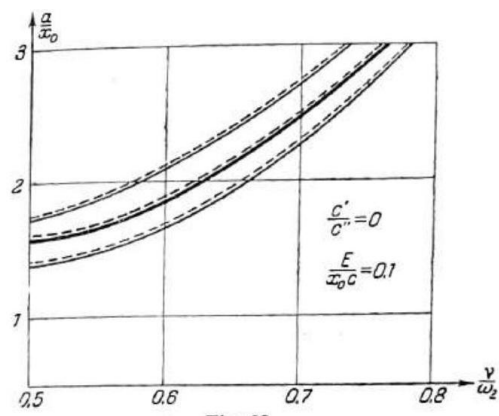


Fig. 92.

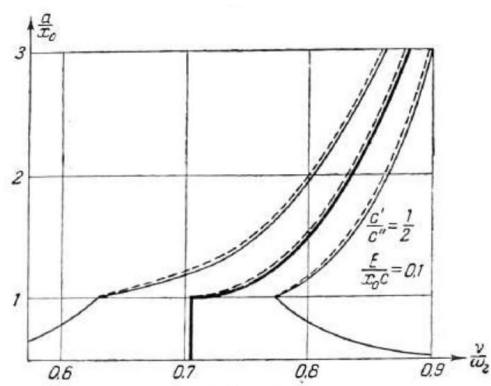


Fig. 93.

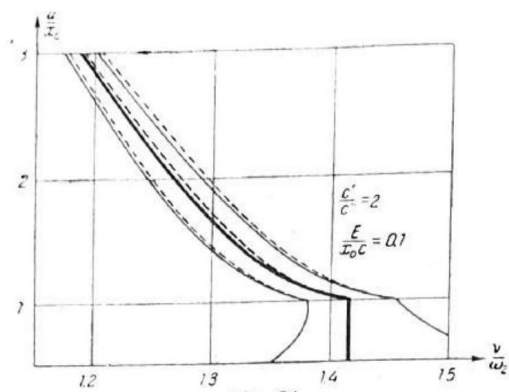


Fig. 94

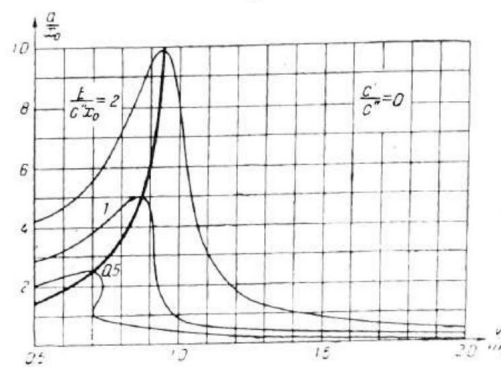


Fig. 95.

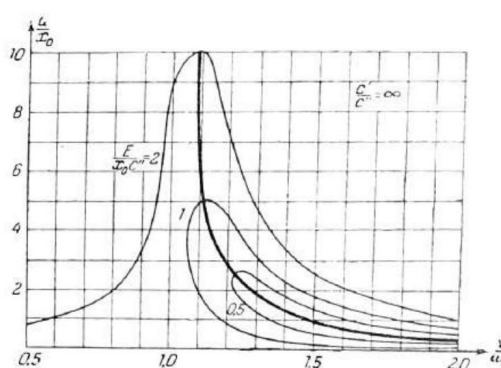


Fig. 96.

using this relation we draw the curve representing the dependence of y on a . Further, using the relation

$$y = \omega_c(a), \quad (16.29)$$

we construct a curve exhibiting dependence of the natural frequency

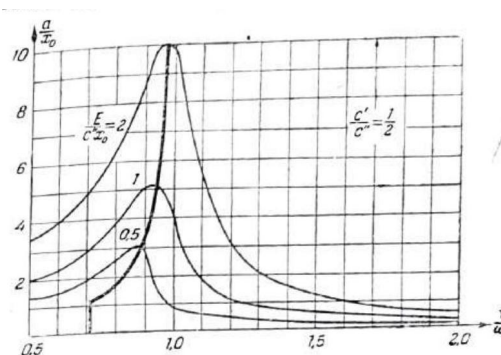


Fig. 97.

on the amplitude. In Fig. 100, we have drawn a family of curves characterising the dependence of the amplitude on the frequency of the

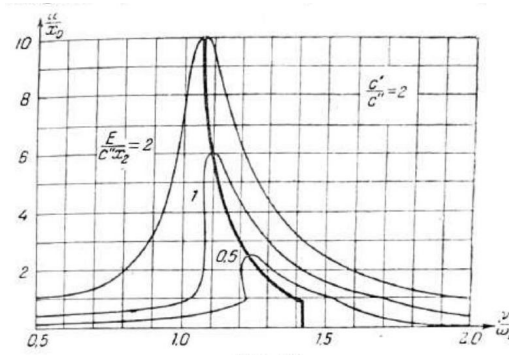


Fig. 98.

external force for different amplitudes of the external force (family of resonance curves). Using the criteria given on page 242 it is not difficult to determine the stable and the unstable zones and also the point of the 'break' and the 'jump' of the amplitude for these resonance curves. In Fig. 101, we have drawn one of the resonance curves. The

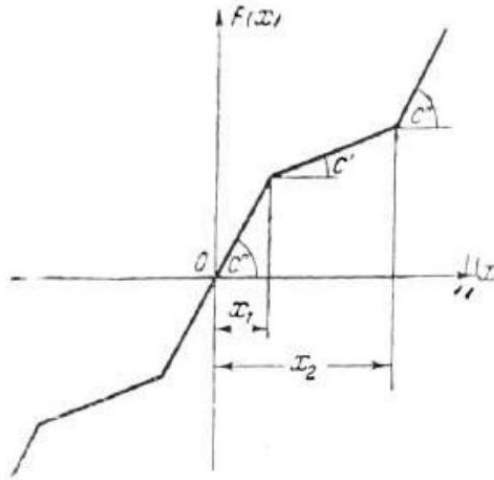


Fig. 99.

portions of this curve shown in thick lines correspond to the stable amplitudes and portions shown in thin lines correspond to the unstable amplitudes.

Thus we see from the resonance curve shown in Fig. 101 that when the change in the frequency of the external force is infinitely slow, beginning from very small values (during the stationary regime), the value of the amplitude of forced oscillations increases at first along the curve MA , then jumps from the point A to the point B and thereafter changes further along the curve BC . There is a break in the amplitude at the point C , whence it jumps to the point D and with further increase in the frequency changes along the curve DN .

If we now start reducing the frequency of the impressed force, the

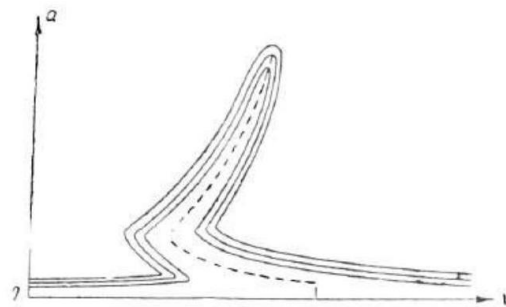


Fig. 100.

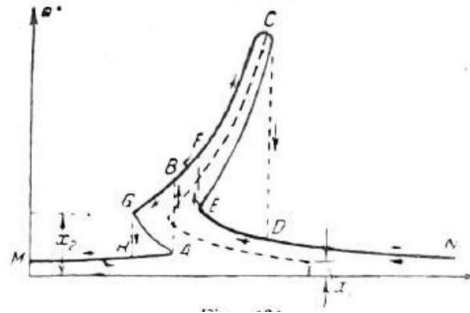


Fig. 101,

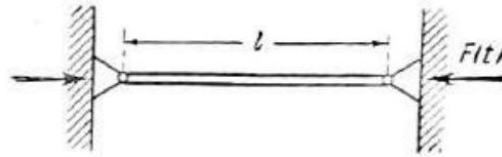


Fig. 102.

amplitude of forced oscillations will change along the curve NDE . From the point E the amplitude jumps to the point F and will further change along the curve FBG . Proceeding to the point G , the amplitude jumps to the point H after which it changes along the curve HM . Thus, here also we observe the same hysteresis phenomena, characteristic of a non-linear oscillatory system, that we observed on page 245.

The examples introduced exhibit the great flexibility and the wide range of applications of the method discussed above. The formulae derived for the complicated characteristic of the non-linear restoring force are also quite simple. In the case when the characteristic is composed of two rectilinear segments, we obtain a very simple formula (we note here that for a stationary regime we obtain in the first approximation a result that coincides with the result of Laure and Chekmarev). If the characteristic of the non-linear restoring force consists of several rectilinear segments our formulae undergo quite insignificant changes while the method of Den Hartog becomes so complicated as to render it practically inapplicable.

10.4.3 17. Parametric Resonance

In the present section we shall discuss certain oscillating systems the study of which reduces to integrating differential equations with variable (depending on time) coefficients. Of highest interest is the case of periodic coefficients. As we know, a number of engineering problems, besides the problems of celestial mechanics, lead us to investigate differential equations with periodic coefficients*).

One of the typical problems leading us to an examination of the aforementioned equations is the problem of transverse oscillations of a rod under the action of a longitudinal periodic force.

We assume that the rod has a length l , is fixed by the hinges at the ends, has a cross-section A , rigidity EI and density γ , and that a periodic longitudinal force

$$F = F(t) \quad (17.1)$$

*) Vide in this connection, V. N. Chelomei (46, 47).
acts upon it (vide Fig. 102).

Hence the differential equation of transverse oscillations of the rod may be represented in the following form :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \gamma A \partial \partial^2 y + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad (17.2)$$

where g is the acceleration due to gravity.

When the ends are hinged, the boundary conditions for the differential equation (17.2) will be :

$$\left. \begin{aligned} y_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0 \\ y_{z=l} &= 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Obviously the equation (17.2) with the boundary conditions stated above, after putting

$$y = x \sin \pi_l^z \quad (17.4)$$

may be reduced to the form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2}{\pi EI} F(t) \right] x = 0 \quad (17.5)$$

where we have introduced the notation :

$$\omega^2 = \frac{g \pi^4 EI}{\gamma A l^4} \quad (17.6)$$

Equation (17.5) is the well-known equation of Hill.

The problem of oscillation of a mathematical pendulum whose axis of rotation performs a given periodic motion in the vertical direction, the problem of oscillation of a mechanical system with periodically changing rigidity, the problems of amplitude modulation and many other problems may be reduced to equation (17.5).

When the periodic function $F(t)$ has a form

$$F(t) = P_0 \cos vt \quad (17.7)$$

we get, instead of (17.5), the equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2 P_0}{\pi EI} \cos vt \right] x = 0 \quad (17.8)$$

This is called Mathieu's equation. Hill's equation, just like Mathieu's equation, is a special case of a differential equation of the second order with periodic coefficients

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \quad (17.9)$$

where $p(t)$ and $q(t)$ are periodic functions of t with a period Ω .

Equations of the type (17.9) have been analysed in detail by a number of workers. However,

the existing theories (see in this connexion A. M. Liapunov [27]) allow only qualitative analysis of the behaviour of the solutions of the equation (17.9) and do not offer any help towards the construction of approximate solutions or offer means for deciding the question of stability of these solutions.

Solutions (for Mathieu functions) have been developed for the particular case of the equation (17.9) and an extensive literature has been concerned with this solution.

In several cases, the differential equations with periodic coefficients may be reduced to the equation (13.1) examined in §13. and hence the approximate solution may be developed according to the method already discussed.

We shall construct below an approximate solution and also determine the zone of stability in the first and second approximations in the simplest case of an equation with periodic coefficients (17.9), for Mathieu's equation, and compare the results obtained with those known in literature.

Thus we shall proceed on to construct the approximate solutions for the equation (17.8) which may be written in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos vt)x = 0 \quad (17.10)$$

where

$$h = \frac{P_0 l^2}{\pi EI} \leq 1.$$

As we have already shown, we may study, in the first approximation, only the fundamental demultiplication resonance $p = 1, q = 2$ for an equation of the type (17.10). Assuming that $\omega = \frac{v}{2}$, we construct approximate solutions corresponding to the resonance case.

Utilising the formula (14.25) we have in the first approximation

$$x = a \cos \left(\frac{v}{2} t + \theta \right), \quad (17.11)$$

where a and θ must be determined from the system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{v}{2} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

To solve the system of equations of first approximation obtained above, we introduce new variables u and v according to formulae

$$u = a \cos \theta, \quad v = a \sin \theta \quad (17.13)$$

Differentiating (17.13) and considering the equation (17.12) we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} a \sin \theta = \left[-\frac{h\omega^2}{2v} - \left(\omega - \frac{v}{2} \right) \right] a \sin \theta, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{da}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} a \cos \theta = \left[-\frac{h\omega^2}{2v} - \left(\omega - \frac{v}{2} \right) \right] a \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (17.14) \text{ or}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2v} + \left(\omega - \frac{v}{2} \right) \right] v \\ \frac{dv}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2v} + \left(\omega - \frac{v}{2} \right) \right] u \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Thus, the equations of the first approximation (17.12) have been reduced to a system of two linear equations with constant coefficients.

The nature of the solutions of the system of equations (17.15), and hence the solutions of the system (17.12), depends on the roots of the characteristic equation

$$\left| \frac{\lambda}{\frac{h\omega^2}{2v} - \left(\omega - \frac{v}{2}\right)} - \frac{\frac{h\omega^2}{2v} + \left(\omega - \frac{v}{2}\right)}{\lambda} \right| = 0$$

or

$$\lambda^2 - \frac{h^2\omega^4}{4v^2} + \left(\omega - \frac{v}{2}\right)^2 = 0 \quad (17.16)$$

We denote the roots of this equation by where

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4v^2} - \left(\omega - \frac{v}{2}\right)^2} \quad (17.17)$$

Hence, the general solution of the system of differential equations (17.15) may be represented in the following form :

$$v = C_1 \frac{\frac{-h\omega^2}{2v} + \left(\omega - \frac{v}{2}\right)^{\lambda, t} + C_2 \frac{h\omega^2 - \left(\omega - v\right)^{2v} - (\omega,}{\lambda} \quad (17.18)$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants which are determined by the initial conditions.

We then determine the amplitude a and the phase of oscillation θ appearing on the right-hand-side of the formula (17.11). We have

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= u^2 + v^2 \\ \theta &= \arctg \frac{v}{u} \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

It is obvious from the formulae (17.17), (17.18) and (17.19) that when λ is imaginary the amplitude a will be a bounded function of time.

However, when λ is real, the amplitude a will increase according to the exponential law. This case corresponds to the presence of the fundamental demultiplication resonance in the system.

According to equation (17.17), the conditions for λ to be real will be

$$\frac{h\omega^2}{2v} > \omega - \frac{v}{2}, \quad (17.20)$$

or, with an accuracy of the first order because $v = 2\omega + O(h)$.

$$\frac{h\omega}{4} > \omega - \frac{v}{2}$$

Thus if the frequency of the external force lies in the interval

$$2\omega \left(1 - \frac{h}{4}\right) < v < 2\omega \left(1 + \frac{h}{4}\right) \quad (17.21)$$

the fundamental demultiplication resonance will appear in the system and the amplitude of the oscillations will increase according to the exponential law. Since this resonance arises as a result of a periodic change in one of the parameters of the oscillating system, it is generally called the parametric resonance.

The inequalities (17.21) represent the zone of instability within which the position of equilibrium, $x = 0$, will be found unstable and oscillations will be excited automatically in the system.

We now proceed on to construct and analyse the second approximation.

According to formulae (14.5), (14.21), (14.25) and (14.26) we have, in the second approximation,

$$x = a \cos \left(\frac{v}{2}t + \theta \right) - \frac{ah\omega}{8(\omega + \frac{v}{2})} \cos \left(\frac{3}{2}vt + \theta \right), \quad (17.22)$$

where a and ϑ must be determined from the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah(\omega^2)}{2v} \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{v}{2} + \frac{h^2(\omega + v)\omega}{32(\omega + \frac{v}{2})} \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

The system of equation (17.23), with the change of variables (17.13), also leads to the system of linear equations

$$\left. \begin{aligned} du &= \left[-h\omega^2 - \left(\omega - \frac{v}{2} \right) - \frac{h^2(\omega + v)\omega}{32(\omega + \frac{v}{2})} \right] v \\ dt &= \left[-\frac{2v}{2v} + \left(\omega - \frac{v}{2} \right) + \frac{h^2(\omega + v)\omega}{32(\omega + \frac{v}{2})} \right] u \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

The roots of the characteristic equation in the given case have the form:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4v^2} - \left[\omega - \frac{v}{2} + \frac{h^2(\omega + v)\omega}{32(\omega + \frac{v}{2})} \right]^2} \quad (17.25)$$

and, hence the zone of instability in the second approximation is determined, correct upto the second order inclusive, by the following inequality:

$$2\omega \begin{bmatrix} 1 & h & h^2 \\ & 4 & 64 \end{bmatrix} < v < 2\omega \begin{bmatrix} 1 & h \\ 4 & h^2 \\ & 64 \end{bmatrix}. \quad (17.26)$$

We now derive a relationship between ω and h for which the solution of the equation (17.10) will be periodic with a period $\frac{4\pi}{v}$. This is possible in the case when in the formulae (17.11) and (17.22), $a = \text{const.}$ For this it is necessary that λ defined by the expression (17.17) or (17.25) be equal to zero.

Thus, the relationship which should be satisfied by ω and h so that x might be a periodic function, will be, in the first approximation

$$\frac{2\omega}{v} = 1 \pm h/4 \quad (17.27)$$

in the second approximation,

$$\frac{2\omega}{v} = 1 \pm \frac{h}{4} + \frac{5h^2}{64} \quad (17.28)$$

or, correct to the same degree of accuracy, in the first approximation :

$$\begin{aligned} 4\omega^2 \\ v^2 = 1 \pm \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (17.29)$$

and in the second approximation:

$$\frac{4\omega^2}{v^2} = 1 \pm \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} \quad (17.30)$$

The relationships (17.29) and (17.30) represent equations of curves on the plane $\left(\frac{4\omega^2}{v^2}, h\right)$ (in the first and second approximation) on which the solution of the equation (17.10) will be periodic, i.e. equations of bounded curves of the stability zone of the solutions of the equation (17.10), (Fig. 103).

For periodic solutions with period $\frac{4\pi}{v}$ from (17.11) and (17.22) and taking into account (17.29) and (17.30), we derive, the following expressions :

$$x_I = a_0 \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta_0\right), \quad (17.31)$$

$$x_{II} = a_0 \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta_0\right) - \frac{a_0 h}{16} \cos\left(\frac{3v}{2}t + \theta_0\right), \quad (17.32)$$

the index with x denoting the order of the approximation.

We now compare the formulae obtained with the results obtained

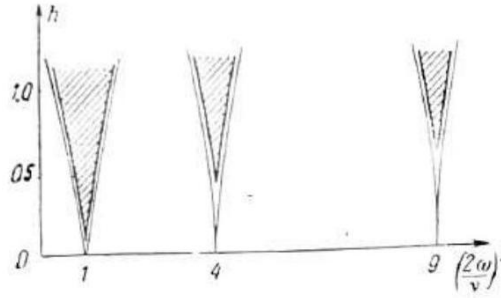


Fig. 103.

For this purpose we take recourse to the procedure adopted by Mathieu for deriving solutions of the equation (17.10) and equation of bounded curves, presuming the parameter to be small h . (This method follows directly from Poincares' method [38], for developing periodic solutions).

We seek the periodic solution of the equation (17.10) with a period $\frac{4\pi}{v}$ in the form of the series

$$x = x_0 + hx_1 + h^2x_2 + \dots, \quad (17.33)$$

in which $x_0, x_1, x_2, \dots$ must be periodic functions with period $\frac{4\pi}{v}$.

We also represent the expression for ω^2 in the form of the series

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} + h\omega_1 + h'(\omega_2 + \dots \quad (17.34)$$

Substituting the right-hand-sides of (17.33) and (17.34) in equation (17.10) and equating coefficients of equal powers of h , we obtain the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{v^2}{4}x_0 &= 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{v^2}{4}x_1 &= \begin{pmatrix} v^2 \cos vt - \omega_1 \\ 4x_0 \\ d^2x_2 \\ dt^2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots &+ (\omega_1 \cos vt - \omega_2)x_0 \end{aligned} \right\} \quad (17.35)$$

and from these we have to determine the functions $x_0, x_1, x_2 \dots$ and the quantities $\omega_1, \omega_2, \dots$. Solving the first equation of the system (17.35) we obtain

$$x_0 = a_0 \cos \left(\frac{v}{2} t + \theta_0 \right), \quad (17.36)$$

where a_0 and θ_0 are arbitrary constants.

We put the value of x_0 (17.36) in the right-hand-side of the second equation of the system (17.35) and have

$$\begin{aligned} d^2 x_1 + v^2 x_1 = & -\omega_1 a_0 \cos \left(\frac{v}{2} t + \vartheta_0 \right) + \\ & + \frac{v^2}{4} a_0 \cos \left(\frac{v}{2} t + \vartheta_0 \right) \cos vt \end{aligned} \quad (17.37)$$

or

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{v^2}{4} x_1 = & - \left(\omega_1 - \frac{v^2}{8} \right) a_0 \cos \frac{v}{2} t \cos \theta_0 + \\ & + \left(\omega_1 + \frac{v^2}{8} \right) a_0 \sin \frac{v}{2} t \sin \theta_0 + \\ & + \frac{v^2}{8} a_0 \cos \left(\frac{3}{2} vt + \vartheta_0 \right) \end{aligned} \quad (17.38)$$

In order that x_1 might be a periodic function with a period $\frac{4\pi}{v}$ it is necessary that the coefficients of $\cos \frac{v}{2} t$ and $\sin \frac{v}{2} t$ in the right-hand-side of (17.38) shall be zero. Hence, we have

$$\omega_1 = \frac{v^2}{8}, \quad \sin \theta_0 = 0, \quad \theta_0 = 0$$

or

$$\omega_1 = -\frac{v^2}{8}, \quad \cos \theta_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

After this we derive the approximation for x_1 :

$$x_1 = -\frac{a_0}{16} \cos \frac{3v}{2} t + u \cos \left(\frac{v}{2} t + 0 \right). \quad (17.39)$$

or

$$x_1 = a_0/16 \sin \frac{3v}{2} t + u \cos \left(\frac{v}{2} t + o \right). \quad (17.40)$$

Putting the values of x_0 and x_1 in the right hand-side of the third equation of the system (17.35) we obtain, for $\omega_1 = \frac{v^2}{8}$, and $\theta_0 = 0$, the expression :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{v^2}{4} x_2 = & - \left(\begin{array}{c} v^2 \\ 4 \\ \cos vt - \omega_1 \end{array} \right) \frac{a}{16} \cos \frac{3v}{2} t - \\ & - \frac{v^2}{4} (\cos vt - \omega_1) u \cos \left(\frac{v}{2} t + \varphi \right) + \\ & + (\omega_1 \cos vt - \omega_2) a \cos \frac{v}{2} t \end{aligned}$$

Again, equating to zero the coefficients of $\cos \frac{v}{2}t$ and $\sin \frac{v}{2}t$, we obtain

$$\omega_2 = \frac{v^2}{16} - \frac{v^2}{128} = \frac{7v^2}{128}, \quad (17.41)$$

$$\frac{v^2}{4}u \sin \varphi + \frac{v^2}{8}u \sin \varphi = 0, \text{ i.e. } \sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

Similarly we obtain for the second case :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_2 = \frac{7v^2}{128}, \\ \cos \varphi = 0. \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right\} \quad (17.42)$$

Substituting the values obtained for $x_0, x_1, \omega_1, \omega_2$ in the right-hand-side of the formulae (17.33) and (17.34) we have :

$$x = a_0 \cos \frac{v}{2}t - \frac{a_0 h}{16} \cos \frac{3v}{2}t, \quad (17.43)$$

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} + \frac{h v^2}{8} + \frac{7 h^2 v^2}{128}, \quad (17.44)$$

or

$$x = a_0 \sin \frac{v}{2}t + \frac{a_0 h}{16} \sin \frac{3v}{2}t \quad (17.45)$$

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} - \frac{h v^2}{8} + \frac{7 h^2 v^2}{128}. \quad (17.46)$$

In these formulae, for the sake of convenience, we included hu in the full amplitude of the first harmonic a_0 .

Assuming $v = 2, a_0 = 1$, we derive

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t \\ \omega^2 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}; \\ x = \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t \\ \omega^2 = 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} \end{array} \right\} \quad (17.48)$$

The expressions (17.47) and (17.48), as could naturally be expected, coincide with the first two terms in the expansions C_n and $S_n (n = 1)$ of the Mathieu functions in Fourier series. We have, here,*) :

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t + O(h^2) \\ \omega^2 C_1 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3) \end{array} \right\} \quad (17.49)$$

and also

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t + O(h^2) \\ \omega_{S_1}^2 = 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3) \end{array} \right\} \quad (17.50)$$

We shall now discuss the development of approximate solutions of the equation (17.10) and determine the bounds of the zone of unstability when $\omega \approx \frac{v}{2}p$, where $p = 2, 3$.

For the case $p = 2$, i.e. $\omega \approx v$, we assume $p = 2, q = 2$ in the formulae (14.21), (14.23) and (14.26).

Hence we have the following expression for the second approximation :

$$x = a \cos(vt + \theta) + \frac{h\omega^2}{2v(v+2\omega)} \cos(2vt + \theta) + \frac{h\omega^2 a}{2v(v-2\omega)} \cos \theta,$$

where a and θ must be determined from the equation of second approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{h^2 a \omega^4}{8v^2(2\omega-v)} \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - v - \frac{h^2 \omega^4}{4v(4\omega^2-v^2)} + \frac{h^2 \omega^4}{8v^2(2\omega-v)} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (17.52)$$

We derive from the system (17.52), as also in the foregoing case, the condition for real roots of the characteristic equation

$$\left(\omega - v - \frac{h^2(\omega)^4}{4v(4\omega^2-v^2)} < \frac{h^2(\omega)^4}{8v^2(2\omega-v)} \right), \quad (17.53)$$

and, hence, the zone of instability is determined, correct to the second order, by the inequality

$$4 + \frac{2l^2\omega^4}{v^2(4\omega^2-v^2)} - \frac{l^2\omega^4}{v^3(2\omega-v)} < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 4 + \frac{2h^2\omega^4}{v^2(4\omega^2-v^2)} + \frac{h^2\omega^4}{v^3(2\omega-v)} \quad (17.54)$$

or, upto the same degree of accuracy by the inequality

$$4 + \frac{2h^2}{3} - h^2 < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + h^2 \quad (17.55)$$

Here we have taken into consideration that $\omega \approx v$.

For the case $p = 3$, i.e. $\omega \approx \frac{3}{2}v$, it is necessary to calculate the third approximation, because in the second approximation we get only a correction to the value of the natural frequency ω . After a series of calculations we obtain

$$x = a \cos\left(\frac{3}{2}vt + \theta\right) - \frac{\omega^2 ha}{2} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{5}{2}vt + \theta\right)}{vt + \vartheta} - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}vt + \theta\right)}{v(2\omega - v)} \right\} + \frac{h^2 \omega^4 a}{16v^2} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{7}{2}vt + \vartheta\right)}{(2\omega + v)(v + \omega)} + \frac{\cos\left(\frac{v}{2}vt - \vartheta\right)}{(2\omega - v)(\omega - v)} \right\} \quad (17.56)$$

where a and θ must be determined from the system of equations of third approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -3.2^5 v^3 (2\omega - v)(\omega - v) \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{3}{2}v - \frac{\omega^4 h^2}{3.2v(4\omega^2 - v^2)} - 3.2^5 v^3 (2\omega - v)(\omega - v) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (17.57)$$

We note, in passing, that we did not write out the expression for the third approximation in the general case because of the unwieldiness of this expression. The structure of the equation (17.57) itself, however, points out, once again, the very simple nature of the equations of the third approximations.

From the system of equations (17.57), we derive the inequality for the zone of instability:

^{0*)} Vide, in this connection, M. D. O. Strelt, Functions of Lamé', Mathieu and like other functions in physics and engineering.

$$9 + \frac{\omega^6 h^3}{2\omega^4 h^2} - 2v^2 - v^2 \Big) < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 9 + v^2 (4\omega^2 - v^2) (2\omega - v)(\omega - v) + \frac{2\omega^4 h^2}{v^2 (4\omega^2 - v^2)} + 2^3 v^4 (2\omega - v)(\omega - v)^3 \quad (17.58)$$

or, accurate upto the same degree the inequality

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \frac{3^6 h^3}{2^9} < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \frac{3^6 h^3}{2^9} \quad (17.59)$$

We now introduce here, the inequality determining the zone of instability in the case $\omega \approx \frac{\nu}{2}$. In accordance with (17.20) we have

$$1 - \frac{h}{2} < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 1 + \frac{h}{2} \quad (17.60)$$

From an analysis of the inequalities (17.55), (17.59) and (17.60) it is obvious that the magnitude (width) of the zone of instability diminishes with its order p , as h^p .

Thus, we can observe higher resonances $p = 2, 3, \dots$ by examining the second, third . . . approximations respectively, and we obtain an infinite spectrum of resonances from an analysis of the exact solution of the equation (17.10).

In Fig. 103 we have shown the first three zones of instability constructed in conformity with the inequalities (17.55), (17.59) and (17.60).

We find that when the damping is present, i.e. for the equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 (1 - h \cos vt) x = 0 \quad (17.61)$$

these zones decrease in magnitude (vide the shaded zones). It is easy to show that when friction is present we obtain the following inequalities instead of those examined before :

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{v^2}} < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{v^2}} \quad (17.62)$$

$$4 + \frac{2h^2}{3} - \sqrt{h^4 - 64\frac{\delta^2}{v^2}} < \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + \sqrt{h^4 - 64\frac{\delta^2}{v^2}} \quad (17.63)$$

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \sqrt{213^{12} h^{6^3 4^8 2^2}} < \left(\frac{2(1)}{v}\right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \sqrt{32^{12} h^6} - 3^4 4_{22}^{8^2} \quad (17.64)$$

The inequalities (17.62), (17.63) and (17.64) contain some more conditions : for the first zone :

$$h > 4\frac{\delta}{v}, \quad (17.65)$$

for the second

$$h > 2\sqrt{2\frac{\delta}{v}}, \quad (17.66)$$

and for the third

$$h > \frac{8}{3}\sqrt[6]{\frac{4\delta^2}{9v^2}} \quad (17.67)$$

It can easily be seen that when damping is present, we require a much higher percentage modulation of the parameter h (ω^2) for observing the resonance $\omega \approx \frac{v}{2}$ than for the resonance $\omega \approx v$. Further, it is more difficult to get a resonance $\omega \approx \frac{3}{2}v$. Hence the case of the resonance $\omega \approx \frac{v}{2}$ is of most practical interest.

We now examine parametric excitation in a non-linear oscillating system.

We note that the above-mentioned case proves that in a non-linear oscillating system, when the mass or rigidity of the system changes parametrically under defined conditions, the position of equilibrium remains unstable. Even when the values of $\omega^2 h$ in the system (modulation percentages) are very small, under certain relations of the frequency, there appear oscillations whose amplitude increases, without limit.

When dissipative forces are present in a linear system, it influences only the conditions of excitation of the oscillations. In the presence of dissipation, the percentage modulation for which resonance occurs has a certain lower limit. This limit is different from zero and depends upon the magnitude of the damping decrement. There will be nonstationary oscillations when the frictional forces exist in a linear system.

The situation is different in the case of a non-linear oscillating system, as will be shown below. Resonance will start when there is change of the above-mentioned parameters of the oscillating system according to the harmonic law with a frequency, say for instance, equal or nearly equal to the double of natural frequency of the system. In the given case, stable states of the stationary oscillations are possible.

As the simplest example of this, we examine an oscillation system described by the following differential equation

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos vt)x + 2\delta \frac{dx}{dt} + \gamma x^3 = 0 \quad (17.68)$$

We assume that the oscillations described by equation (17.68) are harmonic. Hence, the solution of the equation (17.68), corresponding to the presence of a fundamental demultiplication resonance in the system, may be represented in the form

$$x = a \cos\left(\frac{v}{2}t + \vartheta\right), \quad (17.69)$$

where according to (14.25) a and θ must satisfy the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\vartheta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{v}{2} + \frac{3ya^2}{4v} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (17.70)$$

For obtaining the stationary values of the amplitude and the phase of the oscillations, we equate the right-hand-sides of the system (17.70) to zero.

We get the relationship

$$\left. \begin{aligned} -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\theta &= 0 \\ \omega - \frac{v}{2} + \frac{3va^2}{4v} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.71)$$

Eliminating the phase θ from these, we get, accurate upto the first order, the following relationship between the amplitude a and the modulation frequency v :

$$a^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[\left(\frac{v}{2} \right)^2 - \omega^2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{h^2 \omega^4 - 4v^2 \delta^2} \right]. \quad (17.72)$$

With the help of this relationship we construct a resonance curve. In case, if $\gamma > 0$, we shall construct the resonance curve as, shown in Fig. 104. Analysing this curve we find that when v increases from small values, oscillation in the system will be absent until v attains the value corresponding to the point A . Oscillation appears in the system when v reaches point A and with further increase in v the amplitude of these oscillations will change along the upper branch AB of the resonance curve. At the point B oscillations lose their stability and

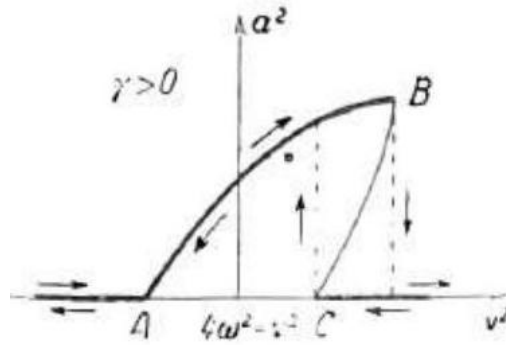


Fig. 104.

When v diminishes from large values, the oscillation suddenly jumps to the point C (hard excitation) and with subsequent reduction in the value of v the amplitude of oscillation will change along the curve

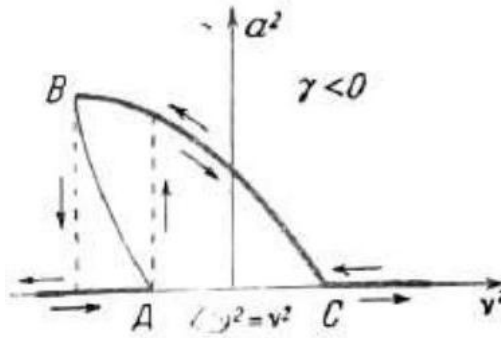


Fig. 105.

When $\gamma < 0$, we obtain a similar picture; only in this case the resonance curve will be inclined to the side of small values of v (Fig. 105). For determining the limits of the zone of synchronization, it is necessary to equate to zero, the right-hand-side of the expression for a .

The zone of resonance in the first approximation will be

$$\omega^2 - \frac{1}{2} \sqrt{h^2 \omega^4 - 16\omega^2 \delta^2} < \left(\frac{v}{2} \right)^2 < \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{h^2 \omega^4 - 16\omega^2 \delta^2}. \quad (17.73)$$

Hence the width of the resonance zone is :

$$\Delta = \sqrt{h^2\omega^4 - 16\omega^2\partial^2} = .$$

We note that the presence of damping reduces the interval AC

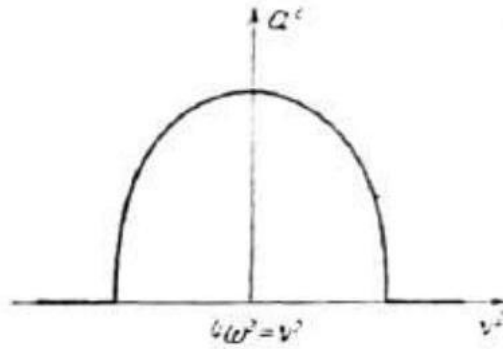


Fig. 106.

inside which the parametric resonance arises.

It is obvious that Δ will be real if the inequality

$$h > \frac{4\hat{\omega}}{\omega}, \quad (17.75)$$

is satisfied. This inequality, as has been said above, determines the minimum modulation percentage necessary for parametric resonance when damping is given.

We examine once again the case of parametric resonance in an oscillating system with non-linear friction.

In the case of parametric excitation of a circuit with an electron tube (Fig. 23) the equation of oscillations will be

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\lambda_0 + \lambda_2x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2(1 - h \cos vt)x = 0. \quad (17.76)$$

We assume that when parametric excitation is absent, i.e. when $h = 0$, the system is not self-excited. For this it is necessary that $\lambda_0 > 0$.

We construct the equation of the first approximation. We have

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\lambda_0 - \frac{\lambda_2 a^3}{4} - \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\theta \\ d\theta &= \omega - \frac{v}{2} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (17.77)$$

For determining the stationary values of a and θ we equate the right-hand-sides of equations (17.77) to zero:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 a + \frac{\lambda_2 a^3}{4} + \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\theta &= 0, \\ \omega - \frac{v}{2} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Eliminating v from the relations obtained above, we derive, with accuracy indicated above, the following relationship between the amplitude of oscillation a and the frequency v of the parametric change :

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_2 v} \sqrt{h^2 \omega^4 - 4 \left(\omega^2 - \left(\frac{v}{2} \right)^2 \right)^2 - 4 \frac{\lambda_0}{\lambda_2}}. \quad (17.79)$$

With the help of this relationship we can construct the resonance curve (Fig. 106) and also derive the conditions for the parametric excitation, for the amplitude of excitation to be maximum, for the boundaries of the resonance zone, etc.

10.4.4 18. Effect of Periodic Forces on a Relaxation System

We now investigate the influence of an external exciting force on a relaxation oscillating system characterised by an equation of the type :

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos vt, \quad (18.1)$$

where, as in the second Chapter, $\Phi(x)$ represents a double valued function in the interval (a, b) .

For constructing the solution of equation (18.1) it is expedient, first of all, to transform it so as to eliminate from it the ambiguous function $\Phi(x)$. For this purpose we start from some particular periodic solution of the equation of free relaxation oscillation

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x). \quad (18.2)$$

For definiteness we shall take that solution of the equation (18.2) in which x takes up its minimum value when $t = 0$.

Denoting the frequency of v the free relaxation oscillation by ω we write this periodic solution in the form

$$x = z(\omega t), \quad (18.3)$$

where $z(\varphi)$ is some periodic function of φ with a period 2π . Taking into account the

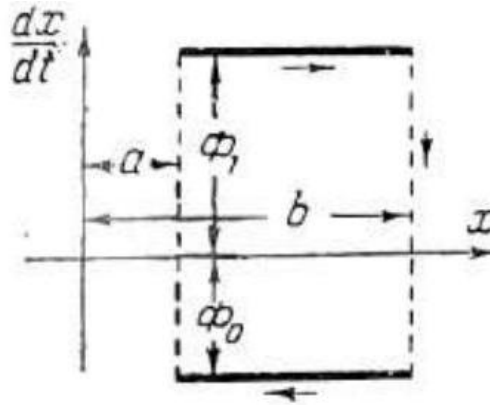


Fig. 107.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_1 = \text{const}, & a < x < b, \\ \Phi(x) &= -\Phi_0 = \text{const}, & a < x < b, \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

the solution of equation (18.2) (Fig. 107) may be represented in the form:

$$x = a + \Phi_1 t, \quad 0 < t < {}^b\Phi_1 a$$

$$x = b + \Phi_0 \left[\frac{b-a}{\Phi_1 - t} \right], \quad b-a < t < (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1} \quad (18.5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1} \quad (18.6)$$

and, consequently,

$$\omega = \frac{2\pi}{b-a\Phi_0 + \Phi_1}. \quad (18.7)$$

Introducing the notation

$$\varphi_0 = 2\pi \frac{\Phi_0}{\Phi_0 + \Phi_1}$$

the periodic solution $z(\varphi)$ may be written in the following form:

$$\left. \begin{aligned} z(\varphi) &= a + b - a\varphi_0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \\ z(\varphi) &= a + \frac{b-a\Phi_0}{\varphi_0} \Phi_1 (2\pi - \varphi), \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

We now find that, since the expression (18.8) represents the solution of equation (18.2), the function $z(\varphi)$ must satisfy identically the following relationship :

$$\omega z'(\varphi) = \Phi[z(\varphi)]. \quad (18.9)$$

We now make a change in the variables in the equation (18.1) describing forced oscillations. We introduce a new unknown x for the unknown φ with the help of the formula

$$x = z(\varphi). \quad (18.10)$$

Differentiating (18.10) and substituting the result in (18.1) we obtain :

$$z'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \Phi[z(\varphi)] + \varepsilon E \cos vt \quad (18.11)$$

or, according to the identity (18.9),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon E \cos vt}{z'(\varphi)} \quad (18.12)$$

The transformed equation (18.12) does not contain any ambiguous functions on the right-hand-side.

For convenience of construction of the approximation solutions of differential equations it is usually desirable that the right-hand-side should be a regular function. The right-hand-side of the equation (18.12) does not satisfy the condition of regularity because of the existence of the discontinuous function $z'(\varphi)$ in the denominator. For regularisation of the equation (18.12) it is sufficient to change the role of the variables t and φ and to treat in future φ as an independent variable and t as an unknown function of φ , determined by the differential equation :

$$\frac{d(vt)}{d\varphi} = \frac{v}{\omega + \frac{\varepsilon E \cos vt}{z'(\varphi)}} \quad (18.13)$$

If we denote a positive constant by γ such that the inequalities

$$|\Phi(x)| > \gamma, \quad a < x < b \quad (18.14)$$

are satisfied, we have according to (18.9) and (18.10)

$$\omega |z'(\varphi)| > \gamma. \quad (18.15)$$

We assume that the amplitude εE of the external excitation force is less than γ . Hence, the denominator on the right-hand-side of (18.13) is positive and the right-hand-side of this equation itself is an analytic function of the unknown t . Equations of the type (18.13) were investigated by A. Poincaré and A. Danjoui. However, with the help of results obtained by them we can explain only the qualitative character of the solutions. For obtaining a method that would permit us to undertake quantitative analysis we use the method of averaging briefly discussed in Chapter I.

To apply the results of I to the equation (18.13) we expand its right-hand-side in a power series in ε . We have

$$\frac{d(vt)}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} - \frac{\varepsilon v E \cos vt}{\omega^2 z'(\varphi)} + \frac{\varepsilon^2 v E^2 \cos^2 vt}{\omega^3 z'(\varphi)^2} - \varepsilon^3 \dots \quad (18.16)$$

We shall now analyse the foregoing equation for the resonance case. We presuppose that the ratio $\frac{v}{\omega}$ is nearly equal to a certain rational number $\frac{p}{q}$ where, as above, p and q are, generally speaking, small and mutually prime numbers.

Hence, assuming

$$\frac{v}{\omega} = \frac{p}{q} + \varepsilon \Delta \quad (18.17)$$

and introducing a new variable τ :

$$\tau = vt - \frac{p}{q} \rho,$$

equation (18.16) may finally be written in the form:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \varepsilon \left\{ \Delta - \frac{p}{q} E \cos \left(\tau + \frac{p}{q} z'(\varphi) \right) \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{p E^2 \cos^2 \left(\tau + \frac{p}{q} \varphi \right)}{q \omega^2 [z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta E \cos \left(\tau + \frac{p}{q} \varphi \right)}{z'(\varphi)} \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (18.18)$$

As stated before we would call an equation of the type (18.18) an equation in the standard form.

An approximate solution of this equation may be constructed by the method of averaging.

According to the results of 1, Chapter I, the solution of equation (18.18) in the first approximation will be

$$\tau = \xi, \quad (18.19)$$

where ξ is determined from the averaged equation

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta - \frac{p}{q \omega^2} E \left\{ \frac{\cos(\xi + p)}{z'(\rho)} \right\} \quad (18.20)$$

We now show in detail the averaging operation on the right-handside of the equation obtained above. For this purpose it is necessary to expand the function $\frac{1}{\omega z'(\varphi)}$ in a Fourier series. We have

$$\frac{1}{\omega z'(\varphi)} = \frac{1}{\Phi[z(\varphi)]} = A_0 + \sum_{n \neq 0} A_n \cos(n\varphi + \vartheta_n) \quad (18.21)$$

We find that the expression

$$M_{\varphi} \left\{ \cos(n\varphi + \theta_n) \cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) \right\}$$

may differ from zero only when $\frac{p}{q} = n$. In this case we have

$$M_{\varphi} \{ \cos(n\varphi + \theta_n) \cos(\xi + n\varphi) \} = \frac{1}{2} \cos(\xi - \theta_n).$$

Thus, if $\frac{p}{q} \neq n$, where n is an integer the equation of first approximation (18.20) degenerates to

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta, \quad (18.22)$$

whence we obtain :

$$\tau = \xi = \varepsilon \Delta \varphi + \text{const},$$

i.e.

$$vt - \varphi \frac{p}{q} = \left(\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} \right) \varphi + \text{const},$$

or

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (18.23)$$

and hence, in the first approximation,

$$x = z(\omega t + \varphi_0). \quad (18.24)$$

Thus when $\frac{p}{q} \neq n$, we obtain for forced oscillations, the same expression in the first approximation as we obtain for free oscillations when the external force $\varepsilon E \cos vt$ does not act upon the system.

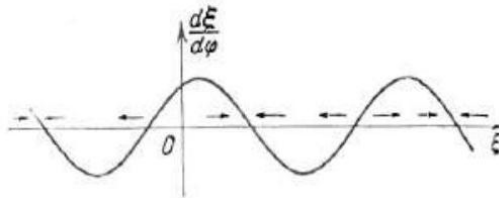


Fig. 108.

We now examine the case when $\frac{p}{q}$ is equal to a certain integer m connected with the subharmonic resonance $\omega \approx \frac{v}{m}$.

We derive from equation (18.20)

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m) \quad (18.25)$$

The equation thus obtained is considerably simpler than the corresponding equation of first approximation, (14.39), for the system examined in 14 of this Chapter where we obtained a system of two differential equations in two unknowns—the amplitude and the full phase of the oscillation. In the present case, i.e. of relaxation oscillation, we have only one differential equation in the phase angle and this can be integrated by quadratures with respect to ζ .

The nature of the solutions of equation (18.25) may also be directly demonstrated without actually integrating it.

Let, in this connection,

$$\frac{v}{\omega} - m < \frac{\varepsilon m A_m}{2} \quad (18.26)$$

Hence, the derivative $\frac{d\xi}{d\varphi}$ will be a sign-changing function of ξ of the form shown in Fig. 108. Thus there exist, evidently, constant solutions ξ_i which are roots of the equation

$$F(\xi) = \frac{v}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \theta_m) = 0. \quad (18.27)$$

Here, those solutions are stable for which

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \theta_m) > 0$$

and those are unstable for which

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \theta_m) < 0$$

Thus, since in the case under examination $\xi = \tau = vt - m\varphi$, we have

$$x = z \left[\frac{vt - \xi}{m} \right], \quad (18.28)$$

whence it can easily be seen that the forced relaxation oscillations approximate, in course of time, to steady state periodic oscillations corresponding to the different roots of equation (18.27) and possessing a frequency exactly equal to the sub-harmonic $\frac{v}{m}$ of the frequency v of the external force.

Thus, when the values of the frequency v lie within a resonance zone determined by the inequality (18.26):

$$m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} < \frac{v}{\omega} < m + \frac{\varepsilon m A_m}{2} \quad (18.29)$$

we will have the phenomenon of synchronisation.

The width of the resonance zone in the first approximation,

$$|\varepsilon m A_m|,$$

will be, as we can see, proportional to the amplitude of the external force.

We now examine the case where v lies outside the resonance zone and hence

$$\frac{v}{\omega} - m > \frac{\varepsilon m A_m}{2}. \quad (18.30)$$

In this case, it is self-evident from equation (18.25) that the derivative $\frac{d\xi}{d\varphi}$ has a constant sign, that of the difference $\frac{v}{\omega} - m$.

Integrating equation (18.25) we obtain :

$$\varphi = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\frac{v}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m)} + \text{const}$$

whence we derive

$$\varphi = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(\xi) + \theta_0 \quad (18.31)$$

where

$$\alpha = \left(\frac{v}{\omega} - m \right) \sqrt{1 - 4 \left(m - \frac{v}{\omega} \right)^2} \quad (18.32)$$

θ_0 is an arbitrary constant and $f(\xi)$ is a periodic function of ξ with a period 2π :

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos\left(\frac{\xi - \theta_m - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\xi - \theta_m + \beta}{2}\right)} \quad (18.33)$$

Here

$$\beta = \arccos \frac{\varepsilon m A_m}{2\left(m - \frac{v}{\omega}\right)}, 0 < \beta < \pi$$

Turning to (18.31), we obtain

$$\xi = \alpha(\varphi - \theta_0) + F\{\alpha(\varphi - \theta_0)\}, \quad (18.34)$$

where $F(\theta)$ is a periodic function of θ with a period 2π .

Noting that in the approximation taken

$$\xi = \tau = vt - m\varphi$$

we obtain from (18.34)

$$vt = m\varphi + \alpha(\varphi - \theta_0) + F\{\alpha(\varphi - \vartheta_0)\}. \quad (18.35)$$

We put

$$\alpha(\varphi - \theta_0) = \theta.$$

In this case

$$\varphi = \theta_0 + \frac{\theta}{\alpha} \quad (18.36)$$

and

$$(m + \alpha)\theta + \alpha F(\theta) = \alpha(vt - m\theta_0),$$

whence, solving for θ , we arrive at the result

$$\theta = \frac{\alpha(vt - m\theta_0)}{m + \alpha} + \alpha\sigma\left\{\frac{\alpha(vt - m\theta_0)}{m + \alpha}\right\} \quad (18.37)$$

where $\sigma(\theta)$ is a periodic function of θ with a period 2π .

Putting the values of θ , (18.37), into the right-hand-side of (18.31) we obtain :

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m (\Omega_s - \Omega_p) t - m\varphi_1] \quad (18.38)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \frac{v}{m + \alpha}, \Omega_1 = \frac{v}{m} \\ \varphi_1 &= \frac{\theta_0 \alpha}{m + \alpha} = \text{const.} \end{aligned}$$

Substituting (18.38) in (18.28) we arrive at the expression, in the final approximation, for the forced relaxation oscillations in the form

$$x = z \{ \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m (\Omega_s - \Omega_p) t - m\varphi_1] \}. \quad (18.39)$$

Thus, in the case under study oscillations will be found to be multiperiodic and possessing two fundamental frequencies - a frequency Ω_p which may be called the variable natural frequency since $\Omega_p = \omega$ when $\varepsilon = 0$, and a beat frequency

$$|m (\Omega_s - \Omega_p)| = \frac{\alpha v}{m + \alpha} \approx \sqrt{(v - m\omega)^2 - \frac{\varepsilon^2 m^2 A^2}{4}} \quad (18.40)$$

representing the difference tone between the frequency of the external force $v = m\Omega$ and the m -th overtone of the variable natural frequency.

We find that when v approaches the boundary of the resonance zone, $\alpha \rightarrow 0$ and hence the beat frequency tends to zero.

Moreover, it is not difficult to show that when the intensity of beats, determined by the function σ , diverges away from resonance it diminishes and the variable natural frequency Ω_p approaches its value ω , corresponding to the free oscillations.

We now proceed on to construct the second approximation. For this purpose we first derive the expression for an improved first approximation.

We shall, first of all, examine the general case of an arbitrary rational value of the ratio $\frac{p}{q}$.

Using Fourier expansion (18.21), we obtain the following expression for the coefficient of the first power of ε in the right-hand-side of equation (18.20) :

$$\begin{aligned} \Delta - \frac{p}{q\omega} \frac{\cos\left(\tau + \frac{p}{q}\varphi\right)}{z'(\varphi)} &= \Delta - \frac{p}{q} A_0 \cos\left(\tau + \frac{p}{q}\varphi\right) - \\ &\quad - \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \tau + \vartheta_n\right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \tau + \theta_n\right] \right\} \end{aligned}$$

Hence, the improved first approximation will have the form

$$\tau = \bar{\xi} + \varepsilon u(\phi, \xi), \quad (18.41)$$

where

$$\begin{aligned}
u(\varphi, \xi) = & -A_0 \sin \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right) - p \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin \left\{ \left(n + \frac{p}{q} \right) p + \xi + \theta_n \right\}}{n + \frac{p}{q}} - \\
& - \frac{p}{q} \sum_{\substack{n \neq \frac{p}{q} \\ n \neq 0,}} A_n \sin \left\{ \left(n - \frac{p}{q} \right) p - \xi + \vartheta_n \right\} \\
& n - \frac{p}{q}. \quad (18.42)
\end{aligned}$$

Putting the value of τ , (18.41), into equation (18.20) and averaging over φ , we obtain the equation of second approximation :

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\varphi} = & \varepsilon \left\{ \Delta - \frac{p}{q} M_\varphi \left[\frac{\cos \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{\omega z'(\varphi)} \right] \right\} + \\
& + \varepsilon^2 M_\varphi \left[\frac{p}{q} \frac{\sin \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) + \right. \\
& \left. + \frac{p}{q} \frac{\cos^2 \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta}{\omega} \frac{\cos \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{z'(\varphi)} \right]. \quad (18.43)
\end{aligned}$$

We first examine the non-resonance case when the ratio $\frac{p}{q}$ is neither an integer nor a half-integer, i.e. when the frequency of the external force does not lie close to the overtones of the frequency $n\omega$ and its half $-\frac{n\omega}{2}$.

We find that in the non-resonance case mentioned above, we have the inequalities

$$n \neq \frac{p}{q}, n + \frac{p}{q} \neq m - \frac{p}{q}$$

for any integers m and n .

Further, according to (18.21), we have

$$\begin{aligned}
\cos \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right) = & \left. \begin{aligned} & \omega z'(\varphi) \cos \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right) + \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{p}{q} \right) \varphi + \xi + \theta_n \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left. \cos \left[\left(n - \frac{p}{q} \right) \varphi - \xi + \theta_n \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18.44)
\end{aligned}$$

Hence, taking into account (18.42) and (18.44) we can write

$$\begin{aligned}
M_\varphi \left\{ \frac{\cos \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{\omega z'(\varphi)} \right\} &= 0 \\
M_\varphi \left\{ \frac{\cos^2 \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\} &= \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{4} \sum_{n \neq 0} A_n^2 \\
&\vdots \\
M_\varphi \left\{ \frac{\sin \left(\xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) \right\} &= -\frac{A_0^2}{2} + \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} A_n^2 \left[\frac{1}{n - \frac{p}{q}} - \frac{1}{n + \frac{p}{q}} \right]
\end{aligned}$$

whence the equation of second approximation (18.43) takes the form :

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon\Delta + \varepsilon^2\gamma = \frac{y}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2\gamma, \quad (18.45)$$

where

$$\gamma = \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{4} \frac{n^2}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}} \quad (18.46)$$

Integrating equation (18.45) we obtain:

$$\xi = \left[\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2\gamma \right] \varphi + \xi_0,$$

where ξ_0 is an arbitrary constant. Taking into consideration (18.41), we obtain the following formula in the second approximation :

$$\tau = vt - \frac{p}{q}\varphi = \left[\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2\gamma \right] \varphi + \xi_0 + \varepsilon u \left[\varphi, \left(\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2\gamma \right) \rho + \xi_0 \right],$$

whence we obtain, correct upto the second order,

$$\varphi = \frac{\nu t - \xi_0}{\nu} + \varepsilon^2\gamma \quad \omega \varepsilon u \left\{ \frac{\nu t - \xi_0}{\nu} + \varepsilon^2\gamma, \left[\frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2\gamma \right] \frac{\nu t - \xi_0}{\nu} + \xi_0 \right\}. \quad (18.47)$$

Putting here

$$\Omega_p = \frac{\omega}{1 + \varepsilon^2\gamma \frac{\omega}{v}}, \quad \varphi_0 = -\Omega_p \frac{\xi_0}{v}, \quad (18.48)$$

we have

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_0 - \varepsilon u \left\{ \Omega_p t + \varphi_0, \left(v - \frac{p}{q}\Omega_p \right) t - \frac{p}{q}\varphi_0 \right\} \frac{\omega}{v}. \quad (18.49)$$

Thus, in the non-resonance case we obtain the following expression of the second approximation for the forced relaxation oscillations :

$$\begin{aligned} x &= z(\varphi), \\ \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \frac{p\omega}{qv} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left(n + \frac{p}{q} \right)} \sin [n (\Omega_p t + \varphi_0) + vt + \theta_n] + \\ &+ \frac{p\omega}{qv} \sum_{n \neq 0} - \frac{\varepsilon A_n}{2 \left(n - \frac{p}{q} \right)} \sin [n (\Omega_p t + \varphi_0) - vt + \vartheta_n] + \varepsilon A_0 \sin vt, \end{aligned} \quad (18.50)$$

where, according to (18.48),

$$\Omega_p = \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{4} \frac{n^2 \omega}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}, \quad (18.51)$$

to the same degree of accuracy as before.

It is not difficult to eliminate the auxiliary quantity $\frac{p}{q}$ from

Further, according to (18.21), we have

$$\begin{aligned}
\cos\left(\xi + \frac{p}{q'}\varphi\right) &= A_0 \cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \theta_n\right] + \right. \\
&\quad \left. + \cos\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \theta_n\right] \right\}, \\
\frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} &= A_0 \sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \sin\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \theta_n\right] - \right. \\
&\quad \left. - \sin\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \theta_n\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{18.44}$$

Hence, taking into account (18.42) and (18.44) we can write

$$\begin{aligned}
M \left\{ \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} \right\} &= 0, \\
M_\varphi \left\{ \frac{\cos^2\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\} &= \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{4} \sum_{n \neq 0} A_n^2, \\
M_\varphi \left\{ \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) \right\} &= -\frac{A_0^2}{2} + \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} A_n^2 \left[1 - \left[n - \frac{p}{q} - \frac{1}{n + \frac{p}{q}} \right] \right],
\end{aligned}$$

whence the equation of second approximation (18.43) takes the form :

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta + \varepsilon^2 \gamma = \frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma, \tag{18.45}$$

where

$$\gamma = \frac{p}{q_n} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{4} \frac{n^2}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}} \tag{18.46}$$

Integrating equation (18.45) we obtain:

$$\xi = \left[\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0,$$

where ξ_0 is an arbitrary constant. Taking into consideration (18.41), we obtain the following formula in the second approximation :

$$\tau = vt - \frac{p}{q}\varphi = \left[\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0 + \varepsilon u \left[\varphi, \left(\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right) \varphi + \xi_0 \right],$$

whence we obtain, correct upto the second order,

$$\varphi = \frac{vt - \xi_0}{v} + \varepsilon_\omega^\omega \varepsilon u \left\{ \frac{vt - \xi_0}{\frac{v}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma}, \left[\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \frac{vt - \xi_0}{\frac{v}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma} + \xi_0 \right\} \tag{18.47}$$

Putting here

$$\Omega_p = \frac{\omega}{1 + \varepsilon^2 \gamma \frac{\omega}{v}}, \varphi_0 = -\Omega_p \frac{\zeta_0}{v}, \quad (18.48)$$

we have

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_0 - \varepsilon u \left\{ \Omega_p t + \varphi_0, \left(v - \frac{p}{q} \Omega_p \right) t - \frac{p}{q} \varphi_0 \right\} \frac{\omega}{v}. \quad (18.49)$$

Thus, in the non-resonance case we obtain the following expression of the second approximation for the forced relaxation oscillations:

$$\begin{aligned} x &= z(\varphi), \\ \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \frac{p\omega}{qv} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left(n + \frac{p}{q} \right)} \sin [n (\Omega_p t + \varphi_0) + vt + \theta_n] + \\ &+ \frac{p\omega}{qv} \sum_{n \neq 0} - \frac{\varepsilon A_n}{2 \left(n - \frac{p}{q} \right)} \sin [n (\Omega_p t + \varphi_0) - vt + \theta_n] + \varepsilon A_0 \sin vt, \end{aligned} \quad (18.50)$$

where, according to (18.48),

$$\Omega_p = \omega - \sum_{n \neq 0} \varepsilon^2 A_n^2 \frac{n^2 \omega}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}, \quad (18.51)$$

to the same degree of accuracy as before.

It is not difficult to eliminate the auxiliary quantity $\frac{p}{q}$ from the above mentioned formulae of second approximation. Since the difference $\frac{v}{\omega} - \frac{p}{q}$ is of the first order, formulae (18.50) are valid with an accuracy of the second order and formula (18.51) to the third order. We can write with the same degree of accuracy :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n \omega}{2(n\omega + v)} \sin \{n (\Omega_p t + \varphi_0) + vt + \theta_n\} + \\ &+ \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n (\omega)}{2(n\omega - v)} \sin \{n (\Omega_p t + \varphi_0) - vt + \theta_n\} + \varepsilon A_0 \sin vt, \\ \Omega_p &= \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{8} \left[\frac{n\omega}{n\omega - v} + \frac{n\omega}{n\omega + v} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18.52)$$

The solution thus obtained corresponds to an asynchronous regime of oscillations. Here, oscillations will be quasi-periodic with two fundamental frequencies v and Ω_p .

The change in the phase angle φ is represented here as a rotation with a constant angular velocity Ω_p . Upon this are imposed oscillations with a small amplitude and frequencies v , $n\Omega_p - v$, and $n\Omega_p + v$.

We now proceed on to construct the second approximation in the resonance case.

For investigating the resonance case we have to take such a value of $\frac{p}{q}$ as is equal to an integer or to a half-odd integer. If we put $\frac{p}{q} = m$, we obtain an equation of the second approximation, differing from (18.25) in terms of the second order. With the help of this equation we can determine exactly the position and the width of the resonance zone, the value of the variable natural frequency of the asynchronous oscillations, etc.

Without paying further attention to this, we shall examine the case when the value of $\frac{p}{q}$ is equal to a half-odd integer :

$$\frac{p}{q} = \frac{2m+1}{2}$$

For the operation of averaging in the equation of the second approximation (18.43), we find that, according to (18.42),

$$\begin{aligned}
 u(\varphi, \xi) = & -A_0 \sin \left(\xi + \frac{2m+1}{2} \varphi \right) - \\
 & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \frac{\sin \left[\left(n + \frac{2m+1}{2} \right) p + \xi + \theta_n \right]}{n + \frac{2m+1}{2}} - \\
 & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin \left[\left(n - \frac{2m+1}{2} \right) p - \xi + \theta_n \right]}{n - \frac{2m+1}{2}}
 \end{aligned} \tag{18.53}$$

Putting (18.53) into the right-hand-side of equation (18.43) we obtain, after a series of calculations ,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{v}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma - \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos \left(2\xi + \psi_m \right), \tag{18.54}$$

where

$$\begin{aligned}
 S_m \cdot \sin \psi_m &= M \left\{ \frac{\sin(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\} \\
 S_m \cos \psi_m &= M \left\{ \frac{\cos(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{18.55}$$

Equation (18.54) obtained above differs from equation (18.45) for the non-resonance case in that it contains the term

$$\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos (2\xi - \psi_m)$$

It is not difficult to see, as in the case of first approximation, that the resonance zone is determined by the inequality

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{v}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} + 1 S_m \tag{18.56}$$

or, introducing the variable natural frequency Ω_p , with the same degrees of accuracy, by the inequality

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{v}{\Omega_p} - \frac{2m+1}{2} < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m. \tag{18.57}$$

Thus, examining the first approximation we found the resonance zones only for v , lying in the neighbourhood of $m\omega$, their widths being proportional to the first power of ε . We discover, in the second approximation, additional resonance zones for ν lying in the neighbourhood of $\frac{2m+1}{2}\omega$, the width of these secondary zones being proportional to the square of ε .

Analysis of higher approximations has also revealed the existence of resonance zones for $v \approx \frac{p}{q}\omega$, $q = 3, 4, \dots$ with widths of the order of ε^q .

10.4.5 19. Effect of Periodic Forces on Non-linear Systems with Slowly Varying Parameters

We now proceed on to examine the influence of external periodic forces on non-linear oscillating systems with slowly varying parameters, assuming that the 'frequencies' of the external forces in turn also undergo a slow change, in the sense explained in 8. Thus, we examine the following non-linear differential equation with slowly varying coefficients:

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x = \varepsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (19.1)$$

in which, as everywhere, ε is a small positive parameter; $\tau = \varepsilon t$, the "slowing" time and $F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$, a function periodic in θ with a period 2π , expressible in the form :

$$F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (19.2)$$

The coefficients of $F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$ in this finite sum are in turn certain polynomials in x and $\frac{dx}{dt}$. The coefficients of these polynomials depend on time τ . We shall further suppose that $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, which is the instantaneous frequency of the external periodic force, also changes slowly with time. To make possible the application of the asymptotic method in the construction of approximate solutions of equation (19.1), we assume, as in 8, that the coefficients of this equation $m(\tau)$, $k(\tau)$, as well as $F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$ and $\nu(\tau)$ have a sufficient number of derivatives with respect to τ for all finite values of τ and moreover, $k(\tau)$ is strictly positive for all values of τ in the interval $0 \leq \tau \leq Lm(\tau)$.

On the basis of these assumptions we construct the approximate solutions for equation (19.1) in the most general form, suitable not only for studying the resonance zone but also transitions to such zones from the non-resonance case and for the case of any demultiplication resonance.

We arrive at the correct choice of the structure of asymptotic solution of equation (19.1) from the same physical considerations which were used previously.

When the perturbation is absent ($\varepsilon = 0$) and ν is constant, the solution of equation (19.1) will be expressed by a sinusoidal, with an amplitude and phase of oscillation determined by the initial conditions.

When the perturbation is present overtones, the harmonics of combination frequency, may occur and there might also occur different resonances and other phenomena about which we have spoken above (1 and 13). The presence of slowly varying time τ (slow change in the mass of the system, coefficient of elasticity, frequency of the external periodic force and other parameters) also gives rise in the system to a number of additional phenomena not observable in oscillating systems described by equation (13.1). Thus, for example, as shown in 8, the generally accepted meaning of the natural frequency of the system ceases to hold because, in the given case, the 'natural frequency' $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ will also change slowly with time, the dependence of the instantaneous frequency of the external force $\nu(-)$ on time will affect the magnitude of the amplitude of oscillations and so on.

On the basis of these physical considerations and keeping in mind the structure of the asymptotic solutions for equations (8.1) and (13.1) it is natural to look for the approximate solution of equation (19.1) in the form of the series

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \theta + \theta \right) + \varepsilon u_1 \left(\tau, a, \theta, \frac{p\theta}{q} + \theta \right) + \varepsilon^2 u_2 \left(\tau, a, \theta, \frac{p_q}{q} \theta + \theta \right) + \dots \quad (19.3)$$

in which $u_1 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \theta \right), u_2 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \theta \right), \dots$ are periodic functions of the angles θ and $\frac{p}{q} \theta + \theta$ with a period 2π ; p and q are, as above, two small, mutually prime numbers the choice of which depends

on what resonance we are going to investigate while the quantities a and θ are functions of time determined from the system of differential equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \theta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

where $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ is the "natural" frequency of the system, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ is the instantaneous frequency of the external periodic perturbation, $\tau = \varepsilon t$, while the difference $\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)$ may vary during the process of oscillation.

For determining the functions appearing on the right-hand-sides of the expressions (19.3) and (19.4), we may, as usual, derive from (19.3) the expressions for $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$, taking for this purpose equations (19.4) into account. We can then derive expressions for $u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \theta\right)$, $u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \theta\right), \dots$, by putting the above expressions into equation (19.1) and equating the coefficients of like powers of ε . We also obtain expressions for $A_1(\tau, a, \theta), B_1(\tau, a, \theta), A_2(\tau, a, \theta), B_2(\tau, a, \theta), \dots$ by taking into consideration additional conditions of the type (1.8).

We can also obtain these equations more simply by using the equations of harmonic balance which have the following form in the case under study :

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon F(\tau, 0, x, dt) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) \dots + \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)} d\theta = 0, \\ &\int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau)x - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots} \sin\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Putting the values of $x, \frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$ obtained from (19.3), correct to the first order, into expressions under the integral signs, considering that a and θ are functions of time satisfying equations (19.4) and integrating, we obtain equations of the type (14.34) for functions $A_1(\tau, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$.

Taking into consideration the magnitudes proportional to ε^2 while substituting for $x, \frac{dx}{dt}$ and $\frac{d^2x}{dt^2}$ we obtain equations determining $A_2(-, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$.

After these elementary calculations we arrive at the approximate solutions of equation (19.1).

The solution of this equation, in the first approximation, will have the form :

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \theta\right) \quad (19.6)$$

where a and θ are to be determined from the system of equations, of the first approximation

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

where $A_1(\tau, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$ which are periodic in θ with a period 2π are particular solutions of the system of equations

$$\begin{aligned}
& \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}v(\tau) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega(\tau)B_1 = \\
& = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\theta} \cos \psi d\theta d\psi \\
& \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}v(\tau) \right] a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega(\tau)A_1 = -\frac{1}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \\
& - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\theta'} \sin \psi d\theta d\psi
\end{aligned} \tag{19.8}$$

Here, we have put, as usual,

$$F_0(\tau, a, \theta\psi) = F(\tau, \theta, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi), \sqrt{\theta'} = \psi - \frac{p}{q}\theta$$

In the second approximation, we have

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q}0 + \theta \right) + \varepsilon u_1 \left(\tau, a, 0, \frac{p}{q}0 + \theta \right), \tag{19.9}$$

where a and θ are solutions of the following system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \theta) \end{aligned} \right\} \tag{19.10}$$

Here, $u_1 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \theta \right)$ is determined by the formula

$$\begin{aligned}
u_1 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \theta \right) &= \frac{1}{4\pi^2 m(\tau)} \sum_{n,m} \frac{e^{i \left[n\theta + m \left(\frac{p}{q}0 + \theta \right) \right]}}{\omega^2(\tau) - (m\omega(\tau) + n\nu(\tau))^2} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi
\end{aligned} \tag{19.11}$$

in which summation is performed over those values of n and m which satisfy the condition $nq + p(m+1) \neq 0$. In this case the right-handside of the expression (19.11) does not contain terms the denominators of which may become zero for any value of τ in the interval $0 \leq \tau \leq L$. $A_2(\tau, a, \vartheta)$ and $B_2(\tau, a, \vartheta)$ are determined from the system of equations :

$$\left. \begin{aligned} & \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) \right] \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a\omega(\tau)B_2 = \\ & = - \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m(\tau)} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\theta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\ & \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) \right] a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\omega(\tau)A_2 = \\ & = - \left[\frac{\partial B_1}{\partial a} aA_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \theta} aB_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} a + 2A_1B_1 + \right. \\ & \left. + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{aB_1}{m(\tau)} \right] - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\theta} \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\theta'} \sin \psi d\theta d\psi \end{aligned} \right\} \tag{19.12}$$

where $F_1(\tau, a, \theta, \psi)$ is a function periodic in θ and ψ with a period 2π , the explicit expression for which will be known at once when the expression for $u_1(\tau, a, \theta, \psi)$, $\left(\psi = \frac{p}{q}\theta + \theta \right)$, is determined.

We also note, as in 8, that the equations obtained here determining a and θ in the general case cannot be integrated in a closed form. Hence we have to use numerical methods for integration or remain satisfied with an analysis of a qualitative character. The numerical integration of equations of the type (19.4) is far easier than the numerical integration of (19.1), which has already been discussed.

We now pass over to examine certain special cases of equation (19.1).

As a first particular case, we examine the differential equation of oscillations of a non-linear vibrator subject to the influence of a sinusoidal force whose amplitude and instantaneous frequency change slowly. In this case, we will have the following differential equation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta, \quad (19.13)$$

where $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, and m and k are constants.

Oscillating systems described by an equation of this type play important role in machine-building, electrical engineering, etc.

As we have seen before (vide 13), in such systems it is possible to discover the fundamental resonance only in the first approximation and, hence, we shall now discuss the procedure of developing equations of the first approximation for the case of fundamental resonance $p = 1, q = 1$. For deriving equations of the first approximation we shall make use of the equations of harmonic balance.

We seek the solution of equation (19.13) in the first approximation for the case of fundamental resonance in the form :

$$x = a \cos(\theta + \theta), \quad (19.14)$$

where a and θ are to be determined from equations of the first approximation

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

where

$$\omega = -\sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const.}$$

We now determine $A_1(\tau, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$. For this purpose we derive (correct upto the order of ε inclusive)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos(0 + \theta) - a \sin(\theta + \theta) \frac{d(0 + \theta)}{dt} \\ &= \varepsilon A_1 \cos(0 + \theta) - a\omega \sin(\theta + \theta) - \varepsilon a B_1 \sin(0 + \theta) \\ d^2 x &= \varepsilon \left[(\omega - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a \cos B_1 \right] \cos(0 + \theta) - a\omega^2 \cos(\theta + \theta) - \\ &\quad - \varepsilon \left[(\omega - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \theta) \end{aligned}$$

Substituting (19.17) and (19.14) in the left-hand-side of (19.13), we have

$$\left\{ m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \right\}_{x=a \cos(\theta+\theta)} = \varepsilon m \left[(\omega - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\theta + \theta) - \varepsilon m \left[(\omega - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \theta), \quad (19.18)$$

because

$$m\omega^2 = k.$$

Here we are not taking into account the term $\varepsilon k u_1(\tau, a, \theta, \theta + \theta)$, because it does not contain the first harmonic and hence vanishes during integration.

Taking into consideration (19.14) and (19.16), the right-hand-side of equation (19.13) may be written, correct upto the order ε , in the form $\left\{ \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \right\}_{x=a \cos(\theta+\beta)} =$
or $= \varepsilon f'(a \cos(\theta + \vartheta), -a\omega \sin(\theta + \vartheta)) + \varepsilon E(\tau) \sin 0,$
 $\left\{ \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E(\tau) \sin 0 \right\}_{x=a \cos(\theta+\theta)} =$
 $= \frac{\varepsilon \cos(\theta+\theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi +$
 $+ \frac{\varepsilon \sin(\theta+\theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi +$
 $+ \varepsilon \sum_{n \neq 1} \left\{ f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta + \theta) + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta + \theta) \right\} +$
 $+ \varepsilon E(\tau) [\cos \theta \sin(\theta + \theta) - \sin \theta \cos(\theta + \theta)], \quad (19.19)$
where

$$f_n^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n' \psi d\psi$$

$$f_n^{(2)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n' \psi d\psi$$

in which

$$f_0(a, \psi) = f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi).$$

Equating the coefficients of like powers of a and of like harmonics (of sine and cosine respectively) in the right-hand-sides of (19.18) and (19.19), we obtain the system of equations

$$\left. \begin{aligned} m \left[(\omega - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega B_1 \right] &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi - E(\tau) \sin \theta \\ m \left[(m - v(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 \right] &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - E(\tau) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

determining $A_1(\tau, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$. We can easily derive :

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{E(\tau)}{m[\omega+v(\tau)]} \cos \theta \\ B_1(\tau, a, \theta) &= -\frac{1}{2\pi m\omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \\ &\quad + \frac{ma[\omega+v(\tau)]}{m[\omega+v(\tau)]} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

Then the equations of the first approximation take up the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E(\tau) \cos \theta}{m[\omega+v(\tau)]} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - v(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m\omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \\ &\quad + \frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega+v(\tau)]} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Using the notation of (15.5) (vide §15), the system of equations (19.22) may also be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_0(a)a - \frac{\varepsilon E(\tau)}{m[\omega+v(\tau)]} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_c(a) - v(\tau) + \frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega+v(\tau)]} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

where $\delta_e(a)$ and $\omega_e(a)$ are the equivalent damping decrement and the equivalent frequency, respectively, for a non-linear oscillating system described by the equation (15.6).

In our case, we can derive $\varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ either by using the formula (19.11) or directly as forced oscillations excited in the given system by higher harmonics appearing in the right-hand-side of the expression (19.19) i.e. by the sum

$$\varepsilon \sum_{n \neq 1} \{f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta + \theta) + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta + \theta)\}$$

The explicit expression for $\varepsilon u_1(-, a, \theta, \theta + \theta)$ will be

$$\begin{aligned} \varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) &= \frac{1}{\pi \omega} \sum_{n \neq 1} \frac{1}{1 - n^2} \left[\cos n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \sin n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi d\psi \right]. \end{aligned} \quad (19.24)$$

In such a case, it does not depend on the slowing time τ and coincides with the second term on the right-hand-side of (15.4).

We shall not derive here expressions for $A_2(\tau, a, \vartheta)$ and $B_2(\tau, a, \vartheta)$ but would only note that in order to determine them after having derived the explicit expression for $u_1(\tau, a, \theta, \theta + \theta)$ the simplest procedure is to use again the equations of harmonic balance. However, in this case, the calculation would have to be accurate upto the second order inclusive.

As a second special case we study the Mathieu equation, widely met with in engineering, in which the frequency of modulation slowly changes with time. We have the equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos \theta)x = 0 \quad (19.25)$$

where $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, ω and h are constants, h being $\ll 1$. Putting $h = \varepsilon h_1$, we can write (19.25) in the form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta \quad (19.26)$$

As shown above, we can examine the demultiplication resonance in equation (19.25) even in the first approximation. For this purpose we construct an asymptotic solution in the first approximation for the case $p = 1, q = 2$, using, as before, the equations of harmonic balance.

Thus, we search for the solution of (19.25) in the form

$$x = a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \theta \right), \quad (19.27)$$

where a and ϑ are to be determined from the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \omega A_1(\tau, a, \vartheta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (19.28)$$

We shall now determine $A_1(-, a, \vartheta)$ and $B_1(-, a, \vartheta)$. For this purpose we put (19.27), subject to relations (19.28), into the left-hand-side of equation (19.26) and find, correct upto the first order :

$$\left\{ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \right\}_{x=a \cos(\frac{1}{2}\theta + \vartheta)} = \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{1}{2}\nu(-) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos \left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta \right) - \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{1}{2}\nu(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin \left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta \right). \quad (19.29)$$

We can write the right-hand-side of equation (19.26) in the

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta \right\}_{x=a \cos(\frac{1}{2}\theta + \theta)} &= \frac{\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 2\theta a \cos \left(\frac{1}{2}\theta + \theta \right) + \\ &+ 2\varepsilon \omega^2 h_1 \sin 2\theta a \sin \left(\frac{1}{2}\theta + \theta \right) + \frac{a\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 3 \left(\frac{1}{2}\theta + \theta \right) \cos 2\theta + \\ &+ \frac{a\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 3 \left(\frac{1}{2}\theta + \theta \right) \sin 2\theta \end{aligned}$$

Equating the coefficients of the first harmonics on the right-handsides of (19.29) and (19.30), we obtain the following system of equations:

$$\left. \begin{aligned} \left(\omega - \frac{1}{2}\nu(\tau) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 &= \frac{a\omega^2 h_1}{2} \cos 2\theta, \\ \left(\omega - \frac{1}{2}\nu(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 &= -\frac{a\omega^2 h_1}{2} \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (19.31)$$

whence one obtains

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{ah_1\omega^2}{2v(\tau)} \sin 2\vartheta \\ B_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{h_1\omega^2}{2v(\tau)} \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (19.32)$$

Hence, equations of the first approximation determining a and θ in the given case will be :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2v(\tau)} \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{v(\tau)}{2} - \frac{h\omega^2}{2v(\tau)} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

We shall now discuss the application of the formula obtained above to the investigation of oscillating processes in certain definite systems with slowly varying parameters. In particular, we shall examine the phenomenon occurring in an oscillating system when it passes through resonance. In order that we may easily compare the results thus obtained with the stationary regime already stated, we examine, as was done in 15, a non-linear vibrator with a rigid characteristic of non-linear restoring force ($F = cx + dx^3, d > 0$), subject to the action of an external sinusoidal force with a constant amplitude and a slowly varying frequency. Let the oscillation of such a vibrator be described by the equation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin \theta \quad (19.34)$$

where x is the coordinate determining the position of the system, t the time, m the mass, b the coefficient of resistance, $F = cx + dx^3$ the nonlinear restoring elastic force, E the amplitude of the perturbing force and 0 some function of time. We introduce, as before for the sake of simplification, dimensionless quantities x_1 and t_1 defined as

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}}x, \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}t; \quad (19.35)$$

hence, equation (19.34) may be written in the form

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = E_1 \sin 0 \quad (19.36)$$

where

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}, \quad E_1 = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

We assume that the friction and the amplitude of the external force as well as the term representing non-linearity are sufficiently small compared to the frequency of the system, i.e. the system is very close to a linear conservative one, and put

$$-\left[\delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1^3\right] = \varepsilon f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right) \quad (19.37)$$

Hence, according to (15.5), we get

$$\delta_e(a) = -\frac{\delta}{2}, \quad k_\theta(a) = 1 + \frac{3a^2}{8},$$

whence, using (19.14) and (19.23), we obtain in the first approximation

$$x_1 = a \cos(\theta + \theta),$$

where a and θ must be determined from the system of equations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1+v(\tau)} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 - v(\tau) + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a[1+v(\tau)]} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (19.38)$$

Here, $v(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ is a certain function of time, characterising the law of variation with time of the instantaneous frequency of the external force.

In 15 we investigated in detail the stationary state of oscillating systems described by an equation of the type (19.34), constructed the resonance curves and also examined the hysteresis phenomena arising from non-linearity.

Here, we examine the behaviour of the curves showing the dependence of the amplitude of the oscillation on the frequency of the external force when the frequency changes slowly with time, assuming that the frequency of the external force during the process of its variation passes through the resonance values*). In order to construct the resonance curve during transition through resonance it is necessary to numerically integrate the system of equations of first approximation (19.38) with the help of some method of numerical integration. The method of numerical integration worked out by Krylov is found to be helpful for investigating equations (19.38). We note that there is no necessity of numerical integration of equation (19.38) for all the intervals of time during which the frequency of the external force undergoes a change. To obtain the complete picture of the process during transition through resonance, it is sufficient to integrate the system of equations (19.38), beginning from that instant of time when the frequency of the system is sufficiently close to the natural frequency but does not yet directly enter the resonance zone.

As shown by the method of construction of the resonance curves during transition through resonance for those values of the frequency of the external force for which the stationary resonance curve is near the horizontal line, the curves of transition through the resonance differ

very little from the stationary resonance curves even when the rate of variation of the frequency of the external force is sufficiently large. Moreover, the character of the resonance curves during transition through resonance (the magnitude and the position of the maximum, etc.) remains almost uninfluenced by the initial conditions in case they do not practically pass over to the resonance zone (i.e. the frequency zone where the amplitude changes sharply). Hence, for numerical integration of (19.38) it would be expedient to take as initial values those values of a, θ and v which satisfy the stationary state near the resonance zone but not in the zone of rapid increase of amplitude.

We have already directed our attention to the advantage of integrating the system of equations (19.38) over the direct integration of equation (19.34) and hence we shall not deal with it in detail here.

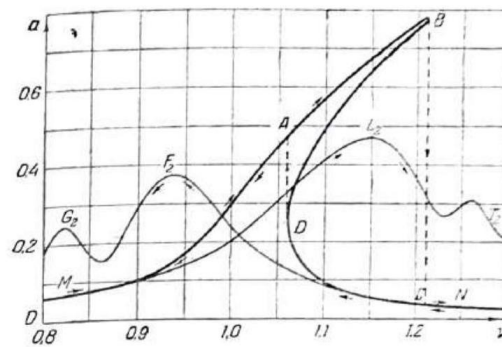


Fig. 109.

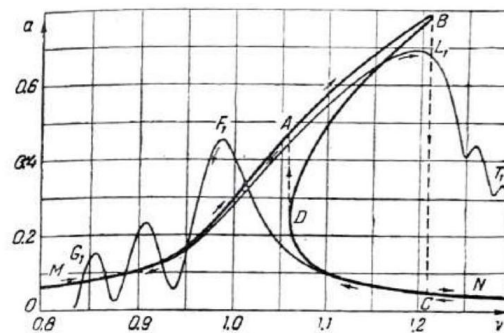


Fig. 110.

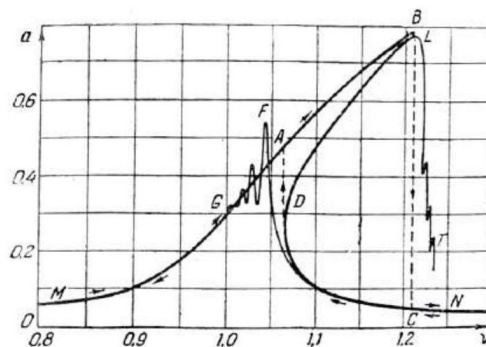


Fig. 111.

^{0*)} This question has been examined in detail in (31).

We shall examine the case when the instantaneous frequency of the external force depends linearly on time

$$v(\tau) = v_0 + \beta t; \quad (19.39)$$

when $\beta > 0$ frequency increases with time and when $\beta < 0$ it decreases. The rate at which it passes through resonance depends on the value of β . Greater the absolute value of the quantity β more rapidly will the system pass through resonance.

By numerically integrating the system of equations for different values of β we obtain a number of curves of passage through resonance; these curves have been shown in Figs. 109, 110 and 111. For comparison with the stationary state, we have drawn in these figures the stationary resonance curves according to the formulae of §15.

Figs. 112 and 113 show not only the stationary resonance curves but also the curves of resonance for the case when the characteristic of the non-linear restoring force has the form shown in Fig. 114.

An analysis of the resonance curves during passage through resonance enables us to explain a number of peculiarities of this complex phenomenon and also to explain the influence on it of the non-linearity of the system. This question has been examined in detail in special literature [31], and hence we study only some of the specific features of this phenomenon which distinguish it sharply from the usual resonance under the stationary state.

During passage through resonance the essential influence on the resonance curves is that of the rate of variation of the frequency of the

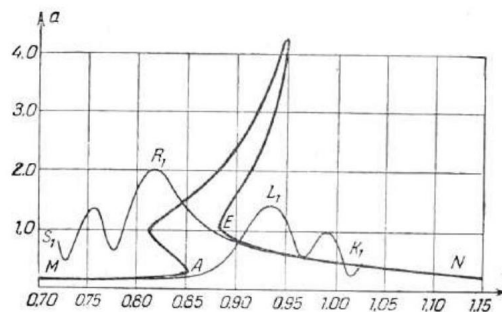


Fig. 112.

external force. When this rate increases the maxima of the amplitude lie lower and the sharpness of the first maximum is found to be less than in the case of the stationary resonance curve.

After the first maximum has been attained, we observe divisions (beats) of the amplitude, and here the quicker the passage through resonance the more pronounced is the appearance of a number of maxima of lesser magnitude after the first maximum.

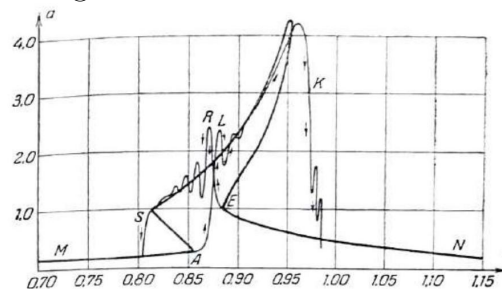


Fig. 113.

If there are points of discontinuity of the amplitude during the stationary resonance state in the system as a result of non-linearity, we would observe sharp changes in the amplitude

(particularly for slow transitions) for the corresponding value of the frequency during passage through resonance.

Maxima of the amplitude are found not at the instant of coincidence of the frequency of the perturbing force with the natural frequency of the system but earlier or later depending upon the rate of variation of the frequency the nature of nonlinearity and the direction of the frequency change. In each particular case nonlinearity imposes its specific influence not only on the stationary resonance curve but also on the curves of passage through resonance.

In this latter case, slower the passage through resonance, more pronounced will be the effect of the peculiarity of the given non-linearity. We shall now proceed on to

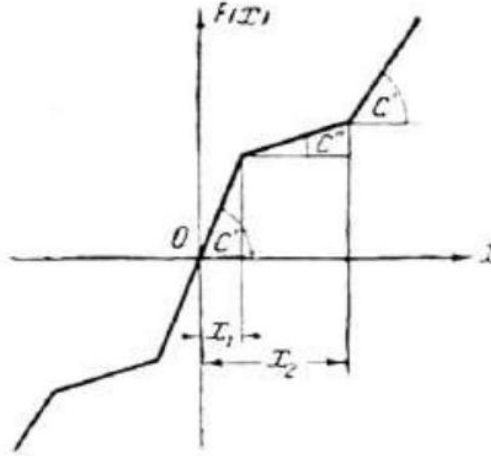


Fig. 114.

investigate some examples of non-linear oscillating systems with variable coefficients in which more complex type of a resonance is possible.

As the first example, we study the behaviour of the amplitude during resonance of the n -th class depending upon the state of change brought about in the detuning of an oscillating circuit by regeneration through a tube. This example, for the case $n = 2$ and constant detuning, has already been examined in 15.

If the detuning $\xi = \frac{\nu^2 - 4\omega^2}{4\omega^2}$ changes with time, it is easy to see that, instead of (15.50), we have the following equation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(\tau) f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) + E \sin 2t \quad (19.40)$$

which, after a change of variable

$$x = z - \frac{E}{3} \sin 2t, \quad (19.41)$$

may be written in the form

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \varepsilon(\tau) f\left(z - \frac{E}{3} \sin 2t, \frac{dz}{dt} - \frac{2E}{3} \cos 2t, \xi(\tau)\right) \quad (19.42)$$

We assume, as in 15, that

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) = [k(\tau) + 2x + \gamma x^2] \frac{dx}{dt} + \frac{\xi(\tau)}{0.016} x \quad (19.43)$$

where, for the sake of definiteness, we put

$$\left. \begin{aligned} k(\tau) &= k_0 - 2\bar{\vartheta}_\beta^-(\tau), \varepsilon(\tau) = \frac{0.016}{1+\xi(\tau)}, \lambda = 0.016, \\ \bar{\vartheta} &= 0.013, \gamma = -2, \quad k_0 = -0.05. \end{aligned} \right\} \quad (19.44)$$

Hence, equation (19.42) assumes the form

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + z &= \frac{0.016}{1+\xi(\tau)} \left\{ k(\tau) - 2 \left(z - \frac{E}{3} \sin 2t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left(z - \frac{E}{3} \sin 2t \right)^2 \right\} \left(\frac{dz}{dt} - 2E \cos 2t \right) + \\ &\quad + \frac{\xi(\tau)}{1+\xi(\tau)} \left(z - \frac{E}{3} \sin 2t \right) \end{aligned} \quad (19.45)$$

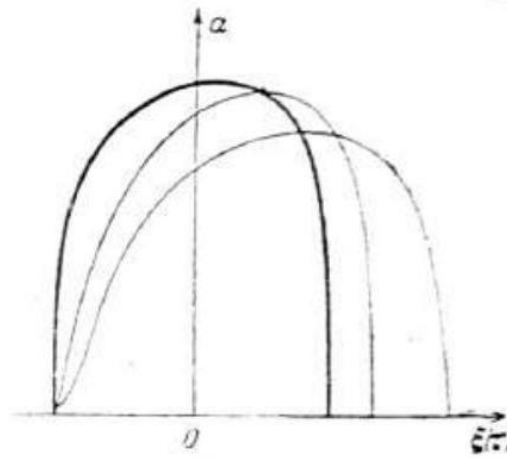


Fig. 115.

Using formulae (19.6) and (19.7) and putting $p = 1, q = 2$, we obtain, in the first approximation, after a series of calculations:

$$z = a \cos(t + \theta) \quad (19.46)$$

where a and θ are to be determined from the system of equations

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ \frac{1}{2} a \left[k(\tau) + \frac{\gamma a^2}{4} \right] + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{aE}{6} \sin 2\theta \right\}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ -\frac{\xi(\tau)}{2\beta} + \frac{E}{6} \cos 2\theta \right\}. \end{aligned}$$

For constructing the graphs showing variations in amplitude, when the resonance is of the second kind, for different states of changes in the detuning $\xi(\tau)$ it is necessary, as usual, to integrate the system of equations (19.47) numerically.

For the sake of definiteness, we assume that detuning changes owing to the changes in the natural frequency ω of the oscillating system, it being assumed here that $\xi(\tau)$ changes according to the formula

$$\xi(\tau) = \xi_0 + \alpha t \quad (19.48)$$

Putting this expression into equation (19.47) and performing numerical integration we obtain curves characterising the relation between a and $\bar{\xi}$, for different values of α (Fig. 115). In this case, the figure contains for the purpose of comparison the resonance curve for the stationary state also constructed according to the formula (15.72) (thick line).

Analysing the curves thus obtained, we can derive a number of conclusions. As usual when the rate of passage through resonance increases, the maxima of the resonance curves are found lower and shifted. We are struck by the radical difference in the behaviour of the amplitude of oscillation during passage through a resonance of the second kind in contrast to the case of such a passage through usual resonance as examined before. While in the case of passage through usual resonance (vide Fig. 110) we observed a number of maxima of smaller magnitudes the first after maximum and thus found the oscillations taking up the character of damping beats, in the present case the amplitude decreases continuously to zero after attaining a maximum value.

As a second example, we study the passage through parametric resonance.

Let a rod of length l with hinged ends (Fig. 116) be acted upon by a periodic longitudinal force

$$E_0 \cos \theta \quad (19.49)$$

whose instantaneous frequency $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$, while varying slowly with time, passes through the double of a certain critical value (for definiteness, suppose that it passes through the double of the first critical value). The differential equation for transverse oscillations of the rod may be written in the form

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E_0 \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad (19.50)$$

where, as in 17, A is the area of the transverse cross-section, EI the rigidity, γ the density of the material of which the rod is made and g the acceleration due to gravity.

Limiting conditions will be

$$\left. \begin{array}{l} y \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}} \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}} \Big|_{z=l} = 0 \end{array} \right\} \quad (19.51)$$

and hence, by substituting

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l}$$

equation (19.50) may be reduced to the form :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \theta) x = 0 \quad (19.52)$$

where

$$h = \frac{E_0 l^2}{EI \pi}, \quad \omega^2 = \frac{EI g \pi^2}{\gamma A l^4}$$

We assume that $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) = \nu_0 + \alpha t$, while varying with time, crosses the double of the frequency ω . In this case, for investigating



Fig. 116.

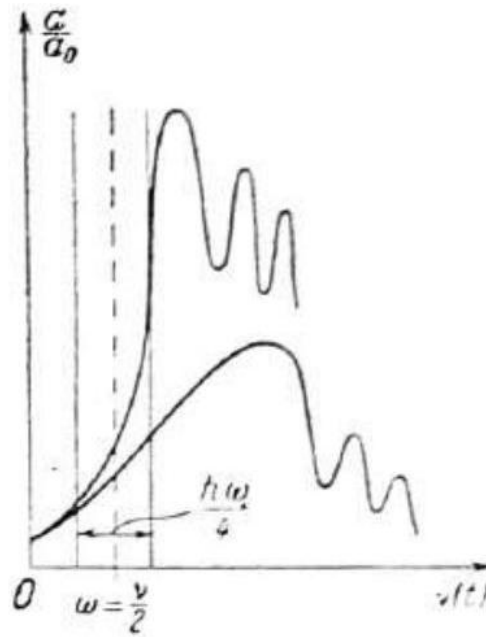


Fig. 117.

the oscillatory process we construct a first approximation corresponding to the resonance $p = 1, q = 2$. For this purpose we may use directly the formulae derived earlier for the equation (19.25). Thus, according to (19.27) and

(19.33), we have

$$x = a \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \theta\right).$$

where a and θ are to be determined from the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2(v_0 + \alpha t)} \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{v_0 + \alpha t}{2} - \frac{h\omega^2}{2(v_0 + \alpha t)} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

Putting numerical values of h, ω, v_0 and α into (19.53) and integrating numerically, we obtain curves of crossing the parametric resonance shown in Fig. 117.

10.5 Monofrequency Oscillations in Non-linear Systems with Several Degrees of Freedom of Freedom

10.5.1 20. Natural Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom

Oscillating systems with several degrees of freedom and even with an infinite number of such degrees are constantly met with in several concrete problems of modern engineering.

As we know, even in a case where oscillations in such systems are described by differential equations which are like linear equations, the development of the usual asymptotic methods of non-linear mechanics (the concept of which has been explained above) requires at first the solution of a group of linear differential equations with a number of unknown parameters depending upon the number of degrees of freedom; this is what creates considerable difficulties in the practical application of this method.

In oscillating systems with several degrees of freedom the presence of unavoidable internal friction, as also the presence of external perturbing forces, usually leads to a quick elimination

of higher frequencies, i.e. to the establishment of a basic tone of oscillations (or oscillations with a certain single frequency ω_k). Hence, during the investigation of a system with several degrees of freedom it is expedient to study the single-frequency state, i.e. oscillations in which all the points of the given system oscillate with one and the same frequency.

As we shall see in the sequel, the construction of asymptotic expansions in this case may be undertaken in the same manner as we would do if we are to deal with an oscillating system with a single degree of freedom.

For studying the general case we assume that monofrequency oscillations in a system with several degrees of freedom are described by the following system of differential equations :

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (20.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

which imply the zero value of the small parameter ε in the case of a system of linear differential equations with constant coefficients:

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = 0; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.2)$$

The system of differential equations (20.2) will be called in the sequel the differential equations of the unperturbed system.

We assume that in the unperturbed system undamped harmonic oscillations with a frequency ω are possible :

$$x_k = a \varphi_k e^{i(\omega t + \theta)} + a \varphi_k^* e^{-i(\omega t + \theta)} \quad (20.3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

these depend only on two arbitrary constants a and θ . Here, ρ_k and ρ_k^* are proper functions which characterize the form of the oscillations, and the sign $*$ means the complex conjugate quantity.

We further assume that in the unperturbed system the trivial solution will be the unique one : $x_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ and, moreover, in our unperturbed system the undamped oscillations have frequencies of multiplicity ω (the condition of absence of inner resonance).

The solution of the unperturbed equations (20.1) will be found under these conditions, and it will correspond to monofrequency oscillation of the system with several degrees of freedom, with the help of the expansion

$$x_k = a \varphi_k e^{i\psi} + a \varphi_k^* e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots \quad (20.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

where $u_k^{(1)}(a, \psi), u_k^{(2)}(a, \psi), \dots (k = 1, 2, \dots, n)$ are periodic functions of the angle ψ with a period 2π , and the quantities a and ψ as functions of time are defined by the differential equations :

$$\left. \begin{aligned} da \\ dt = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ d\psi \\ dt = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

Thus, as in the previous cases, we shall consider the problem of determining functions

$$u_k^{(1)}(a, \psi), \quad u_k^{(2)}(a, \psi), \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.6)$$

which are periodic with a period 2π with respect to ψ and the functions

$$A_1(a), A_2(a), \dots; B_1(a), B_2(a), \dots, \quad (20.7)$$

in such a way that expressions (20.4) satisfy equations (20.1) whenever a and ψ satisfy equations (20.5).

We also note that since an integration of equations (20.5) introduces two arbitrary constants, we obtain, with the help of expressions (20.4), an approximate representation not for the general solution of equations (20.1) depending on n arbitrary constants but for a doubleparameter family of the particular solutions. Since the principle of superposition is not applicable to non-linear systems we cannot directly develop the general solution proceeding from the different particular solutions. However, in a number of important cases, the doubleparameter family of solutions (20.4) possesses the special property of strong stability which is expressed by the fact that any solution of equations (20.1), with initial values nearly equal to the initial values of our double-parameter family of integral curves (20.4), tends to solutions belonging to the family (20.4) as t increases. The family of solutions under study attracts to itself solutions that are very close to it. Particularly speaking, it is only under these conditions that the study of the solutions of the type (20.4) has any physical interest. In a later Chapter devoted to mathematical analysis, we shall discuss in detail the aforementioned question of stability of the solutions of the type (20.4) and shall also discuss the question of obtaining the criteria whose fulfilment will be of interest in connection with the study of the double-parameter families of the type (20.4).

Before we pass on to a solution of the problem in hand, i.e. the determination of the functions (20.6) and (20.7), we shall make certain preliminary remarks on the properties of oscillations in an

unperturbed system described by the equation (20.2).

We first note that for a system of homogeneous algebraic equations

$$\sum_{q=1}^n (\delta_{kl}p - c_{kl}) x_q = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.8)$$

where

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & \text{if } k = q, \\ 0, & \text{if } k \neq q; \end{cases}$$

the discriminant

$$D(p) = D \|\delta_{kq}p - c_{kq}\| \quad (20.9)$$

has, according to the assumption of the existence of a monofrequency oscillation state, two simple, conjugate, purely imaginary roots $p = +i\omega$ and $p = -i\omega$ and, moreover, the values $p = 0$ and $p = \pm im\omega$ (where m is any integer different from unity) are not the roots of the equation $D(p) = 0$, i.e.

$$D(im\omega) \neq 0, \quad (20.10)$$

where $-\infty < m < \infty, m \neq \pm 1$.

We denote the non-trivial solutions of the system of equations (20.8) for $p = +i\omega$ and $p = -i\omega$ by φ_k and φ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$), respectively.

We take the system of algebraic equations

$$\sum_{q=1}^n (\delta_{kq}p + c_{qk}) x_q = 0 \quad (20.11)$$

conjugate to (20.8) and denote their non-trivial solutions for the values $p = +i\omega$ and $p = -i\omega$ by χ_k and χ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$), respectively.

Introducing this notation we study forced oscillations excited in the unperturbed system (20.2) by the external harmonic forces

$$F_k e^{im\omega t}$$

These oscillations are described by a system of differential equations

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = F_k e^{im\omega t} \quad (20.12)$$

As we know, in the case when m is a positive or a negative integer different from ± 1 , the solutions of the system of equations (20.12) are represented by the formulae

$$\begin{aligned} x_k &= e^{im\omega t} \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q, \\ Z_{kq}(im\omega) &= \frac{D_{kq}(im\omega)}{D(im\omega)} \end{aligned} \quad (20.13)$$

where $D_{kq}(p)$ are the corresponding minors in the determinant $D(p)$. If $m = \pm 1$ the equations (20.12) do not have, generally speaking, a periodic solution because $D(\pm i\omega) = 0$. In order that such a solution may exist it is necessary and sufficient that the following conditions be satisfied :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=1}^n \chi_q F_q &= 0 \text{ for } n = 1 \\ \sum_{q=1}^n \chi_q^* F_q &= 0 \text{ for } n = -1 \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

When these conditions are satisfied, the forced oscillations determined by equations (20.12) for $m = 1$ are represented by the formulae

$$x_k = e^{i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q + C \varphi_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.15)$$

in which

$$S_{kq} = \left\{ \frac{\partial D_{kq}(p)}{\partial p} \right\}_{p=i\omega} \quad (k, q = 1, 2, \dots, n)$$

and C is an arbitrary constant. Similarly we obtain a formula for $n = -1$.

We shall now examine the question of deriving a periodic solution, with a period $\frac{2\pi}{\omega}$, of the system of differential equations

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = \sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.16)$$

i.e. we shall study the question of a forced oscillation in an unperturbed system under the action of the forces

$$\sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} (k = 1, 2, \dots, n)$$

Since we are interested only in real solutions we shall assume that the conditions of realness

$$F_k^{(-m)} = F_k^{*(m)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.17)$$

are satisfied. Hence, on the basis of what has been said above, we see that the problem in hand has a solution only when the conditions

$$\sum_{q=1}^n \chi F_q^{(1)} = 0 \text{ and } \sum_{q=1}^n \chi_q^* F_q^{(-1)} = 0 \quad (20.18)$$

are fulfilled. We note, among other things, that owing to the relationship (20.17) one of these conditions is a consequence of the other.

If the conditions (20.18) are fulfilled the periodic solution we are searching for, may be represented by the formula

$$x_k = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\omega t} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q^{(m)} \right\} + e^{i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q^{(1)} + \quad (20.19)$$

$$+ e^{-i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* F_q^{(-1)} + C \varphi_k e^{i\omega t} + C_{\varphi_k}^* e^{-i\omega t}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

containing two arbitrary constants, the real and the imaginary parts of C .

Replacing ωt in the previous calculations by ψ we can easily obtain the following result which we shall need in future while determining the functions (20.6).

In order that the system of equations

$$\omega \frac{\partial u_k}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q = \sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\psi}, \quad (20.20)$$

for which the conditions of realness (20.17) hold, might have a real periodic solution with a period 2π it is necessary and sufficient that

$$\sum_{k=1}^n F_k^{(1)} \chi_k = 0 \quad (20.21)$$

If this condition is satisfied, the solution we are seeking for, will

$$u_k(\psi) = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q^{(m)} \right\} + e^{i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q^{(1)} + \\ + e^{-i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* F_q^{(-1)} + C Q_k e^{i\psi} + C^* \varphi_k^* e^{-i\psi},$$

where C is an arbitrary complex constant.

After making these preliminary remarks, we proceed on to solve our basic problem, i.e. we proceed on to derive the functions (20.6) and (20.7).

We write the expansion (20.4) in the form

$$x_k = u_k^{(0)}(a, \psi) + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.23)$$

where, for the sake of brevity, we have put

$$u_k^{(0)}(a, \psi) = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (20.24)$$

Differentiating expressions (20.23) with respect to time and taking

into consideration equations (20.5) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial a} + \dots \right\} da \quad dt \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} + \dots \right\} d\psi \\ &= \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} \omega + \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 + \omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} \omega \right\} + \varepsilon^3 \dots \right\} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

and, hence, the left-hand-sides of equations (20.1) may be written in the

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq^2} x_q &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq^2} u_q^{(1)} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ \omega \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq^2} u_q^{(2)} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Substituting (20.23) in the right-hand-sides of equations (20.1) we can write them in the following form:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^3 \dots &= \\ = \varepsilon f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{r=1}^n f_{k_x}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

After this we equate the coefficients of like powers of ε in the last two expressions and obtain

$$\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} = f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1, \quad (20.25)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(2)} &= \sum_{r=1}^n f_{k_x}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + \\ &\quad + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 \end{aligned} \quad (20.26)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

From the system of equations (20.25), (20.26) etc., obtained above, we can determine successively the unknown functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$, $u_k^{(2)}(a, \psi)$, $\dots$ ($k = 1, 2, \dots, n$), as well as the functions

$A_1(a), B_1(a), A_2(a), B_2(a), \dots$, the latter ones must be determined in such a way that the functions $u_k^{(1)}(a, \psi), u_k^{(2)}(a, \psi), \dots, (k = 1, 2, \dots, n)$ may be periodic in ψ with the period 2π .

We now proceed on to solve equations (20.25). For this purpose we examine the complex Fourier series for the functions $f_k^{(1)}(u_1^{(c)}, \dots, u_n^{(0)})(k=1, 2, \dots, n)$ where

$$f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) = \sum_{(-\infty < m < \infty)} \Phi_k^{(0)}(a) e^{im\psi} (k = 1, 2, \dots, n),$$

If this condition is satisfied, the solution we are seeking for, will have the following form :

$$u_k(\psi) = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q^{(m)} \right\} + e^{i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q^{(1)} + \\ + e^{-i\omega} \sum_{k=1}^n S_{kq}^* F_q^{(-1)} + C \varphi_k e^{i\psi} + C^* \varphi_k^* e^{-i\psi},$$

where C is an arbitrary complex constant.

After making these preliminary remarks, we proceed on to solve our basic problem, i.e. we proceed on to derive the functions (20.6) and (20.7).

We write the expansion (20.4) in the form

$$x_k = u_k^{(0)}(a, \psi) + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.23)$$

where, for the sake of brevity, we have put

$$u_k^{(0)}(a, \psi) = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.24)$$

Differentiating expressions (20.23) with respect to time and taking

into consideration equations (20.5) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} = \\ &= \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} \omega + \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 + \omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ &(k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

and, hence, the left-hand-sides of equations (20.1) may be written in the

form

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{ka} x_q &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \omega \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(2)} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Substituting (20.23) in the right-hand-sides of equations (20.1) we can write them in the following form :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^3 \dots = \\
& = \varepsilon f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{r=1}^n f_{k_x}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + \right. \\
& \quad \left. + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) \right\} + \varepsilon^3 \dots (k = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

After this we equate the coefficients of like powers of ε in the last two expressions and obtain

$$\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} = f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1, \quad (20.25)$$

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(2)} &= \sum_{r=1}^n f_{k_x}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + \\
&+ f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2,
\end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.26)$$

From the system of equations (20.25), (20.26) etc., obtained above, we can determine successively the unknown functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$, $u_k^{(2)}(a, \psi)$, ... ($k = 1, 2, \dots, n$), as well as the functions $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ..., the latter ones must be determined in such a way that the functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$, $u_k^{(2)}(a, \psi)$, ..., ($k = 1, 2, \dots, n$) may be periodic in ψ with the period 2π .

We now proceed on to solve equations (20.25). For this purpose we examine the complex Fourier series for the functions $f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$ ($k = 1, 2, \dots, n$) where

$$f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) = \sum_{(-\infty < m < \infty)} \Phi_k^{(0)}(a) e^{im\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

or

$$\Phi_k^{(m)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) e^{-im\psi} d\psi$$

Hence the system of equations (20.25) may, with the notation (20.24), be written in the form

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} &= \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} \Phi_k^{(m)}(a) e^{im\psi} + \\
&+ \left\{ \Phi_k^{(1)}(a) - A_1 \varphi_k - i B_1 \varphi_k a \right\} e^{i\psi} + \left\{ \Phi_k^{(-1)}(a) - A_1 \varphi_k^* + \right. \\
&\quad \left. + i B_1 \varphi_k^* a \right\} e^{-i\psi} \\
&\quad (k = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \quad (20.27)$$

In the same way we obtain equations of the type (20.20). Hence, in order to determine the unknown functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), periodic in ψ , from the system of equations (20.27) the following conditions similar to the conditions (20.21) must be fulfilled :

$$\sum_{q=1}^n \chi_q \left\{ \Phi_q^{(1)}(a) - A_1 \varphi_q - i B_1 \varphi_q a \right\} = 0$$

From this we find out expressions for $A_1(a)$ and $B_1(a)$:

$$A_1(a) + i a B_1(a) = \frac{\sum_{q=1}^n \chi_q \Phi_q^{(1)}(a)}{\sum_{q=1}^n \chi_q \varphi_q} \quad (20.28)$$

Now, solving the equations (20.27) we obtain, in accordance with (20.22), the following expression for the functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(a, \psi) = & \sum_{\substack{-\infty < m < \infty \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{ka}(im\omega) \Phi_l^{(m)}(a) \right\} + \\ & + e^{i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq} \{ \Phi_q^{(1)}(a) - (A_1(a) + iaB_1(a)) \varphi_q \} + e^{-i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* \{ \Phi_q^{(-1)}(a) - \\ & - (A_1(a) - iaB_1(a)) \varphi_q^* \} + C_1(a) \varphi_k e^{i\psi} + C_1^*(a) \varphi_k^* e^{-i\psi} \\ & (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (20.29)$$

which contains two arbitrary functions, the imaginary and the real parts of $C_1(a)$, not depending on ψ .

In order to simplify this expression to some extent we note the fact that according to the definition of the minor $D_{kn}(p)$ we have identically :

$$\left. \begin{aligned} pD_{kq}(p) - \sum_{r=1}^n c_{kr} D_{rq}(p) &= \delta_{kq} D(p) \\ pD_{kq}(p) - \sum_{r=1}^n c_{rq} D_{kr}(p) &= \delta_{kq} D(p) \end{aligned} \right\} \quad (20.30)$$

where

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q. \end{cases}$$

Putting $p = i\omega$ into (20.30) we find that for any fixed value of q the quantities $x_k = D_{kq}(i\omega)$ satisfy the equation (20.8) and hence must be proportional to ρ_k . Similarly, for any fixed value of k , $D_{kq}(i\omega)$ must be proportional to χ_a . Thus, we have

$$D_{kq}(i\omega) = \lambda \varphi_k \lambda_q. \quad (20.31)$$

Differentiating (20.30) with respect to p and thereafter putting $p = i\omega$, we obtain by virtue of (20.31)

$$\lambda \varphi_k \chi_q + i\omega D'_{kq}(i\omega) - \sum_{r=1}^n c_{kr} D'_{rq}(i\omega) = \delta_{kq} D'(i\omega)$$

or, in view of notation introduced before,

$$\frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{D'(i\omega)} + i\omega S_{kq} - \sum_{r=1}^n c_{kr} S_{rq} = \delta_{kq} \quad (20.32)$$

Thus, for any fixed value of q the magnitudes $y_k = S_{kq}$ satisfy the equation

$$i\omega y_k - \sum_{r=1}^n c_{kr} y_r = \delta_{kq} - \frac{\lambda \phi_k \chi_q}{D'(i\omega)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

Hence

$$\sum_{k=1}^n \chi_k \left\{ \delta_{kq} - \frac{\lambda \phi_k \chi_q}{D'(i\omega)} \right\} = 0$$

whence we get

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \chi_k = \frac{D'(i\omega)}{\lambda} \neq 0 \quad (20.33)$$

because the root $p = i\omega$ of the equation $D(p) = 0$ is simple.

Thus, we find that the denominator in the formula (20.28) is always non-zero.

We now multiply both the sides of (20.32) by φ_q and sum up the result over q . Since we have, according to (20.33), the relation

$$\varphi_k = -\frac{\sum_{q=1}^n \lambda \varphi_k \varphi_a \chi_q}{D'(i\omega)} \neq 0$$

we would have

$$i\omega \left(\sum_{q=1}^n S_{kq} \varphi_q \right) - \sum_{r=1}^n c_{kr} \sum_{q=1}^n S_{rq} \varphi_q = 0 \quad (20.34)$$

and therefore

$$\sum_{q=1}^n S_{ka} \varphi_q = \alpha \varphi_k, \quad \alpha = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Keeping in view the equations obtained above and introducing the new arbitrary function

$$K(a) = C_1(a) - \alpha [A_1(a) + iaB_1(a)]$$

instead of $C_1(a)$, we may write (20.29) in the form

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(a, \psi) = & \sum_{(-\infty < m < \infty)}^n e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) \Phi_q^{(m)}(a) \right\} + \\ & + e^{i\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n S_{kq} \Phi_q^{(1)}(a) + K(a) \varphi_k \right\} + e^{-iq} \left\{ \sum_{q=1}^n S_{kq}^* \Phi_q^{(-1)}(a) + K^*(a) \varphi_k^* \right\} \\ & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (20.35)$$

We note further that since the values $p = \pm i$ are simple roots of the equation $D(p) = 0$, they will be simple poles of the functions

$$Z_{kq}(p) = \frac{D_{kq}(p)}{D(p)}$$

and hence, on the basis of (20.31), we can write

$$Z_{kq}(p) = \frac{\lambda \cdot \rho_k : l_n}{D'(i\omega)(p - i\omega)} + \sum_{D'(-i\omega)(p+i\omega)}^{\lambda^* \rho_k^* / l^*} + Z_{kq}^*(p) \quad (20.36)$$

where $Z_{kq}^*(p)$ is a regular function in the neighbourhood of the points $p = \pm i\omega$. Since by definitions

$$S_{k\eta} = \frac{D'_{k\eta}(i\omega)}{D'(i\omega)}$$

we find that S_{kr} will be the value of the regular part of $Z_{kr}(p)$ at the point $p = i\omega$:

$$S_{kq} = \frac{\lambda^* \circ^* \chi_q^*}{2i\omega D'(-i\omega)} + Z_{kq}^*(i\omega) \quad (20.37)$$

Similarly $S_{k,n}^*$ will be the value of the corresponding regular part of Z_{kq} at the point $p = -i\omega$

:

$$S_{kn}^* = -\frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{2i\omega D'(i\omega)} + Z_{k\eta}^*(i\omega) \quad (20.38)$$

The expression obtained for the functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (20.35) contains two arbitrary functions, the real and the imaginary parts of $K(a)$. For determining these functions we can, as was done before, lay down an additional condition which states that none of the n functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$ contains the fundamental harmonic, because such a condition would lead to $2n$ conditions.

In the case under study we shall employ the following method.

We introduce certain constants $g_1, \dots, g_n$ and form a linear combination :

$$g_1 u_1^{(1)}(a, \psi) + \dots + g_n u_n^{(1)}(a, \psi) \quad (20.39)$$

We require that the term with $e^{i\psi}$ is absent from the Fourier expansion (20.39). For this it is necessary to have the following relationship :

$$\int_0^{2\pi} \left[g_1 u_1^{(1)}(a, \psi) + \dots + g_n u_n^{(1)}(a, \psi) \right] e^{-i\psi} d\psi = 0 \quad (20.40)$$

Putting the values of $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (20.35) into (20.40) we obtain a linear equation from which we can determine $K(a)$.

In particular, if real quantities are chosen for $g_1, \dots, g_n$, the condition (20.40) will become equivalent to the condition of absence of the fundamental harmonic in the function (20.39).

Thus, deriving the real and the imaginary parts of $K(a)$ and determining at the same time, by (20.35), the form of the functions $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), we proceed to solve equation (20.26).

As in the previous case, in order that this equation may have a solution periodic in ψ with a period 2π , it is necessary that a condition of the type (20.21) be fulfilled, i.e.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^n f_{k_r}^{(1)'} \left(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)} \right) u_r^{(1)} + f_k^{(2)} \left(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 \right\} e^{-i\psi} d\psi = 0 \end{aligned}$$

This condition enables us to determine the functions $A_2(a)$ and $B_2(a)$: $A_2(a) + iaB_2(a) =$

$$\begin{aligned} = \left(\sum_{k=1}^n \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^n f_{k_r}^{(1)'} \left(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)} \right) u_r^{(1)} + f_k^{(2)} \left(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} e^{-i\psi} d\psi \right) \div \\ \div \left[2\pi \sum_{k=1}^n \chi_k \varphi_k \right] \quad (20.41) \end{aligned}$$

Taking this expression for $A_2(a)$ and $B_2(a)$ we can derive from (20.26) the periodic functions $u_k^{(2)}(a, \psi) (k = 1, 2, \dots, n)$.

Thus, we can now construct the approximate solution of the system of equations (20.1) corresponding to a monofrequency oscillation state. We have in the first approximation :

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.42)$$

where $\varphi_k, \varphi_k^* (k = 1, 2, \dots, n)$ are non-trivial solutions of the system of homogeneous algebraic equations (20.8) in which $p = i\omega$ and $p = -i\omega$ are put respectively and a, ψ are certain functions of time to be determined by the equations :

$$\left. \begin{aligned} da \\ dt = \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (20.43)$$

In this $A_1(a)$ and $B_1(a)$ are to be obtained from (20.28).
In the second approximation, we have

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.44)$$

where $u_k^{(1)}(a, \psi)$ are to be determined with the help of the formula (20.35), while a and ψ are certain functions of time to be determined by the equations:

$$\left. \begin{aligned} da \\ dt \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) \\ \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned} \right\} \quad (20.45)$$

In this $A_1(a)$ and $B_1(a)$ are to be determined by the expression (20.28) and $A_2(a)$ and $B_2(a)$ by the expression (20.41).

Summing up these results we give here the formal method with the help of which we can construct the first and the second approximations for the solutions of the system of equations (20.1) corresponding to a monofrequency oscillation process depending on two arbitrary constants.

First of all, it is necessary to treat separately an unperturbed linear system and to note that in this system it is possible to have natural harmonic oscillations with a certain frequency (ω). Thereafter, we have to test whether the natural oscillations with this frequency depend only on two arbitrary constants a and 0 :

$$x_k = \varphi_k a e^{i(\omega t + 0)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t + 0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.46)$$

Further, in an unperturbed system ($\varepsilon = 0$) natural undamped oscillations neither in the overtones of ω nor in the zero harmonic are impossible (the condition of absence of non-trivial static solutions).

We shall further examine the forced oscillations

$$x_k = \sum_{r=1}^n Z_{kr}(i\alpha) F_r e^{i\alpha t}$$

which are excited in an unperturbed system by the impressed forces $F_r e^{i\alpha t}$, and shall derive the condition for the finiteness of the forced oscillation when $\alpha = \omega$:

$$\sum_{k=1}^n \chi_k F_k = 0$$

Thus, we can use as a first approximation expression (20.46) in which a and $\psi = \omega t + \theta$ are certain functions of time to be determined by the equations of first approximation (20.43). The functions $A_1(a)$ and $B_1(a)$, entering into this equation are derived by putting (20.46) into the "equation of harmonic balance"

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \chi_k \left\{ \frac{dx_k}{dt} - \sum_{r=1}^n c_{kr} x_r - \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) - \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) - \dots \right\}_{x_i=u_i^{(0)}(a, \psi)} e^{-i\psi} d\psi = 0 \quad (20.47)$$

When this substitution is made, the differentiation is performed by taking into account equations (20.43) and neglecting terms of order higher than the first.

It is not difficult to check that the expressions we obtained for $A_1(a)$ and $B_1(a)$ are analogous to those obtained from the formula (20.28). For obtaining the second approximation we analyse the principal terms of the perturbing forces

$$\varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

substitute in them the value of $x_1, \dots, x_n$ according to the formulae of the first approximation (20.46) and then expand the result in the form of a Fourier series :

$$\sum_{(-\infty < m < \infty)} \approx \left(\psi_k^{(m)}(a) e^{im(\omega t + b)} \right) \quad (20.48)$$

Considering a and θ to be constant in this case, we examine the regularised forced oscillation

$$\begin{aligned} \varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t + \theta) = & \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im(\omega t + 1)} \left\{ \sum_{r=1}^n \varepsilon \mathbb{S}_r^{(m)}(a) Z_{kr}(im\omega) \right\} \\ & + e^{i(\omega t + 0)} \left\{ \sum_{r=1}^n S_{kr} z \Phi_r^{(1)}(a) \right\} + e^{-i(\omega t + \theta)} \left\{ \sum_{r=1}^n S_{kr}^* z \Phi_r^{(-1)}(a) \right\} \quad (20.49) \\ & (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

which would be excited in an any unperturbed system by the impressed forces (20.48). We speak of a regularised forced oscillation meaning thereby that in the harmonic components of the forced oscillation, excited by the resonating terms and

$$\varepsilon \Phi_k^{(-1)} e^{-i(\omega t + 0)}$$

the singularities

$$\frac{\lambda q_k \chi_r}{D'(i\omega)(p - i\omega)}$$

for $p = i\omega$ and

$$\frac{\lambda^* \varphi_k^* \lambda_r^*}{D'(-i\omega)(p + i\omega)}$$

for $p = -i\omega$ have been removed from the multiplier $Z_{kr}(p)$.

We further introduce two arbitrary real functions $K_1(a)$ and $K_2(a)$ ($K(a) = K_1(a) + iK_2(a)$),

and choose for the second approximation the expression of the form :

$$\begin{aligned} x_k = & \varphi_k a e^{i(\omega t + 0)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t + 0)} + \varepsilon \varphi_k K(a) e^{i(\omega t + 0)} + \\ & + \varepsilon \varphi_k^* K^*(a) e^{-i(\omega t + 0)} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t + 0) \end{aligned} \quad (20.50)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

in which

$$K(a) = K_1(a) + iK_2(a), \quad K^*(a) = K_1(a) - iK_2(a).$$

The expressions (20.50) may obviously be interpreted as a sum of natural oscillations and regularised forced oscillations.

To determine the functions $\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a)$ and $\varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a)$, standing in the right-hand-sides of the equations of the second approximation (20.45), we substitute the values of $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ according to formulae (20.50) in the "equation of harmonic balance" (20.47), taking into consideration during differentiation the equations of the second approximation (20.45) and carrying out calculations correct upto the second order.

A simple test would show that the procedure discussed above leads to the same result as given by the theory of asymptotic expansions worked out earlier.

10.5.2 21. Natural Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom, Representable by a System of Differential Equations of the Second Order

In order to investigate oscillating systems with several degrees of freedom it is often convenient to examine a system of N differential equations of the second order where N is the number of degrees of freedom.

We examine a special case where the unperturbed system conforms to the usual scheme in the theory of small oscillations. For investigating this particular case we shall make use of the results obtained in the previous section. As we know, in this case the unperturbed system is completely described by the kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (21.1)$$

and by the potential energy

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N c_{rs} q_r q_s, \quad (21.2)$$

where $q_s (s = 1, 2, \dots, N)$ are generalised coordinates, a_r, c_{rs} , the corresponding inertial and quasi-elasticity coefficients and $a_{rs} = a_{rr}, c_r = c_{rr}$. Putting the values of the kinetic and potential energy (21.1) and (21.2) into the Lagrange equation we obtain differential equations of the unperturbed motion in the form :

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs} \dot{q}_s + c_{rs} q_s\} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (21.3)$$

Supposing that perturbation is determined by small generalised forces of the form :

$$\begin{aligned} Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \\ = \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (21.4)$$

we arrive at the problem of investigating the following differential equations :

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}q_s\} =$$

$$\begin{aligned} = \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \\ (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (21.5)$$

which reduce to the equations (21.3) when $\varepsilon = 0$.

Before we proceed on to apply the results of the previous section to the investigation of the system of equations (21.5) we shall describe certain properties of the solutions of the system of unperturbed equations (21.3).

As we know, the particular solutions of the unperturbed system (21.3), corresponding to normal oscillations, are represented by the expressions :

$$\begin{aligned} q_s = \varphi_s^{(j)} a e^{i(\omega_j t + 0)} + \varphi_s^{(j)*} a e^{-i(\omega_j t + 0)} \\ (s, j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

or in the real form by

$$q_s = \varphi_s^{(j)} a \cos(\omega_j t + 0) \quad (s, j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.6)$$

where $\omega_j (j = 1, 2, \dots, N)$ are natural frequencies determinable by the characteristic equation

$$D \parallel -a_{rs}\omega^2 + c_{rs} \parallel = 0, \quad (21.7)$$

is $\varphi_s^{(j)} (s, j = 1, 2, \dots, N)$ being normal functions representing the nontrivial solutions of the system of homogeneous algebraic equations

$$\sum_{s=1}^N \{-a_{rs}\omega_j^2 + c_{rs}\} \varphi_s^{(j)} = 0 \quad (r, j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.8)$$

and possessing the property of orthogonality

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(l)} &= 0 \\ \sum_{r,s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(l)} &= 0 (j \neq l) \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

Quantities a and 0 are real arbitrary constants.

We further note that forced oscillations excited in the unperturbed system (21.3) by generalised harmonic forces

$$Q_r = E_r \cos(\alpha t + \vartheta) \quad (r = 1, 2, \dots, N),$$

are determined by the expressions

$$q_s = u_s \cos(\alpha t + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

The constant amplitudes $u_r (r = 1, 2, \dots, N)$ will satisfy the system of non-homogeneous algebraic equations

$$\sum_{s=1}^N \{-a_{rs}\alpha^2 + c_{rs}\} u_s = E_r \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (21.10)$$

for whose solution we shall use the normal coordinates. We shall seek for an expression for $u_s (s = 1, 2, \dots, N)$ in the form of the sums

$$u_s = \sum_{j=1}^N c_{sj}^{(j)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.11)$$

where c , are unknown coefficients yet to be determined. Putting (21.11) into the system of equations (21.10) and remembering that

$$\varphi_a^{(j)}(s, j = 1, 2, \dots, N)$$

satisfy the system of homogeneous algebraic equations (21.8), we get

$$\sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N a_{rs} \{\omega_j^2 - \alpha^2\} c_{sj}^{(j)} = E_r \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (21.12)$$

Multiplying these equations by $\rho_1^{(j_1)}, \rho_2^{(j_1)}, \dots, \rho_N^{(j_1)}$ respectively and summing up the result over r , we obtain

$$\sum_{j=1}^N c_j \{\omega_j^{(2)} - \alpha^2\} \sum_{s,r=1}^N a_{rs} \varphi_s^{(j)} \varphi_r^{(j_1)} = \sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j_1)}. \quad (21.13)$$

Taking into consideration the orthogonality of the normal functions (expression (21.9)) and introducing the notation

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(j)} = m_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.14)$$

we obtain

$$u_s = \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \alpha^2)} \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (21.15)$$

Thus, the conditions of finiteness for the forced oscillations in a case where the frequency of the external force α is equal to one of the natural frequencies, say ω_1 , will have the form

$$\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(1)} = 0. \quad (21.16)$$

These conditions being fulfilled, the amplitudes of the forced oscillations are determined by the formulae

$$u_s = \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \alpha^2)} + C \varphi_s^{(1)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.17)$$

where C is an arbitrary constant.

After we have made these brief remarks on the natural and the forced oscillations in the unperturbed system (21.3), we shall proceed to investigate the system of perturbed equations (21.5).

As in the previous section, we shall examine the problem of constructing approximate asymptotic formulae for particular solutions corresponding to monofrequency oscillations which, for small ε , are close to one of the normal unperturbed oscillations (21.6); for instance, close to the normal oscillations

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (21.18)$$

with frequency ω_1 .

In order that the conditions for the applicability of the method given in the previous section be satisfied it is necessary to make the following assumptions:

1. Undamped harmonic oscillations with frequency ω_1 depending only on two arbitrary constants are possible in the unperturbed system.
2. The only solution corresponding to equilibrium in the unperturbed system is the trivial solution

$$q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0$$

3. Neither the frequency ω_1 nor any of its overtones $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, k\omega_1, \dots$ are equal to any of the natural frequencies $\omega_2, \dots, \omega_N$ of the unperturbed system (absence of internal resonance).

Under these conditions we can make use of our method and construct the asymptotic expansions

$$q_s = \phi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^3 \dots \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.19)$$

in which a and $\psi = \omega_1 t + \theta$ are determined by the differential equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.20)$$

Functions $u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta), u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta), \dots (s = 1, 2, \dots, N); A_1(a), A_2(a), \dots; B_1(a), B_2(a), \dots$, appearing on the right-hand-side of the expression (21.19) and equation (21.15), may be completely determined, as in the previous section. However, it is not difficult to find the first terms of the expansions (21.19) and (21.20). Being necessary for the construction of the solutions in the first and second approximation, they may be determined with the help of the formal method formulated in the previous section.

First we shall deduce formulae for the first approximation. As in the previous section, we shall take the expressions

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (21.21)$$

the amplitude a and the full phase ψ occurring in these expressions being determined, in the first approximation, by the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

Here, the functions $A_1(a)$ and $B_1(a)$ can be derived by substituting (21.21) into the equation of harmonic balance :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 Q_r^{(3)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \dots \right\} \cos \psi d\psi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \dots \right\} \sin \psi d\psi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.23)$$

in which we limit ourselves only to terms of the first order. Now, we shall derive explicit expressions for $A_1(a)$ and $B_1(a)$. Differentiating (21.21) and keeping in view the equation (21.22), we obtain to the first order of accuracy :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [\varepsilon \cos \psi A_1(a) - a\omega_1 \sin \psi - \varepsilon a\omega_1 \sin \psi B_1(a)], \\ \ddot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [-\varepsilon 2\omega_1 \sin \psi A_1(a) - a\omega_1^2 \cos \psi - \varepsilon 2a(\omega_1 \cos \psi B_1(a))] \\ &\quad (s = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

Putting (21.21) and (21.24) into the expression (21.23) we obtain to the same degree of accuracy :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N \varphi_s^{(1)} [-a_{rs} (a\omega_1^2 \cos \psi + 2a\omega_1 \varepsilon \cos \psi B_1(a) + 2\varepsilon \omega_1 \sin \psi A_1(a)) + c_{rs} a \cos \psi] - \varepsilon Q_r^{(1)} \right\} \cos \psi d\psi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N \varphi_s^{(1)} [-a_{rs} (a\omega_1^2 \cos \psi + 2a\omega_1 \varepsilon \cos \psi B_1(a) + 2\varepsilon \omega_1 \sin \psi A_1(a)) + c_{rs} a \cos \psi] - \varepsilon Q_r^{(1)} \right\} \sin \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Inverting the order of summation and integration and assuming during integration over ψ that a is a constant and also remembering that

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \pi$$

we obtain

$$\begin{aligned} 2a\omega_1 \pi \varepsilon B_1(a) \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} a_{rs} - a\pi \sum_{r,s=1}^N (c_{rs} - a_{rs} \omega_1^2) \varphi_s^{(1)} \varphi_r^{(1)} = \\ = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a (\omega_1 \sin \psi) \right) \cos \psi d\psi, \\ 2\omega_1 \pi \varepsilon A_1(a) \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} a_{rs} = \\ = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

Considering that

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} = m_1, \quad \sum_{s=1}^N (c_{rs} - a_{rs} \omega_1^2) \rho_1^{(1)} = 0,$$

we finally obtain the formulae :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_1 \pi m_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right) \sin \psi d\psi, \\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_1 \pi m_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (21.25)$$

We now note that the formulae (21.25) may be obtained much more simply by means of an analogy with the results of 1 for a system with a single degree of freedom.

Now, on the basis of (21.7) and (21.14), we can write

$$\sum_{r,s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} = m_1 \omega_1^2.$$

Putting $x = a \cos \psi$, we obtain instead of (21.23) the following equations of harmonic balance

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \varphi_1^{(1)} \dot{x}, \dots, \varphi_N^{(1)} \dot{x} \right) \right\} \cos \psi d\psi = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \varphi_1^{(1)} \dot{x}, \dots, \varphi_N^{(1)} \dot{x} \right) \right\} \sin \psi d\psi = 0. \end{aligned} \quad (21.26)$$

Hence, it is perfectly clear that the equations of the first approximation (21.22) must be the same as those for a system with a single degree of freedom with mass m_1 , elasticity $m_1 \omega_1^2$, acted upon by the perturbing force

$$\varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \varphi_1^{(1)} \dot{x}, \dots, \varphi_N^{(1)} \dot{x} \right). \quad (21.27)$$

Thus, using the formulae (1.27) derived for a system with one degree of freedom and substituting the expression (21.27) in place of $f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)$ we immediately arrive at the formulae (21.25).

We shall once again discuss the simple energy interpretation of the formulae (21.25).

We examine for this purpose the expression for the virtual work δW performed by the perturbing generalised forces

$$Q_r^{(1)} (q_1, \dots, q^N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}^N) \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

in a state of sinusoidal oscillations

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi, \quad \dot{q}_s = -\omega_1 \varphi_s^{(1)} a \sin \psi,$$

and for virtual displacements

$$\delta q_s = \varphi_s^{(1)} \cos \psi \delta a - \varphi_s^{(1)} a \sin \psi \delta \psi,$$

corresponding to the variations of the amplitude and the full phase of the normal oscillation.

We have to an accuracy of the first order :

$$\begin{aligned} \delta W = \varepsilon \sum_{r=1}^N Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right) \times \\ \times \left[\varphi_r^{(1)} \cos \psi \delta a - \varphi_r^{(1)} a \sin \psi \delta \psi \right]. \end{aligned} \quad (21.28)$$

We now take the average value of this work during a complete cycle of oscillation :

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W d\psi \quad (21.29)$$

Comparing (21.28) and (21.29) with (21.25), we may write $\delta W = -m_1 \omega_1 a \varepsilon B_1(a) \delta a + m_1 \omega_1 a \varepsilon A_1(a) \delta \psi$.

We denote by

$$\frac{\delta W}{\delta a} \text{ and } \frac{\delta W}{\delta \psi}$$

the coefficients of variations δa and $\delta \psi$ in the expression for δW .
Hence, we shall have

$$\varepsilon A_1(a) = \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \delta W, \quad \delta \psi, \quad \varepsilon B_1(a) = -\frac{1}{m \omega_1 a} \delta W, \delta a, \quad (21.30)$$

The equation of the first approximation may thus be written in the form

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \overline{\delta W} \frac{\delta W}{\delta \varphi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 - \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \overline{\delta W}. \end{aligned} \quad (21.31)$$

In order to obtain equations of the first approximation it is sufficient to determine only the average magnitude of the virtual work, over a cycle of oscillations, performed by the perturbing forces, in a state of sinusoidal oscillations, for virtual displacements corresponding to the variations in the amplitude a and the phase ψ .

We now proceed to construct solutions for equations (21.5) in the second approximation.

For this purpose we examine, at first, to an accuracy of the first order, the forced oscillations which might be excited in the unperturbed system (21.3) by the generalised forces

$$Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

where $q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$ are sinusoidal :

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta), \quad \dot{q}_s = -\varphi_s^{(1)} a \omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

We find that in this case

$$\begin{aligned} Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \\ = \varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) &+ \varepsilon^2 \dots \quad (r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

We now expand $\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots)$ into a Fourier series :

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) &= \varepsilon f_r^{(0)}(a) + \\ + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \{ f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) &+ g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta) \} \end{aligned}$$

$$(r = 1, 2, \dots, N),$$

where

$$\begin{aligned} f_r^{(k)}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \cos k\psi d\psi, \\ g_r^{(k)}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \sin k\psi d\psi \end{aligned}$$

$$(r = 1, 2, \dots, N; \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

Each of the components of this type, with frequency $k\omega_1 (k = 0, 2, 3, \dots)$ excites, . . . , according to (21.15) forced oscillations

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \left\{ f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta) \right\} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - k^2 \omega_1^2)} - c + c = 2, 3, \dots$$

and

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N \phi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N f_r^{(0)}(a) \varphi_r^{(j)}}{m_j \omega_j^2}, \quad k = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

For harmonics with frequency ω_1 we take into account in the sum (21.10) only those terms which correspond to the excitation of the higher normal coordinates :

$$= \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \sum_{r=1}^N \{ f_r^{(1)}(a) \cos(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(1)}(a) \sin(\omega_1 t + \theta) \} \rho_r^{(j)}$$

$$m_j (\omega_j^2 - \omega_1^2)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

Thus we get "regularised" forced oscillations which would be excited in the unperturbed system by the generalised forces $Q_r(q_1, \dots, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon)$ ($r = 1, 2, \dots, N$), in which $q_s, \dot{q}_s$ ($s = 1, \dots, N$) are sinusoidal ; these oscillations would be of the following form (accurate to the first order of magnitude) :

$$su_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta) = \varepsilon \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N f_r^{(0)}(a) \varphi_r^{(j)}}{m_j \omega_j^2} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{ f_r^{(1)}(a) \cos(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(1)}(a) \sin(\omega_1 t + \theta) \} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \omega_1^2)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{ f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta) \} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - k^2 \omega_1^2)} \quad (21.32)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

Combining these expressions with those of the first approximation, we obtain the solutions of the equations (21.5) in the second approximation :

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi + su_s^{(1)}(a, \psi) \quad (21.33)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

As in the previous section, we might add here terms of the type $\varepsilon \{ C_1(a) \cos \psi + C_2(a) \sin \psi \} \varphi_r^{(1)}$, containing two functions $C_1(a)$ and $C_2(a)$. But since their choice is arbitrary we shall put $C_1(a) = C_2(a) = 0$ and operate in future with expressions (21.33) for obtaining simpler formulae.

In order that expressions (21.33) actually yield the second approximation, the quantities a and ψ in them must be certain functions of time that are to be determined from the equations of the second approximation

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (21.34)$$

The functions $A_2(a)$ and $B_2(a)$ which have been introduced here can be found by substituting the second approximation (21.33) into the equations of harmonic balance (21.23). For this purpose the differentiation with respect to time should be performed by solving the equations (21.34) such that the derivative with respect to t does not appear under the integral sign and

integration with respect to ψ should be performed as if a were a constant parameter and all quantities upto second order were completely included.

Now we note that in the formula (21.32) the harmonics of the first order $\cos \psi$ and $\sin \psi$ appear only in those terms which are proportional to $\varphi_r^{(2)}, \varphi_r^{(3)}, \dots, \varphi_r^{(N)}$ ($r = 1, 2, \dots, N$), and these satisfy the relations

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(j)} = 0, \quad \sum_{r,s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(j)} = 0$$

$$(j = 2, 3, \dots, N)$$

Thus the expressions

$$\sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} a_{rs} u_s^{(1)}(a, \psi), \quad \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} c_{rs} u_s^{(1)}(a, \psi)$$

do not contain harmonics of the first order.

Taking into consideration these remarks we can represent the equations of harmonic balance (21.23) as

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left[\varepsilon Q_r^{(1)} \left(\rho_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} \left(\rho_1^{(1)} x, \dots \right) \right] \right\} \cos \psi d\psi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left[\varepsilon Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots \right) \right] \right\} \sin \psi d\psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.35)$$

where, as before, $x = a \cos \psi$.

Since the expression

$$m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) \quad (21.36)$$

consists only of first harmonics in ψ , equations (21.35) are equivalent to an equation expressing the equality of the expression (21.36) to the first harmonic of the sum

$$\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left(\varepsilon Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots \right) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots \right) \right).$$

We now denote the first harmonic of a certain periodic function $F(\cdot)$ by $H_1\{F\}$:

$$H_1\{F\} = \cos \psi \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos \psi d\psi + \sin \psi \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin \psi d\psi.$$

The equation equivalent to (21.35) may be written in the form

$$m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = H_1 \left\{ \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left[\varepsilon Q_r^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} \left(\varphi_1^{(1)} x, \dots \right) \right] \right\}. \quad (21.37)$$

It is evident that this equation must be satisfied with an accuracy of the second order. The quantities q_r and $\dot{q}_r$ ($r = 1, 2, \dots, N$) in the expressions for the generalised forces must be

replaced according to the formulae (21.33), equations (21.34) being taken into account.
monofrequency oscillations in non-linear systems
We note that since $x = a \cos \psi$, we can write

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = \varepsilon \{ -2\omega_1 A_1 \sin \psi - 2\omega_1 a B_1 \cos \psi \} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 - 2\omega_1 a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ \left. - \left(2\omega_1 A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi \right\} \end{aligned} \quad (21.38)$$

Expanding the right-hand-side of equation (21.37) in powers of ε and taking only the first two terms, we arrive at the equation

$$\begin{aligned} H_1 \left\{ \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r(q_1, \dots, q_N, q_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \right\} = \\ = \{ \varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a) \} \cos \psi + \{ \varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a) \} \sin \psi \end{aligned} \quad (21.39)$$

Comparing the coefficients of equal harmonics and equal powers of ε in the right-hand-sides of the equations (21.38) and (21.39), we get

$$A_1(a) = -\frac{M_1(a)}{2\omega_1 m_1}, \quad B_1(a) = -\frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} \quad (21.40)$$

Moreover

$$\begin{aligned} A_2(a) = + \frac{A_1(a) B_1(a)}{\omega_1} - \frac{A_1(a)}{2\omega_1} a \frac{dB_1(a)}{da} - \frac{M_2(a)}{2\omega_1 m_1} \\ B_2(a) = -\frac{B_1^2(a)}{2\omega_1} + \frac{A_1(a)}{2\omega_1 a} \frac{dA_1(a)}{da} - \frac{L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} \end{aligned} \quad (21.41)$$

It is not difficult to see that the formulae (21.40) give for $A_1(a)$ and $B_1(a)$ the same expressions that are given by the formulae (21.25) obtained above.

Thus, the equations of second approximation may be written in the form

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = - \frac{\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a)}{2\omega_1 m_1} - \frac{\varepsilon^2 A_1(a) B_1(a)}{\omega_1} - \\ - \frac{\varepsilon^2 A_1(a)}{2\omega_1} \frac{dB_1(a)}{da} a \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1} + \varepsilon^2 \frac{A_1(a)}{2\omega_1 a} \frac{dA_1(a)}{da} \end{aligned} \quad (21.42)$$

We now note that from the point of view of the usual theory of small oscillations the sum

$$\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r$$

represents the generalised force acting upon the first normal coordinate.

Thus, to write the equations of second approximation in an explicit form it is sufficient to calculate the first harmonic of this generalised force, taking into account terms of not higher than the second order.

We now examine the particular case of stationary monofrequency oscillations with constant amplitude. In this case the phase rotates uniformly with a certain angular velocity $\omega_1(a)$:

$$\psi = \omega_1(a)t + \theta, \quad \theta = \text{const.}$$

From (21.42) we have

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \varepsilon^2 B_1^2(a) + \varepsilon^2 \omega_1(a) dA_1(a),$$

and also

$$M_1(a) + \varepsilon M_2(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a) B_1(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a) \frac{dB_1(a)}{da} a = 0$$

or

$$A_1(a) + \varepsilon A_2(a) = 0$$

The last equation shows that $M_1(a)$ and $A_1(a)$ are magnitudes of the first order and hence we can write with the same degree of accuracy

$$\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a) = 0 \quad (21.43)$$

and

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1},$$

or, in view of (21.40),

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1} \left(\frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a}$$

Squaring this expression and neglecting terms of order higher than the second, we obtain finally for the square of the frequency of stationary oscillations the expression

$$\omega_1^2(a) = \omega_1^2 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{m_1 a}. \quad (21.44)$$

Thus, the calculation of the stationary monofrequency oscillations in systems having several degrees of freedom may be performed according to the following simple method. First of all, we determine the generalised force acting upon the first normal coordinate ; then we replace in it $q_r, \dot{q}_r (r = 1, 2, \dots, N)$ by the expressions according to the formulae (21.33) where $u_r^{(1)}(a, \psi) (r = 1, 2, \dots, N)$ are determined from the forced "regularised" oscillations that are excited in an unperturbed system by external forces in a state of sinusoidal oscillations. Afterwards we expand the expression obtained for the generalised force acting upon the first normed coordinate in a Fourier series. Next, the coefficient of the sine function, accurate to the second order of magnitude, is equated to zero. We thus obtain equation (21.43) from which we determine the stationary amplitude of the oscillation. We substitute the coefficient of the cosine function in the right-hand-side of the formulae (21.44). This determines the frequency of the stationary oscillations.

10.5.3 22. Effect of External Periodic Forces on Monofrequency Oscillations in Systems with Several Degrees of Freedom

We now proceed to examine oscillating systems with several degrees of freedom, which are acted upon by an external periodic generalised force depending explicitly on time and having the form

$$Q_r(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_r^{(1)}(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) +$$

$$+\varepsilon^2 Q_r^{(2)}(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (22.1)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

We examine the system of N equations of the second order

$$\sum_{s=1}^N (a_{rs} \dot{q}_s + c_{rs} q_s) = \varepsilon Q_r^{(1)}(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) +$$

$$+\varepsilon^2 Q_r^{(2)}(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (22.2)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

in which, as in the previous section, $q, (r = 1, 2, \dots, N)$ are the generalised coordinates, $a_{rs} = a_{3r}$ and $c_{rs} = c_{3r}$ are certain constants.

We assume, as was done in 13, that the functions $Q_r(vt, q_1, \dots, \dots, q_N, q_1, \dots, q_N, \varepsilon) (r = 1, 2, \dots, N)$ are periodic in vt , with a period 2π , and may be represented in the form of finite Fourier sums with coefficients that are polynomials in the $q_r, \dot{q}_r (r = 1, 2, \dots, N)$.

Further, we assume for an unperturbed system of functions

$$\sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} \dot{q}_s) = 0 \quad (22.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

the conditions laid down in 21 being fulfilled.

It is with these assumptions that we search for the solutions of the system of equations (22.2), corresponding to the monofrequency state close to a normal oscillation. For the sake of definiteness let us assume a normal oscillation with frequency ω_1 .

Here we shall examine not only the non-resonance but also the resonance cases. Since the investigation of monofrequency states formally reduces to an investigation of a certain equivalent equation of the second order instead of a system of N equations of the second order, we shall, for the construction of the approximate solutions for the system of equations (22.2), use, besides the methods and results of the previous two sections, the results of Chapter 3 also.

In the non-resonance case*), on the basis of the considerations of 13, the solution of the system of equations (22.2) is to be sought in the form of asymptotic series :

$$q_s = q_s^{(1)} a \cos \psi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, vt, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, vt, \psi) + \varepsilon^3 \dots \quad (22.4)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

in which $u_s^{(1)}(a, \psi, vt), u_s^{(2)}(a, \psi, vt), \dots (s = 1, 2, \dots, N)$ are periodic

functions of both the angular variables, with a period 2π ; the amplitude a and the phase ψ are to be determined from the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

0*) Here, by a non-resonance case we mean a case for which the frequency ν of the external force does not coincide with any of the natural frequencies of the system or does not satisfy a relation of the type $\nu \approx \frac{p}{q} \omega_k (k = 1, 2, \dots, N)$, where p and q are integers prime to each other.

For determining the functions $u_s^{(1)}(a, vt, \psi), u_s^{(2)}(a, vt, \psi), \dots (s = 1, 2, \dots, \dots N), A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$ we can use directly the results obtained in 13 for a system with a single degree of freedom.

Instead of the system of equations (22.2) which describes the monofrequency oscillation state, we examine a corresponding equation of the second order :

$$m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r \left(vt, \varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \varphi_1^{(1)} \dot{x}, \dots, \dots, \varphi_N^{(1)} \dot{x}, s \right), \quad (22.6)$$

whence, using the formulae (13.35), we directly obtain

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) \sin \psi d\theta d\psi \\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) \cos \psi d\theta d\psi \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

where we have introduced the notations

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) &= \varepsilon Q_r^{(1)} \left(\theta, \varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, \varphi_N^{(1)} a \cos \psi, - \right. \\ &\quad \left. -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots, -\varphi_N^{(1)} a \omega_1 \sin \psi \right) \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (22.8)$$

Next, we derive $u_s^{(1)}(a, \psi, vt) (s = 1, 2, \dots, N)$ as forced "regularised" oscillations that are excited in the unperturbed system (22.3) by forces (22.8). We shall represent these in the form of Fourier sums (i.e. by external generalised forces in the first approximation taken in a

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOFREQUENCY OSCILLATIONS

state of sinusoidal oscillations : $q_r = q_r^{(1)} a \cos \psi, q_r = -\sum_r^{(1)} a u_1 \sin \psi (r = 1, 2, \dots, N) :$

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_{rn}^{(1)}(a, vt, \psi) &= \varepsilon \sum_{n,m} Q_{rn}^{(1)}(a) e^{i(nvt+m_j)} \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (22.9)$$

where

$$\begin{aligned} Q_{r0}^{(1)}(a) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{r0}^{(1)}(a, 0, \psi) e^{-i(n_{ij}+m_{ij})d_j} d_j \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (22.10)$$

Thus, $u_s^{(1)}(a, vt, \psi) (s = 1, 2, \dots, N)$ must be determined as forced oscillations from a system of linear differential equations:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \left(a_{rs} \frac{d^2 u_s^{(1)}}{dt^2} + c_{rs} u_s^{(1)} \right) &= \varepsilon \sum_{n,m} Q_{r0}^{(1)}(a) e^{i(nvt+m_t^*)} \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (22.11)$$

Here $\psi = \omega_1 t + \vartheta$.

The unknown functions $u_s^{(1)}(a, vt, \psi) (s = 1, 2, \dots, N)$ are sought for in the form of the series

$$u_s^{(1)}(a, vt, \psi) = \sum_{n,m} k_{n,m}^{(s)}(a) e^{i(nvt+m')} \quad (22.12)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

in which the coefficients $k_{n,m}^{(s)}(a)$ are yet to be determined.

Putting the expressions (22.12) for $u_s^{(1)}(a, vt, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) into equation (22.11) and equating the coefficients of equal harmonics, we obtain for determining the coefficients $k_{n,m}^{(s)}(a)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) the system of algebraic equations:

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs} [-\omega_1^2 m - 2v\omega_1 mn - v^2 n^2] + c_{rs}\} k_{n,m}^{(s)}(a) = Q_{r0}^{(1)}(a) \quad (22.13)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

For solving these equations we use normal coordinates.

We shall now develop an expression for $k_{n,m}^{(s)}(a)$ in the form of the sum

$$k_{n,m}^{(s)}(a) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_s^{(k)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (22.14)$$

where $\varphi_s^{(k)}$ are normed functions and c_k are unknown coefficients that are to be determined.

Putting (22.14) into the system of equations (22.13) and considering the fact that $\varphi_s^{(k)}$ ($s, k = 1, 2, \dots, N$) satisfy a system of homogeneous algebraic equations

$$\sum_{s=1}^N [-a_{rs} \omega_k^2 + c_{rs}] \varphi_s^{(k)} = 0 \quad (22.15)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

we obtain

$$\sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N a_{sr} [\omega_k^2 - (\omega_1 m + nv)^2] c_k \varphi_s^{(k)} = Q_{r0}^{(1)}(a) \quad (22.16)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Multiplying these equations by $\varphi_1^{(k_1)}, \varphi_2^{(k_2)}, \dots, \varphi_N^{(k_N)}$ respectively and summing up the results over r , we obtain

$$\sum_{k=1}^N c_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + nv)^2] \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N a_{rr} \varphi_s^{(k)} \varphi_r^{(k_k)} = \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(a) \varphi_r^{(k_k)}. \quad (22.16)$$

Taking into consideration the orthogonality of the normed functions (expression (21.9)) and the notation (21.14), we obtain

$$c_k = \frac{\sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(a) \varphi_r^{(k)}}{m_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + vn)^2]} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (22.17)$$

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOFREQUENCY OSCILLATIONS

Putting the values of $c_k (k = 1, 2, \dots, N)$ (22.17) into (22.14) and substituting in (22.12), we obtain for $u_s^{(1)}(a, vt, \psi) (s = 1, 2, \dots, N)$ the

ssions :

$$\varepsilon u_s^{(1)}(a, vt, \psi) = \sum_{n,m} \sum_{k=1}^N \rho_s^{(k)} \frac{\sum_{r=1}^N q_r^{(k)} Q_{r0}^{(1)}(a) e^{i(nvt+m_i)}}{m_k [\omega_k^3 - (nv + m\omega_1) = 1]} \quad (22.18)$$

$(s = 1, 2, \dots, N).$

For "regularisation" of equations (22.18) we find that their right-hand-sides become infinite if n and m are such that

$$\pm\omega_1 = nv + m\omega_1.$$

This equation, owing to the fact that we are examining the non-resonance case, is equivalent to the equation

$$n^2 + (m^2 - 1)^2 = 0, \text{ or } n = 0, \quad m = \pm 1.$$

Thus, for "regularisation" of equations (22.18) it is necessary that, when $k = 1$, terms with harmonics $e \pm$ are absent and they will often be absent due to our choice of the functions (22.7).

Thus, for $u_s^{(1)}(a_1, vt, \varphi) (s = 1, 2, \dots, N)$ we obtain the expressions $u_s^{(1)}(a, vt, \psi) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{4 \rightarrow} \sum_{n,m} \sum_{k=1}^N \\ &\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(k)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi \right\} e^{i(nvt+m\zeta)} \\ &m_k [w_k^2 - (nv + m\omega_1)^2] \\ &(s = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (22.19)$$

For determining the functions $A_2(a)$ and $B_2(a)$ we can either use the formulae of §13 (formula (13.37)) directly, or construct the equation of harmonic balance expressing equality of the coefficients of the first harmonic in angle ψ on the left and right-hand-sides of the equation (22.6) obtained by putting into it the values $x = a \cos \psi$, $q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, vt, \psi) (s = 1, 2, \dots, N)$, taking into consideration, of course, that a and ψ are determined by the equations (22.5), all calculations being performed to an accuracy of the second order of magnitude.

After elementary calculations we obtain for $A_1(a)$ and $B_2(a)$ the following expressions :

$$\begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega_1 m_1} [dB_1(a) - aA_1(a) + 2A_1(a)B_1(a)] - \\ &- \frac{1}{4\pi^2 \omega_1 m_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(2)}(a, 0, \psi) \sin \psi d\theta d\psi, \\ B_q(a) &= \frac{1}{2\omega_1 m_1 a} \left[\frac{dA_1(a)}{da} A_1(a) - aB_1^2(a) \right] - \\ &- \frac{1}{4\pi^2 \omega_1 m_1 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(2)}(a, 0, \psi) \cos \psi d\theta d\psi, \end{aligned} \quad (22.20)$$

where

We shall now consider the resonance case.
For the sake of simplicity, instead of the general case when

$$\omega_1 = \frac{P}{q}v$$

where p and q are certain mutually prime numbers, we shall consider the case called the particular case of the so-called fundamental resonance for which $p = q = 1$. Here we note that all the discussions can be extended to the general case also without any major modifications.

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOFREQUENCY OSCILLATIONS

As we have said above, for the examination of the resonance case there can be two approaches to its solution, depending upon the character of the task confronting us, viz., a direct investigation of the resonance domain or else the study of an approach to the resonance domain from the non-resonance one (over and above the study of the resonance case itself).

Here we take up the second approach as being more general ; in this for deriving the corresponding asymptotic formulae we shall also make use of the results obtained in 14 for a system with a single degree of freedom.

From the arguments given on page 224 the approximate solutions will have to be sought for in the form of the series

$$q_i = \varphi_s^{(1)} a \cos(vt + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, vt, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, vt, \psi) + \dots \quad (22.22)$$

($s = 1, 2, \dots, N$)

where $\psi = vt + \theta$, $u_s^{(1)}(a, \theta, \psi)$, $u_s^{(2)}(a, \theta, \zeta), \dots$, ($s = 1, 2, \dots, N$) are periodic functions in both the angular variables θ and ψ , with period 2π , and a and ϑ are to be determined as functions of time from the system of differential equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - v + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

For constructing the first and second approximations it is necessary to derive the expressions for $A_1(a, \theta)$, $B_1(a, \theta)$, $A_2(a, \theta)$, $B_2(a, \theta)$ and $u_s^{(1)}(a, vt, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$).

For determining $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ we immediately form a system of equations similar to (14.34).

For this purpose, it is necessary to replace ω in equation (14.34) by ω_1 (so as to take into account the existence of the generalised mass m_1) and to put

$$\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi)$$

in place of $f_0(a, 0, \psi)$, where

$$Q_{r0}^{(1)}(a, 0, \psi) = Q_r^{(1)} \left(0, \varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right).$$

As a result of this, we obtain the system of equations

$$\left. \begin{aligned} &(\omega_1 - v) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega_1 B_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \cos \psi d\theta d\psi \\ &(\omega_1 - v) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega_1 A_1 = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \sin \psi d\theta d\psi \end{aligned} \right\} \quad (22.24)$$

($\theta' = \psi - \theta$)

It is not difficult to derive from these the particular values of $A_1(a, \theta)$ and $B_1(a, \theta)$ which are periodic in ϑ , as pointed out before.

For constructing the asymptotic formulae in the second approximation we define $u_s^{(1)}(a, vt, vt + \vartheta)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) as forced "regularised" oscillations which can be excited in an unperturbed system by external perturbing forces in a state of sinusoidal oscillations; and in this case, as distinct from the non-resonance case, during "regularisation" the corresponding sums must not contain terms for which the relations of the type $nq + (m \pm 1)p = 0$ between the indices n and m hold for the terms in the denominator of which there appears the quantity ω_1 .

Thus, the regularised expression for $u_s^{(1)}(a, vt, vt + \theta)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) will have the form :

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n,m} \varphi_{s \neq 0}^N \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i(n_0 + m\psi)} d\theta d\psi}{m_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + vn)^2]} \times$$

$$\left(\begin{array}{l} nq + (m \neq 1) \\ \text{and } k = 1 \end{array} \right)$$

In order to construct equations determining $A_2(a, \theta)$ and $B_2(a, \theta)$, we shall make use of the corresponding formulae given in 14 for a system with a single degree of freedom or the equations of harmonic balance.

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOPREQUENCY OSCILLATIONS

We shall give here the derivation of these equations in an explicit form. We shall also discuss a particular case of the system (22.2) which is frequently met with during solving important practical problems in which the perturbing generalised forces are of the form

$$Q_r(\theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \varepsilon E_r \sin \theta \quad (22.26)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

Consequently, the oscillations are described by the system of differential equations

$$\sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} \dot{q}_s) = s Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \varepsilon E_r \sin \theta' \quad (22.27)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

We shall now examine the fundamental resonance ($p = 1, q = 1$) and for the sake of simplicity, we shall discuss in this case, the first approximation only.

According to the general method discussed above, a particular solution of the system of equations (22.27) corresponding to monofrequency oscillations similar to the first normal one will, in the first approximation, be

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\theta + \theta) \quad (22.28)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

in which the functions of time a and θ must be determined from the system of equations of the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \psi) \varphi_r^{(1)} \sin \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}}{m_1(\omega_1 + v)} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 - \nu - \frac{1}{2\pi m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \psi) \varphi_r^{(1)} \cos \psi d\psi + \\ &\quad + \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}}{m_1 a(\omega_1 + v)} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

Here, as before, ω_1 is the natural frequency of the unperturbed system, $\varphi_r^{(1)} (r = 1, 2, \dots, N)$ the non-trivial solutions of the system of homo. geneous algebraic equations (22.15) and

$$Q_{r0}^{(1)}(a, \psi) = Q_{r0}^{(1)} \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots \right) \\ (0 + \theta = \psi) \quad (r = 1, 2, \dots, N).$$

We simplify to some extent the system of equations (22.29). For this purpose, in the same way as in 15, we introduce the notation

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi a \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \psi) \varphi_r^{(1)} \sin \psi d\psi \\ \omega_e^{(1)}(a) &= \omega_1 - \frac{1}{2\pi a m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \psi) \varphi_r^{(1)} \cos \psi d\psi \\ E^{(1)} &= \sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

Hence, the equations of the first approximation (22.29) may be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a) a - \frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1 + v)} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a) - v + \frac{E^{(1)}}{m_1 a(\omega_1 + v)} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (22.31)$$

where $\delta_o^{(1)}(a) = \frac{\lambda_e^{(1)}(a)}{2m_1}$.

The parameters $\lambda_e^{(1)}(a)$ and $\omega_e^{(1)}(a)$ introduced here represent, respectively, the equivalent coefficient of damping and the full equivalent natural frequency of an oscillating system which can be described by an equation of the form

$$m_1 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)} \varphi_r^{(1)};$$

analogy to this has already been described before.

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOFREQUENCY OSCILLATIONS

Thus, in this particular case also (the same may be proved for equations of higher approximations too) the equations of the first approximation constructed for investigating the resonance case in systems with N degrees of freedom will be the same as for a system with a single degree of freedom (with mass m_1 and natural frequency ω_1) acted upon by a perturbing force $\sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)} \varphi_r^{(1)}$ (i.e. the generalised force acting upon the first normal coordinate) and by a perturbing sinusoidal force with an amplitude $\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}$ (vide formula (15.7)).

We shall now discuss the stationary states of oscillations with constant amplitude and phase.

Equating right-hand-sides of equations of the first approximation (22.25) to zero, we obtain for determining the stationary values of the amplitude a and the phase θ the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \delta_e^{(1)}(a) a + \frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1 + v)} \cos \theta &= 0 \\ \omega_e^{(1)}(a) - v + \frac{E^{(1)}}{m_1 a(\omega_1 + v)} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22.32)$$

Eliminating θ from these equations, we obtain to the second order of accuracy, a relation between the amplitude a and the frequency v of the external forces :

$$m_1^2 a^2 \left[\left(\omega_e^{(1)2}(a) - v^2 \right)^2 + 4\delta_e^{(1)2}(a)v^2 \right] = E^{(1)2}. \quad (22.33)$$

The equation obtained above coincides, in its form, with the equation (15.10) which was formed for a non-linear system with a single degree of freedom ; hence, in this case also, for forming the equation (22.33) we may use the rule formulated in 15. In the present case this rule would be as follows.

Let the oscillations of a certain system possessing N degrees of freedom be described by a system of non-linear differential equations of the type (22.27) and let the frequency v of the external forces be nearly equal to the fundamental natural frequency ω_1 of the unperturbed system. We have now to determine the values of the amplitude and the phase of the stationary monofrequency oscillations. For this, we examine

an oscillating system having one degree of freedom, with mass m_1 and natural frequency ω_1 , subject to a force $\sum_{r=1}^N \varepsilon Q_r^{(1)} \phi_r^{(1)}$ (generalised force acting up the first normal coordinate). Linearising this system we determine the equivalent damping decrement $\delta^{(1)}(a)$ and the equivalent frequency $\omega_c^{(1)}(a)$ of the natural oscillations as functions of the amplitude and put the values thus obtained into the classical equations of the linear theory of forced oscillations (22.32) and (22.33). For this case, the amplitude of the sinusoidal force is obtained from the formula $E^{(1)} = \sum_{r=1}^N s E_r^{(1)} \varphi_r^{(1)}$, i.e. this itself appears as a generalised force acting upon the first normal coordinate.

For determining the stationary values of the phase of the oscillations from the relations (22.32), we have the formula :

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_e^{(1)}(a) - v}{2v\delta_e^{(1)}(a)}. \quad (22.34)$$

With the help of the relationship (22.33), we can construct the resonance curve characterising the resonance oscillations that arise in our system of several degrees of freedom as a result of the action of an external sinusoidal force with a frequency nearly equal to one of the natural frequencies of the system.

For determining the stable and the unstable sections of the resonance curves we derive a rule similar to those given in 15 .

Thus, the conditions for stability (correct to the first order) will be represented by the inequalities

$$\left. \begin{array}{l} da > 0, \text{ when } \omega_a^{(1)}(a) > v, \\ dt \\ da \\ dt \end{array} \right\} \quad (22.35)$$

As an illustration of the use of the results obtained above, we shall investigate forced oscillations in a particular mechanical system with several degrees of freedom.

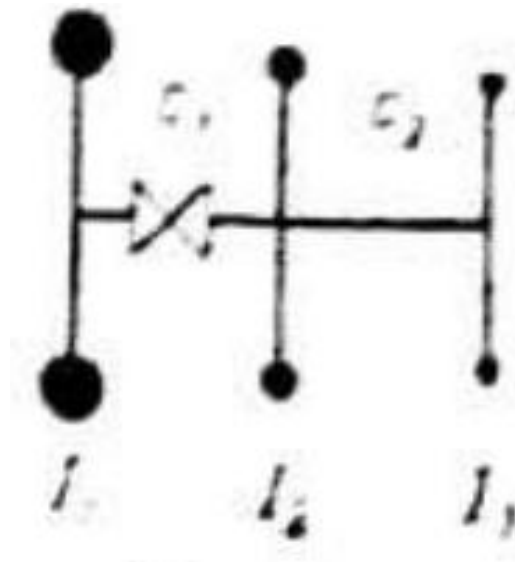


Fig. 118.

We now examine the given system of a crankshaft diagrammatically represented in Fig. 118 in which there is a non-linear relation between the first and the second mass. We assume, for the sake of simplicity, that a periodic torsional moment of the form

$$M = E \sin \theta$$

acts upon the mean mass ; $E = \text{const}$, $\frac{d\theta}{dt} = v$ - the frequency of the moment which will be proportional to the number of revolutions of the engine, while the moments acting upon the masses placed at the ends of the given shaft are equal to zero. We shall denote the moments of inertia of the masses of the engine by I_1, I_2, I_3 and the angles of deflection from those corresponding to uniform rotation by φ_1, φ_2 , and φ_3 .

Thus, the rigidity of the section of the shaft between the first and the second mass depends on the characteristics of the non-linear coupling. Let the rigidity of the section of the shaft between the second and the third mass be denoted by c_2 . The elastic moment depending on the difference between the angles of rotations of the adjacent masses for the first section will be

$$F(\varphi_2 - \varphi_1) = c'_1(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1),$$

where the functions $\varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1)$ are determined uniquely by the given characteristic of the non-linear coupling and c'_1 is a constant. For the second section the elastic moment will be :

$$c_2(\varphi_3 - \varphi_2).$$

We also assume internal friction to exist in the second section of the shaft. This friction will be taken to be proportional to the velocity (with the coefficient of proportionality α). Hence, the equations of torsional oscillations of the system under examination will be

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2 - \varphi_1) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= M + \alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= -\alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2). \end{aligned} \right\} \quad (22.36)$$

Introducing the notation $\varphi_2 - \varphi_1 = q_1, \varphi_3 - \varphi_2 = q_2$, the equations (22.36) may be reduced to the following system of two equations of the second order (one degree of freedom, that of rotation, being excluded from consideration) :

$$\left. \begin{aligned} I_2 \ddot{q}_1 + c'_1 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) q_1 - c_2 q_2 &= - \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) \varepsilon f(q_1) + \alpha \dot{q}_2 + \\ &\quad + E \sin 0 \\ I_2 \ddot{q}_2 - c'_1 q_1 + c_2 \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right) q_2 &= \varepsilon f(q_1) - \alpha \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right) \dot{q}_2 - \\ &\quad - E \sin 0 \end{aligned} \right\} \quad (22.37)$$

We assume that the degree of non-linearity, the coefficient of friction and the amplitude of the external moment are small, and also that the conditions described in 21 are fulfilled for the system of equations (22.37).

We also assume that the frequency ν of the external sinusoidal force is nearly equal to the first natural frequency ω_1 . In this case, oscillations corresponding to the first normal oscillation with a frequency nearly equal to ω_1 will be excited naturally in the system, while an oscillation with the frequency ω_2 which passes beyond resonance will get damped by friction.

Hence, according to (22.28), the particular solution of the system of equations (22.37) corresponding to a monofrequency state (approximating to the first normal oscillations) will be

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \varphi_1^{(1)} a \cos(\theta + \theta), \\ q_2 &= \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta + \theta), \end{aligned} \right\} \quad (22.38)$$

where $\varphi_1^{(1)}$ and $\varphi_2^{(1)}$ are fundamental functions that are non-trivial solutions of the system of homogeneous algebraic equations

$$\left. \begin{aligned} \left[c'_1 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) - \omega_1^2 I_2 \right] \varphi_1^{(1)} - c_2 \varphi_2^{(1)} &= 0, \\ -c'_1 \varphi_1^{(1)} + \left[c_2 \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right) - \omega_1^2 I_2 \right] \varphi_2^{(1)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (22.39)$$

ω_1 is the root of the characteristic equation of the "unperturbed" system

$$\begin{aligned} c'_1 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) - \omega^2 I_2 - c_2 \\ - c'_1 - c_2 \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right) - \omega^2 I_2 \end{aligned} \quad (22.40)$$

=0,

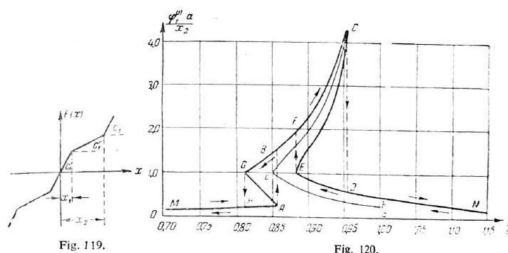
EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCES ON MONOFREQUENCY OSCILLATIONS

which a and θ must be determined either from the equations of the first approximation or, for the stationary state, from the formulae of the type (22.33) and (22.34). We shall now construct these latter equations utilising the scheme given on pages 361-2.

We obtain:

$$\begin{aligned}
m_1 &= I_2 \left(\rho_1^{(1)^2} + \varphi_2^{(1)^2} \right) \\
\delta_c^{(1)}(a) &= \frac{\alpha}{m_1} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} + 1 \right) \varphi_2^{(1)^2} - \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)} \right] \\
&= \left[\varphi_2^{(1)}(a) = \omega_1 - \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right) \varphi_1^{(1)} \right] \\
&\quad 2\pi m_1 \omega_1 a \\
&\quad \times \int_0^{2-} f \left(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi \right) \cos \psi d\psi \\
E^{(1)} &= E \left(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)} \right)
\end{aligned} \tag{22.41}$$

Putting these expressions into the formula (22.39), we obtain a relation with the help of which we can easily construct the resonance curve.



Thus, for instance, when the characteristic of a non-linear elastic coupling force has a form represented in Fig. 119, the resonance curve will be of the form shown in Fig. 120.

10.5.4 23. Analysis of Monofrequency Oscillations in Non-linear Systems with Several Degrees of Freedom When There Are Slowly Varying Parameters

As we have mentioned before, in many actual problems of the vibrator technique (vibration engineering) we come across oscillating systems with several degrees of freedom in which a number of parameters (the effective, natural and external frequency, the amplitude of compelling forces, etc.) undergo slow changes, slow in the sense discussed above, i.e. slow in comparison with the period of the natural oscillation.

In the present section we shall discuss the construction of asymptotic expansions in the differential equations describing oscillations in such systems, assuming that a monofrequency oscillation process takes place in the system.

As in the preceding sections, this system of differential equations will be examined in a form that arises when the unperturbed system corresponds to the usual scheme of the theory of small oscillations.

Thus, we shall examine an oscillating system with N degrees of freedom, the kinetic and potential energy of which may be written in the form :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) q_r q_s, \quad (23.1)$$

where $q_1, q_2, \dots, q_N$ are generalised coordinates, $\tau = \varepsilon t$ is the slowing time, ε , as usual, is a small positive parameter, $a_{rs}(-) = a_{rr}(\tau)$, $c_{rs}(\tau) = c_{sr}(-)$ ($s, r = 1 \dots, N$) are certain functions of the slowing time τ , having derivatives of all orders for all finite values of τ .

We also assume that in the finite interval $0 \leq t \leq T$, where $T = \frac{L}{\varepsilon}$, L can be made as large as desired for any small value of ε . The quadratic expressions T and V are taken to be positive definite.

Let the oscillating system under investigation be acted upon by a small perturbation that is determined by the generalised forces $Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)_*$

$$+ \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (23.2)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

which are periodic in θ with a period 2π . These can be expanded in a finite Fourier sum with coefficients which are certain polynomials in q_s and $\dot{q}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$). Moreover, we shall assume that $\frac{d\varphi}{dt} = \nu(-)$ and the functions $v(\tau), Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \tau)$ ($r = 1, 2, \dots, N$) are unlimitedly differentiable with respect to $\cdot$ in the interval $0 \leq \tau \leq L$.

Hence, according to the well-known principles of mechanics we proceed on to examine the system of N non-linear differential equations of the second order :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \quad (23.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

We shall examine simultaneously with (23.3) the system of linear differential equations of the second order with constant coefficients:

$$\sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (23.4)$$

For obtaining these it is necessary to put $\varepsilon = 0$ in (23.3) and to regard τ not as εt , but as a certain constant parameter.

Here the auxiliary system (23.4) plays the same role as does the system (23.3), and in future we shall call it the system of differential equations of the unperturbed motion or simply, the unperturbed system of equations.

As in 21, it is possible to construct, with the help of the usual methods, solutions of the equations (23.4), the solutions that correspond to normal oscillations :

$$q_s^{(k)} = \varphi_s^{(k)}(\tau) a \cos(\omega_k(\tau)t + \alpha_k) \quad (s, k = 1, 2, \dots, N), \quad (23.5)$$

in which $\omega_k(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) are natural frequencies determined by the equation

$$D \parallel -a_{rs}(\tau) \omega^2 + c_{rs}(\tau) \parallel = 0 \quad (23.6)$$

and $\varphi_s^{(k)}(\tau)$ ($s, k = 1, 2, \dots, N$) are normal functions which are non-trivial solutions of the system of homogeneous algebraic equations

$$\sum_{s=1}^N \{ -a_{rs}(\tau) \omega_k^2(\tau) + c_{rs}(\tau) \} \varphi_s^{(k)}(\tau) = 0 \quad (23.7)$$

$$(r, k = 1, 2, \dots, N)$$

and possess the property of orthogonality :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_s^{(k)}(\tau) \varphi_r^{(l)}(\tau) &= 0, \\ \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) \varphi_s^{(k)}(\tau) \varphi_r^{(l)}(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.8)$$

$$(k \neq l).$$

In all these formulae the quantities $\omega_k(\tau)$ and $\varphi_k^{(k)}(\tau)(s, k = 1, 2, \dots, \dots, N)$ depend on τ as a parameter.

If now we substitute $\tau = st$ in (23.4) and (23.5) the functions (23.5) will only approximately (with an accuracy of the order ε) satisfy the equations (23.4) which represent oscillations with slowly varying frequency and form.

Before we construct the asymptotic solutions of system (23.3), corresponding to the monofrequency oscillation nearly equivalent to (when ε is sufficiently small) one of the normal unperturbed oscillations (23.5), we shall again assume (for the sake of definiteness) the first normal oscillation. We further assume that for all values of the parameter τ in the given interval $0 \leq \tau \leq L$ conditions similar to the ones given in 21 are fulfilled, i.e.

- (1) the damping harmonic oscillations with a frequency $\omega_1(\tau)$, depending only on two arbitrary constants, are possible in the unperturbed system described by the differential equations (23.4),
- (2) the only solution of the system of equations (23.4) corresponding to equilibrium is the trivial solution $q_1 = q_2 \dots = q_N = 0$, and
- (3) the frequency $\omega_1(\tau)$ and none of its overtones $2\omega_1(\tau), 3\omega_1(\tau), \dots, k\omega_1(\tau), \dots$ is equal to the natural frequencies $\omega_2(\tau), \omega_3(\tau), \dots, \omega_N(\tau)$ of the unperturbed system.

Under these assumptions it is natural to search for the solution of the perturbed equations (23.3) in the case $p = q = 1$ according to the methodology of the previous sections and the results obtained in 314 for a system with one degree of freedom, i.e. a solution corresponding to the fundamental resonance (resonance with natural frequency $\omega_1(=)$) in the form of the asymptotic series*) :

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)a \cos(\theta + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, 0 + \theta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, 0 - \theta) - \dots **,$$

$$(s = 1, 2, \dots, N), \quad (23.9)$$

In this series $\tau := \varepsilon t$, the functions $u_s^{(1)}(-, a, 0, 0 \div \vartheta), u_n^{(2)}(-, a, 9, 9 \div \vartheta), \dots, \dots, (s = 1, 2, \dots, N)$ are periodic in θ and $\theta + \theta$ with period 2π , while the quantities a and θ are functions of time which are to be determined from the system of differential equations :

$$\left. \begin{aligned} da &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \theta) + \dots, \\ dt & \\ d\vartheta &= \omega_1(\tau) - v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

where $\omega_1(\tau)$ is the smallest root of the equation (23.6); $\varphi_s^{(1)}(\tau)(s = 1, 2, \dots, \dots, N)$ are non-trivial solutions of the algebraic equations (23.7).

As usual, in order to solve our problem it is necessary to derive such expressions for the functions

$$u_x^{(1)}(\tau, a, 0, 0 + \vartheta), \quad u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, 0 + \vartheta), \dots \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (23.11)$$

and

$$A_1(\tau, a, \vartheta), A_2(\tau, a, \vartheta), \dots, B_1(\tau, a, \vartheta), B_2(\tau, a, \vartheta), \dots, \quad (23.12)$$

that the asymptotic series (23.9), after the functions of time determined by the equations (23.10) are substituted for a and θ become the solution of (23.3).

Functions (23.11) and (23.12) may be derived by applying the same procedure which has been discussed in the previous sections, i.e. by using the formal rules obtained in 20 and drawing an analogy with

*) As we have already indicated all the arguments may without essential changes be extended to the general case $\omega_1(\tau) \approx \frac{p}{q}v(\tau)$ where p and q are mutually prime integers.

**) In future the upper index of q_s will be taken to mean that we are examining oscillations

that are close to the first normal oscillation,

the results obtained for a system with one degree of freedom. However, while applying the principle of harmonic balance in the given case we have to remember that the parameters here are not constant but depend on $\tau = \varepsilon t$ and hence, we should always remember that for differentiation $\tau = st$ and for integration τ is a constant parameter. We shall now show the detailed calculations.

Differentiating the series (23.9) under the assumption that a and θ must satisfy equations (23.10), we obtain expressions for $q_s, q_s(s = 1, 2, \dots, N)$. We now substitute the expressions thus obtained in the system of equations (23.3) and expand the right-hand-sides of the equations as power series in ε . After this, we equate the coefficients of like powers of ε and thus obtain a series of systems of equations:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[\omega_1^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \psi^2} + 2v(\tau) \omega_1(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta} + v^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta^2} \right] + c_{rs}(\tau) u_s^{(1)} \right\} = G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \quad (23.13)$$

$(r = 1, 2, \dots, N)$

$$\sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[\omega_1^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \psi^2} + 2v(\tau) \omega_1(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \theta \partial \psi} + v^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \theta^2} \right] + c_{rs}(\tau) u_s^{(2)} \right\} = G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) \quad (23.14)$$

$(r = 1, 2, \dots, N)$

in which

$$G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) -$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[\varphi_s^{(1)}(\tau) (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) a B_1 \right] \cos \psi - \right. \\ & \quad \left. - a_{rs}(\tau) \left[\varphi_s^{(1)}(\tau) a (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) A_1 \right] \sin \psi - \right. \\ & \quad \left. - \left[2\omega_1(\tau) \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a_{rs}(\tau) + \frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau} \varphi_s'(\tau) a_{rs}(\tau) + \omega_1(\tau) \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \right] a \sin \psi \right\}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

$$\begin{aligned}
G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) = & \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) - \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rx}(\tau) \left[\rho_1^{(1)}(\tau) (\omega_1(\tau) - \gamma(\tau))_{\partial\theta}^{iA_2} - \right. \right. \\
& - 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) a B_2 + \varphi_s^{(1)}(-) \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \varphi_s^{(1)}(-) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - \xi_s^{(1)}(-) \frac{\partial A_1}{\partial -} \\
& - \varphi_s^{(1)}(\tau) a B_1^2 \Big] \cos \psi - a_{rs}(\tau) \left[\varphi_s^{(1)}(\tau) (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) a_{\partial_z}^{\partial B_2} - \right. \\
& + 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) A_2 + 2\tilde{p}_s^{(1)}(-) A_1 B_1 + \dot{p}_s^{(1)}(\tau) a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \xi_s^{(1)}(-) a B_i^{\Sigma B_1} B_1 + \\
& + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{\partial B_1}{\partial \tau} \Big] \sin \psi + \left[a_{rs}(\tau) \frac{d^2 \varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau^2} a + \frac{d\rho_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} a - \right. \\
& - \left. \left. + \rho_s^{(s)}(-) \frac{da_{rs}(-)}{d-} A_1 \right] \cos - - \right. \\
& \left. - \left[2 \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a_{rn}(\tau) B_1 + \rho_*^{(1)}(\tau) \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} B_1 \right] a \sin \psi \right\}, \tag{23.16}
\end{aligned}$$

where, we have denoted

$$\begin{aligned} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) &= Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_{10}, \dots, q_{N_0}, q_{10}, \dots, q_{N'_0}), \\ \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) &= Q_{r0}^{(2)}(\tau, \theta, q_{10}, \dots, q_{N_0}, \dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{N_0}) \div \sum_{s=1}^N \left[\frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial q_s} u_s^{(1)} + \right. \\ &+ \frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} \left(\frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a \cos \psi + \varphi_s^{(1)}(\tau) \cos \psi A_1 - \varphi_s^{(1)}(\tau) a \sin \psi B_1 \right) \div \\ &+ \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} v(\tau) + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1(\tau) \Big] - \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \tau \partial \psi} \omega_1(\tau) + \right. \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \tau \partial \theta} v(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a \partial \theta} v(-) A_1 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta \partial \psi} v(\tau) B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \psi^2} \omega_1(\tau) B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a \partial \psi} \omega_1(\tau) A_1 \div \\ &+ \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial a} (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} \frac{dv(\tau)}{\partial \theta} + \\ &\left. \left. + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \frac{d\omega_1(-)}{d\tau} \right] + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} v(\tau) + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1(\tau) \right\} \\ (r &= 1, 2, \dots, N), \\ \psi &= \theta + \theta, q_{s0} = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos \psi, \quad q_{s0} = -\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) a \sin \psi \\ (s &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

We now determine $u_s^{(1)}(\tau, a, 0, \psi)(s = 1, 2, \dots, N)$ from the equations (23.13). For this purpose, we have to expand the right-handsides of the equations (23.13), which are periodic functions of θ and ψ , in Fourier series :

$$G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n,m} g_{n,m}^{(r,1)}(\tau, a) e^{i(n\theta + m\psi)} \quad (23.17)$$

where

$$g_{n,m}^{(r,1)}(\tau, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{r0}^{(1)}(\tau, a, 0, \psi) e^{-i(n_0+m'_\psi)} d\theta d\psi \quad (23.18)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

The unknown functions $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) can naturally be represented in the form of the series:

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n,m} k_{n,m}^{(s)}(\tau, a) e^{i(n_0+m_\psi)} \quad (23.19)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

Putting the values of $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) and $G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($r = 1, 2, \dots, N$) (while substituting we take τ as a parameter) into (23.13) and equating the coefficients of equal harmonics we obtain for determining the coefficients $k_{n,m}^{(s)}(\tau, a)$ the system of algebraic equations :

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs}(\tau) [-\omega_1^2(\tau)m^2 - 2v(\tau)\omega_1(\tau)mn - v^2(\tau)n^2] + c_{rs}(\tau)\} k_{n,m}^{(s)}(\tau, a) =:$$

$$= g_{n,m}^{(r,1)}(\tau, a) \quad (23.20)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

Solving these equations by introducing normal coordinates, as was done in the previous section, we get

$$k_{n,m}^{(s)}(\tau, a) = \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(s)}(\tau) \frac{\sum_{r=1}^N g_{n,m}^{(r,1)}(\tau, a) \varphi_r^{(j)}(\tau)}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau)m + v(\tau)n)^2]} \quad (23.21)$$

thus, $u_s^{(1)}(\tau, a, 0, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) for we obtain the following

expressions

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n,m} \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(f)}(\tau)^{r=1} \sum_{n,m} g_{(\tau)}^{(\tau)} [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau)m + v(\tau)n)^2]^{(\tau)} e^{i(n_j+m_j)} \quad (23.22)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N)$$

In order that $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) be finite, it is necessary that for any value of τ in the interval $0 \leq \tau \leq L$ the denominators in the right-hand-sides of (23.22) do not become zero. However. the denominators may become zero for those values of n and m for which the equations

$$m\omega_1(\tau) + nv(\tau) = \pm\omega_1(\tau) \quad (23.23)$$

or

$$n + m \pm 1 = 0 \quad (23.24)$$

are satisfied, because for the case of fundamental resonance $\omega_i(-) = \nu(-)$ for some value of τ ($0 \leq \tau \leq L$).

Hence the conditions of finiteness for $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) take the form :

$$\sum_{\substack{r=1 \\ \langle n+m \pm 1=0 \rangle}}^N g_m^{(\tau,1)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{i(n\theta+m'\varphi)} = 0 \quad (23.25)$$

Taking into consideration (23.18), (23.22) and (23.25) we obtain, after a series of transformations, the "regularised" expression for $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) :

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n,m}^N \varphi_s^{(j)}(\tau) \times \\ & \left(\begin{array}{c} nq + p(m \neq 1) \neq 0 \\ \text{and } j = 1 \end{array} \right) \\ & \times \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a\theta, \psi) \varphi_r^{(j)}(\tau) e^{-i(n_0+m\psi)} d\theta d\psi}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau)m + v(\tau)n)^2]} - e^{i(n_0+m\psi)} - \\ & - 2\omega_1(\tau)a \sum_{j=2}^N \sum_{r=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_r} \\ m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - \omega_1^2(\tau)] \\ (s = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right] \end{aligned}$$

in which

$$m_j(\tau) = \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_r^{(j)}(\tau) \varphi_s^{(j)}(\tau) = 2T [\varphi^{(j)}(\tau)]$$

and hence,

$$\left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_r} \right]_{\dot{q}_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)} = \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_s^{(1)}(\tau) \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

The formulation of a rule for constructing regularised expressions for $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) does not present any difficulty if we proceed directly from the expressions for the perturbing forces and for the kinetic and potential energy.

We note that the sum $\sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, 0, \psi) \varphi_r^{(\rho)}(\tau)$ represents a generalised force acting upon the j -th normal coordinate. The expression $\sum_{r=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_r} \right]_{\dot{q}_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)} \varphi_r^{(j)}(\tau)$ may also be interpreted as a generalised force acting upon the j -th normal coordinate. The presence of this additional force is explained by the appearance of the "force" $\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_r} \right]_{\dot{q}_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)}$ (as a result of the relation between the inertial coefficients a_{ij} and the slowing time τ).

Thus, for obtaining functions $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) it is necessary to put the lowest order approximations $q_s, \dot{q}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) into the functions $Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ ($r = 1, 2, \dots, N$) and then calculate the (n, m) -th term is the Fourier series for the generalised force acting upon the j -th normal coordinate.

Further, it is also necessary to calculate the derivative of the kinetic energy with respect to the velocity, replace $\dot{q}_s$ by $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ ($s = 1, 2, \dots, N$), in this derivative and thereafter put the expression thus obtained into the formula (23.26). The quantities $m_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, N$)

represent the 'ghost' form of the kinetic energy in which the velocities $\dot{q}_s (s = 1, 2, \dots, N)$ are replaced by the "normal" functions $\varphi_s^{(j)}(\tau) (s, j = 1, 2, \dots, N)$.

We now proceed to determine the functions $A_1(-, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$ which, as usual, are determined in such a way that the conditions of finiteness, (23.25), are fulfilled. Introducing the notation $n = -\sigma, m \pm 1 = \sigma$, we represent the condition (23.25) in the form :

$$\sum_{r=1}^N g_{-\sigma p, \sigma q \pm 1}^{(r,1)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e \pm \varphi_1 + i\sigma q \theta = 0 \quad (23.27)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty)$$

Putting into this the values of $g_{-\sigma, \sigma \pm 1}^{(r,1)}(-, a)$ according to (23.18) and equating the coefficients of equal harmonics we obtain a system of equations for $A_1(\tau, a, \vartheta)$ and $B_1(\tau, a, \vartheta)$ similar to the system (19.8) :

$$\begin{aligned} & (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega_1(\tau)B_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{-i\sigma\theta'} \cos \varphi' d\theta d\zeta \\ & (\omega_1(\tau) - v(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega_1(\tau)A_1 = \\ & = -\frac{a}{m_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau)\omega_1(\tau))}{d\tau} \\ & - \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{-i\sigma\vartheta'} \sin \psi' d\theta d\psi \\ & (\theta' = \psi - \theta) \end{aligned} \quad (23.28)$$

After we have derived the expressions for $u_s^{(1)}(-, a, \theta, \quad)(s = 1, 2, \dots, N)$, $A_1(\tau, a, \theta)$ and $B_1(\tau, a, \theta)$, the right-hand-sides of the equations (23.14) become known. From these we may derive functions $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) (s = 1, 2, \dots, N)$, and from the conditions of finiteness

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (n+m \pm 1=0)}}^N g_{n,m}^{(r,2)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{i(n_0+m\zeta)} = 0 \quad (23.29)$$

we obtain $A_2(\tau, a, \theta)$ and $B_2(\tau, a, \theta)$. After a series of calculations we obtain the following system of equations for determining $A_2(\tau, a, \theta)$ and $B_2(\tau, a, \vartheta)$:

$$\begin{aligned}
 & (\omega_1(-) - r(\tau)) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a(\omega)(\tau)B_2 = - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{dm_1(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m_1(\tau)} - \frac{\gamma(\tau)a}{m_1(\tau)} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi - m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, 0, \psi) \Phi_r^{(j)}(\tau) e^{-i\sigma\theta'} \\
 & (\omega_1(-) - v(-)) a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\omega_1(-)A_2 = - \left\{ \begin{array}{l} \cos \psi \\ aB_1 \\ \frac{\partial}{\partial a} \end{array} A_1 + \right. \\
 & \left. + a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1B_1 + \frac{dm_1(\tau)}{d\tau} a \frac{B_1}{m_1(\tau)} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma} \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, 0, \psi) e^{-i\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi,
 \end{aligned} \tag{23.30}$$

in which we have introduced the notation:

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_i = \varphi_i^{(1)}(\tau)} \varphi_j^{(1)}(\tau) \tag{23.31}$$

After the functions $u_s^{(1)}(\tau, a, 0, \psi)(s = 1, 2, \dots, N)$, $A_1(\tau, a, \theta)$, $A_2(\tau, a, \theta)$, $B_1(\tau, a, \theta)$, $B_2(\tau, a, \theta)$, have been determined, we can construct the solutions of the equations (23.3) corresponding to the monofrequency state not only in the first but also in the second approximation.

Resuming the exposition we give here a scheme for the construction of the first and second approximations for the particular doubleparameter solutions of the system of equations (23.3) corresponding to the monofrequency state.

We note that when $\tau = \text{const}$, this scheme may also be applied to the results of the previous section in which, for the sake of brevity, we did not discuss the application of this scheme.

Thus, we first single out the unperturbed system (23.4) and test whether in it, for any value of the parameter $\tau(0 \leq \tau \leq L)$, non-damping harmonic natural oscillations with a frequency $\omega_1(\tau)$ depending on two arbitrary constants are possible or not. We also test whether in it nontrivial static solutions and internal resonance are absent or not. Further, we derive the natural frequencies $\omega_k(-)(k = 1, 2, \dots, N)$ of the natural functions $\phi_x^{(1)}(\tau)(s = 1, 2, \dots, N)$, considering, while determining them, that the coefficients of the corresponding algebraic equations depend on just as on some constant parameter.

After this, we choose the expression

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(0 + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N), \tag{23.32}$$

as a first approximation in which a and θ are certain functions of time which have to be determined from the equations of the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1(\tau) - v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta), \end{aligned} \right\} \tag{23.33}$$

in which $A_1(\tau, a, \vartheta)$ and $B_1(\tau, a, \vartheta)$ are particular solutions periodic in ϑ , of the system of equations (23.28).

For the second approximation we take the expression

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)a \cos(\theta + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a \cdot \theta, \theta + \theta) \quad (23.34)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

in which a and θ are to be determined from the equations of the second approximation :

$$da/d\tau d\theta/d\tau = \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \theta), \quad (23.35)$$

where $A_1(\tau, a, \theta)$, $B_1(\tau, a, \theta)$, $A_2(\tau, a, \theta)$, $B_2(\tau, a, \theta)$ are obtained from (23.28) and (23.30) and $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ ($s = 1, 2, \dots, N$) from the formulae (23.26).

Thus, the integration of the equations (23.3) has been reduced by us to an integration of the equations (23.33) and (23.35) which, as we have already pointed out, cannot, in general, be integrated in a closed form and can be integrated only by a numerical method. In §19 we have pointed out the advantages of numerical integration of the equations determining a and ϑ over the numerical integration of the equations of motion directly. In the given case, this advantage increases manifold in view of the fact that during numerical integration we do not examine a system of N equations of the second order but only two equations of the first order.

We now examine some particular cases of the system of non-linear differential equations (23.3) for which the equations of the first approximation assume a particularly simple form.

As a first particular case, we examine "free" monofrequency oscillations of a system with several degrees of freedom and slowly varying parameters, i.e. when the right-hand-sides of the equations (23.3) do not depend on θ and have the following form :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N \varepsilon) \quad (23.36)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

In this case, the specific approximate double-parameter solution, in the first approximation, will be :

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)a \cos \psi (s = 1, 2, \dots, N) \quad (23.37)$$

where a and ψ are to be determined by a system of equations of the first approximation :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\omega_1(\tau)} d(m_1(\tau)\omega_1(\tau)) \\ &\quad - 2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau) \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi \end{aligned} \quad (23.38)$$

We obtained this system of equations directly from the relation (23.28) in which we assume that A_1 and B_1 depend only on a and τ .

analysis of monofrequency oscillations in non-linear systems

We now introduce in analogy with 319 the expression:

$$\begin{aligned}
 &= d(m_1(\tau)\omega_1(\tau)) + \\
 &\lambda_\varepsilon^{(1)}(a, \tau) = \omega_1(\tau) + \frac{\varepsilon}{\pi a \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{ro}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\tau \\
 &\omega_e^{(1)}(a, \tau) = \omega_1(\tau) - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{\pi a m_1(\tau) \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{ro}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi
 \end{aligned} \tag{23.39}$$

consequently, the equations of the second approximation may be written in the form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau)a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau), \end{aligned} \right\} \tag{23.40}$$

where $\delta_e^{(1)}(a, \tau) = \lambda_e 2m_1(\tau)$

Thus, the equations of the first approximation for a system of N differential equations (23.36) will be the same as for a system with a single degree of freedom described by the equation :

$$\begin{aligned}
 m_1(\tau) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau)x \right) &= \varepsilon \sum_{r=1}^N Q_{ro}^{(1)} \left(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \dots, \varphi_N^{(1)}x, \varphi_1^{(1)}x, \dots, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \varphi_N^{(1)}x \right) \varphi_r^{(1)}(\tau)
 \end{aligned} \tag{23.41}$$

We now examine the case when the external perturbing force has the form :

$$\begin{aligned}
 Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \\
 &+ \varepsilon E_r(\tau) \sin \theta \quad (r = 1, 2, \dots, N),
 \end{aligned} \tag{23.42}$$

in which $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Here, the system of differential equations (23.3) will be :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s &= \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \\
 &+ \varepsilon E_r(\tau) \sin \theta \quad (r = 1, 2, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{23.43}$$

In the case of fundamental resonance ($p = 1, q = 1$) examined by us, the solution of (23.43) corresponding to the monofrequency oscillation which is nearly equal to one of the normal ones will, in the first approximation, be

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(\theta + \vartheta) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

where the functions of time a and θ must be determined from the system of equations of the first approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -2m_1(\tau)\omega_1(\tau) \frac{d(m_1(\tau)\omega_1(\tau))}{d\tau} - 2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau) \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\psi - \\
 &\quad - \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)(\omega_1(\tau) - \nu(\tau))} \cos \theta \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) - 2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)a \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi + \\
 &\quad + \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)a(\omega_1(\tau) - \nu(\tau))} \sin \theta \end{aligned} \right\} \tag{23.45}$$

These equations, in view of the notation (23.39) introduced before, may be represented in the form :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau)a - m_1(\tau) \frac{E(\tau)}{(\omega_1(\tau) - \nu(\tau))} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau) - \nu(\tau) + m_1(\tau)a (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23.46)$$

in which

$$E(\tau) = \varepsilon \sum_{r=1}^N E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau).$$

ANALYSIS OF MONOFREQUENCY OSCILLATIONS IN NON-LINEAR SYSTEMS

Thus, in order to construct an equation of the first approximation for the system with N degrees of freedom when the monofrequency state is present we must use the rule given in 19 for an oscillating system with a single degree of freedom. This system can be described by the following differential equation with slowly varying coefficients:

$$\begin{aligned} m_1(\tau) \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau)x \right) &= \sum_{r=1}^N Q_r^{(1)} \left(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \dots, \varphi_N^{(1)}x, \varphi_1^{(1)}\dot{x}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots, \varphi_N^{(1)}\dot{x} \right) \varphi_r^{(1)}(-) + E(-) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (23.47)$$

Now, we shall illustrate the method described above by a simple example. We examine, as in 22, the torsional oscillations of a shaft schematically represented in Fig. 118. Here we assume for simplification that all the parameters characterising the given oscillating system are same as in 22, and only the external torsional moment acting upon the mean mass has the form :

$$M = E \sin \theta, \quad (23.48)$$

in which $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Hence, our problem reduces, as in 22, to that of constructing an approximate solution of a system of differential equations :

$$\left. \begin{aligned} I_1 I_2 \ddot{x} + c_1 (I_1 + I_2) x - c_2 I_1 y &= -(I_1 + I_2) f(x) + \alpha I_1 \dot{y} + \\ &\quad + E I_1 \sin \theta \\ I_2 I_3 \ddot{y} - c_1 I_3 x + c_2 (I_2 + I_3) y &= I_3 \varepsilon f(x) - \alpha (I_2 + I_3) \dot{y} - \\ &\quad - I_3 E \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (23.49)$$

in which $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

We assume that the frequency $\nu(\tau)$ of external force, which changes slowly with time, nearly approaches the values of the natural frequency ω_1 . In this case it will be interesting to examine the nonstationary oscillations of a system, corresponding to the excitation of harmonics with a frequency nearly equal to ω_1 .

The approximate solution may be sought for in the form :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1^{(1)} a \cos(0 + \theta), \\ y &= \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta + \theta), \end{aligned} \right\} \quad (23.50)$$

where $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$ are non-trivial solutions of the system of algebraic equations (22.39), ω_1 is the smallest root of the equations (22.40) and a and θ as functions of time, are determined from equations of the first approximation. For forming these equations we can use the rule and the

formulae of §19, for an oscillating system with a single degree of freedom. For this purpose, instead of the system of equations (23.49) we shall examine a single equation of the second order :

$$m_1 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 z \right) = Q \left(z, \frac{dz}{dt} \right) + E_1 \sin \theta \quad (23.51)$$

which is equivalent to these for a monofrequency state. In this we have introduced the notations:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= I_2 \left(\varphi_1^{(1)'} + \varphi_2^{(1)2} \right) \\ E_1 &= E \left(I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)} \right) \\ Q \left(z, \frac{dz}{dt} \right) &= \left[I_3 \varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2) \varphi_1^{(1)} \right] \varepsilon f \left(\varphi_1^{(1)} z \right) + \\ &+ \alpha \left[(I_2 + I_3) \varphi_2^{(1)} - I_1 \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)} \right] \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (23.52)$$

Putting the values of m_1, E_1 and $Q \left(z, \frac{dz}{dt} \right)$ ($z = a \cos \psi$) directly into the formula (19.22), we have :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha}{m_1} \left[(I_2 + I_3) \varphi_2^{(1)2} - I_1 \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)} \right] a - \frac{E \left(I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)} \right)}{m_1 (\omega_1 + \nu(\tau))} \cos \vartheta, \\ dt &= \omega_1 - \nu(\tau) - \frac{\left[I_3 \varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2) \varphi_1^{(1)} \right]}{m_1 \omega_1 a} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f \left(\varphi_1^{(1)} z \right) d\psi \\ &= \omega_1 - \nu(\tau) - \frac{E \left(I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)} \right)}{m_1 a (\omega_1 + \nu(\tau))} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (23.53)$$

Assuming that the non-linearity of the elastic relation is characterised in the same way as in the example of 22, calculating the integral appearing on the right-hand-side of the second equation of the system (23.53) and thereafter integrating (23.53) numerically for different rates of change in the frequency of the external torsional moment $\nu(-)$, we obtain a series of curves, shown in Fig. 121, characterising the changes in the magnitude of a in relation to changes in $\nu(-)$.

Concluding the present Chapter which was devoted to an investigation of monofrequency oscillations in non-linear systems with several degrees of freedom, we note that the method discussed above, may, without any special difficulty, be applied also to an investigation of more complex oscillating system. For instance, it may be applied in order to investigate oscillating systems, with N degrees of freedom, for which the Lagrangian may be written in the form:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \dot{q}_r + 2 \sum_{s,r=1}^N g_{sr}(\tau) q_r \dot{q}_s - \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s q_r \right\}, \quad (23.54)$$

in which, as before, $q_1, q_2, \dots, q_N$ are generalised coordinates, $\tau = zt$, z is a small positive parameter, $a_{rs}(\tau) = a_{sr}(\tau)$, $c_{rs}(\tau) = c_{sr}(\tau)$ and $g_{sr}(\tau)$ ($s, r = 1, 2, \dots, N$) have a sufficient number of derivatives for all finite values of τ .

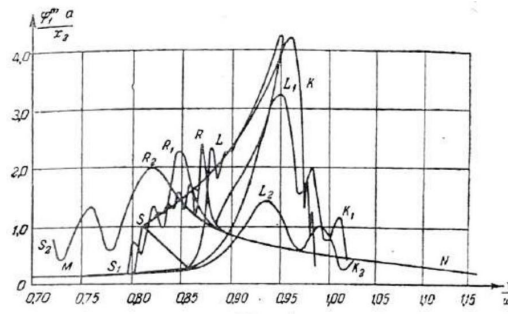


Fig. 121.

(Considering τ as a constant parameter we find that a_{sr}, g_{sr} and $c_{sr}(s, r = 1, 2, \dots, N)$ are constants and, hence, we pass over to a more general case in comparison with those examined in 21 and 22. If

$\tau = \varepsilon t$, the case under examination will be more general also in comparison with the systems examined in the present section).

We shall now assume that the total energy of the oscillating system under examination

$$H = \sum_{s=1}^N \dot{q}_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} - \mathcal{L} \quad (23.55)$$

is a definite positive quadratic form, for any value of τ in the interval $0 \leq \tau \leq L$, and that the system itself is under the influence of external perturbing forces of the type (23.2). Hence, we pass over to an investigation of the following system of non-linear differential equation with slowly varying coefficients :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{sr}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N b_{sr}(\tau) \dot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{sr}(\tau) q_s = \\ = Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) - \varepsilon \sum_{s=1}^N \frac{dg_{rs}(\tau)}{d\tau} q_s \end{aligned} \quad (23.56)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

in which $b_{sr}(\tau) = g_{sr}(\tau) - g_{rs}(\tau)$ and, hence,

$$b_{sr}(\tau) = -b_{rs}(\tau) \quad (s, r = 1, 2, \dots, N)$$

We also assume that for the system (23.56) all conditions mentioned in page 368 are fulfilled. For constructing approximate asymptotic solutions of the system of equations (23.56) which depend on two arbitrary constants and correspond to a monofrequency state, we may either use the general method elaborated in 20 with proper corrections (as was done in the beginning of 23) or else the results of §23 directly.

For applying the results of §20 it is necessary to reduce the system of N equations of the second order (23.56) to a system of $2N$ equations of the first order. For this purpose, we introduce, as usual, new variables by the formulac :

$$q_{N+s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (23.57)$$

or, in an expanded form :

$$q_{N+s} = \sum_{r=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_r + \sum_{r=1}^N g_{rs}(\tau) q_r \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (23.58)$$

Using the notation (23.57) we have :

$$H = \sum \dot{q}_s q_{N+s} - \mathcal{L} \quad (23.59)$$

After this, the system of equations (23.3) may be replaced, according to the well-known principles of mechanics, by a system of $2N$ equations :

$$dq_s = \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_{N+s}}, \quad dq_{N+s} \quad dt = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_s} + \hat{Q}_s \quad (23.60)$$

in which $\hat{H}$ and $\hat{Q}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) are the so-called allied expressions to the functions H (23.55) and Q_3 ($s = 1, 2, \dots, N$) (23.2), that are obtained after replacing, in the latter equations, the values of the velocities $\dot{q}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) as expressed by the system (23.58) by the values q_r ($r = 1, 2, \dots, N$).

Putting $\dot{q}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) into the expression (23.59) we get:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{s,r=1}^N \alpha_{sr}(\tau) q_s q_r + \sum_{s,r=1}^N \gamma_{sr}(\tau) q_s q_{N+r} + \frac{1}{2} \sum_{s,r=1}^N \beta_{sr}(\tau) q_{N-s} q_{N-r}, \quad (23.61)$$

when $\alpha_{sr}(\tau) = \alpha_{rs}(\tau)$, $\beta_{sr}(\tau) = \beta_{rs}(\tau)$ and $\gamma_{sr}(\tau)$ ($s, r = 1, 2, \dots, N$) have a sufficient number of derivatives in the interval $0 \leq \tau \leq L$.

After this the system of equations (23.60) may be written in an explicit form as follows :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^N \alpha_{sr}(\tau) q_s + \sum_{r=1}^N \left[\gamma_{sr}(\tau) q_{N+r} + \frac{dq_{N+s}}{dt} \right] &= \hat{Q}_s \\ \sum_{r=1}^N \left[\gamma_{rs}(\tau) q_r - \frac{dq_s}{dt} \right] + \sum_{r=1}^N \beta_{sr}(\tau) q_{N+s} &= 0 \\ (s = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (23.62)$$

The system of equations (23.62) has the same form as the system of equations (20.1) examined in 20, and hence we can construct the asymptotic solutions by using the results of §20 (of course, taking into account that in the present case the coefficient of the equations as well as the right-hand-sides depend on the slowing time τ).

It is not possible to reduce the system of equations (23.56) to a system of $2N$ equations of the first order. We can, however, directly construct asymptotic solutions for these, generalising to some extent the results obtained in 20 and 23.

We must examine in this case the following equation

$$\sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \ddot{q}_{sr} + \sum_{\substack{s=1 \\ (r=1)}}^N b_{rs}(\tau) \dot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{sr}(\tau) q_s = 0 \quad (23.63)$$

instead of the auxiliary ones (23.4).

The solution of the system of equations (23.56), corresponding to a monofrequency state may be sought for in the form of the series

$$q_s = u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) + \dots \quad (23.64)$$

($s = 1, 2, \dots, N$),

in which

$$u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) = \varphi_s^{(1)}(\tau) a e^{i\psi} + \varphi_s^{*(1)}(\tau) a e^{-i\psi} \left(\psi = \frac{p}{q} \nu(\tau) + \vartheta \right) \\ (s = 1, 2, \dots, N),$$

where $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ are fundamental functions which are non-trivial solutions of the system of homogeneous algebraic equations :

$$\sum_{r=1}^N \{ -a_{sr}(\tau) \omega_1^2(\tau) + i b_{sr}(\tau) \omega_1(\tau) + c_{sr}(\tau) \} \varphi_r^{(1)}(\tau) = 0 \quad (23.65) \\ (s = 1, 2, \dots, N),$$

$\varphi_s^{*(1)}(\tau)$ are conjugate to $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ ($s = 1, 2, \dots, N$), while $\omega_1(\tau)$ is determined from the equation :

$$D \left\| -a_{sr}(\tau) \omega^2 + i b_{rs}(\tau) \omega + c_{sr}(\tau) \right\| = 0. \quad (23.66)$$

In order to construct the equations determining the quantities a and θ and having the same form as equations (23.10), we proceed as usual, i.e. we first derive the "regularised" expressions for $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ ($s = 1, 2, \dots, N$), and then we obtain $A_1(\tau, a, \vartheta)$ and $B_1(\tau, a, \vartheta)$ etc., from the conditions of finiteness which, in our case, will be of the same form as the conditions (23.25).

10.6 5 The Method of Averaging

10.6.1 24. Equations of the First and Higher Order Approximations in the Method of Averaging

In the beginning of this book we discussed, briefly, the reduction of a non-linear differential equation containing a small parameter to a standard form and the construction of an approximate solution according to the principle of averaging. We shall now discuss this question in greater detail.

As we know, the form of the non-linear differential equations containing a small parameter and the nature of the appearance of this parameter in them, may be extremely diverse. However, in many cases the differential equations of oscillations may be reduced, through simple changes in the variables, to a general form in which the right-hand-side is proportional to the small parameter. This form of differential equations will be conventionally called, the standard form.

The reduction of the differential equations to the standard form, followed by the application of the principle of averaging, is an effective method, particularly, for investigating non-linear oscillating systems with several degrees of freedom. Thus, for instance, when a non-linear oscillating system with N degrees of freedom is characterised by the following expressions of kinetic and potential energy:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N b_{kj} q_k q_j, \quad (24.1)$$

where $q_1, q_2, \dots, q_N$ are generalised coordinates, a_{kj}, b_{kj} constants, and besides this, the quadratic forms T and V are definitely positive. With the help of the linear transformation :

$$q_j = \sum_{k=1}^N \varphi_{jk} x_k. \quad (24.2)$$

we can introduce normal coordinates $x_1, x_2, \dots, x_N$, for which

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2, \quad V = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 x_k^2, \quad (24.3)$$

and the Lagrangian equation for unperturbed motion takes the form

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (24.4)$$

We now assume that our system is acted upon by a small perturbation of the form :

$$\varepsilon Q_k = \varepsilon \left\{ Q_k^{(6)}(q_k, \dot{q}_k) + \sum_a \left[Q_{k_1}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k) \cos \Omega_a t + Q_{k_2}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k) \sin \Omega_a t \right] \right\}, \quad (24.5)$$

in which Ω_x are the frequencies of the perturbing forces and ε is a small parameter.

Hence, passing over to the normal coordinates in (24.5) we obtain the following system of non-linear differential equations:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon X_k(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24.6)$$

in which εX_k are determined from the conditions of equivalence of work according to the formula

$$X_k = \sum_{j=1}^N Q_j \varphi_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (24.7)$$

Equation (24.6) may be reduced to the standard form through the change of variables

$$\begin{aligned} x_k &= z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \\ \dot{x}_k &= i\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \end{aligned} \quad (24.9)$$

in which z_k and z_{-k} are unknown complex conjugate functions of time.

Now, differentiating (24.8) and comparing with (24.9), we have:

$$\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = 0. \quad (24.10)$$

Differentiating (24.9) and substituting in (24.6), we obtain

$$i\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t} = \varepsilon X_k. \quad (24.11)$$

equations of the first and higher order approximations

Assuming for the sake of brevity

$$-\omega_{-k} = \omega_k, \quad X_{-k} = X_k, \quad (24.12)$$

we can represent (24.6) in the form:

$$\frac{dz_g}{dt} = \varepsilon Z_g(t, z_k) \quad \left(\begin{array}{l} g = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \\ k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{array} \right). \quad (24.13)$$

Equations describing oscillating systems acted upon by forces of high frequency and of other kinds, may also be reduced to equations of the type (24.13).

Thus, we shall discuss the derivation of a formal method of construction of approximate solutions for equations in the standard form :

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (24.14)$$

in which ε is a small parameter and X_k may be represented by the sum

$$X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_y e^{i\nu t} X_{k'}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (24.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

in which ν are constant frequencies.

It is necessary to note that the equations (24.14) are to be examined exclusively in the real domain and the complex form of the representation of sinusoidal oscillations applied in (24.15) is introduced only for the sake of simplicity in notations.

Often while examining higher approximations, it would be expedient to take into consideration terms of higher orders relative to ε in the differential equations. Here we obtain for example :

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 Y_k(t, x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (24.16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

in which Y_k is a function of the same form as X_k . Even this type of an equation will be called the standard one. While applying the theory of perturbations no essential changes are called for here.

Before we begin the exposition of this theory we introduce a number of abbreviated notations. Thus, the aggregate of n quantities $x_1, x_2, \dots, x_n$, will be conventionally denoted by a single letter x . Hence the equations (24.14) will be written in the form :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (24.17)$$

in which

$$X(t, x) = \sum_v e^{i\nu t} X_v(x). \quad (24.18)$$

The formulae for the differentiation of a complex function

$$dF_k(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_q} dx_q \quad (24.19)$$

will now be written as

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(dx \quad \frac{\partial}{\partial t} \right) F, \quad (24.20)$$

where, in this way $\frac{\partial F}{\partial x}$ will be treated as a matrix

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_\eta},$$

applied to the vector $\frac{dx}{dt}$ and $\left(\frac{dx}{dt} \quad \frac{\partial}{\partial x} \right)$ as a scalar operator

$$\sum_{q=1}^n dx_q \frac{\partial}{\partial x_q}. \quad (24.21)$$

Obviously the application of the above matrix-vector system of notations does not call for special explanations and possesses considerable advantages as regards brevity.

Further, let $F(t, x)$ be a sum of the form

$$F(t, x) = \sum_v e^{ivt} F_v(x). \quad (24.22)$$

By introducing the notations

$$\left. \begin{aligned} M_t \{F(t, x)\} &= F_0(x) \\ \tilde{F}(t, x) &= \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} F_v(x) \\ \tilde{\tilde{F}}(t, x) &= \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{(iv)^2} F_v(x) \end{aligned} \right\} \quad (24.23)$$

we obtain the identity:

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}}{\partial t} = \tilde{F}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = E - M_t \{F\}. \quad (24.24)$$

The operator $\sim$ will be called the integrating operator and the operator M the operator of averaging for constant values of x or the operator of averaging in respect of time contained explicitly.

We now examine a system of differential equations (24.17) in which ε is a small parameter and the expressions X can be represented, as functions of time t , by the sums (24.18).

We know that the form of approximate solution may be derived or, better say, be guessed with the help of purely intuitive considerations like the following. Because the first derivatives $\frac{dx}{dt}$ are proportional to the small parameter, it is natural to consider x as a slowly varying quantity. We now represent x as a superposition of a smoothly varying term ξ and the sums of small vibrational terms. Further, in view of the smallness of the latter we put $x = \xi$ in the first approximation. Hence

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi) = \varepsilon \sum_v X_v(\xi) e^{ivt}, \quad (24.25)$$

i.e.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \text{small sinusoidal oscillation terms.} \quad (24.26)$$

Considering that these sinusoidal oscillation terms give rise only to small vibrations of x around ξ and does not exert influence on the systematic change of x , we arrive at the equation of the first approximation in the form :

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\}. \quad (24.27)$$

In order to obtain the second approximation it is necessary that in the expression for x , one should take into account the vibrational terms also. Considering that the term $\varepsilon e^{ivt} X_v(\xi)$ in (24.26) gives rise to an oscillation of the form

$$\frac{\varepsilon e^{ivt}}{iv} X_v(\xi),$$

in x , we arrive at the following approximate expression :

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{v \neq 0} e^{ivt} X_v(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi). \quad (24.28)$$

Putting (24.28) in the equation (24.17), we have

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}), \quad (24.29)$$

i.e.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X})\} + \text{small sinusoidal oscillation terms.}$$

From this, neglecting the influence of sinusoidal oscillation terms on the systematic change of ξ we obtain the equation of the second approximation :

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X})\} = \varepsilon M \left\{ X(t, \xi) + \varepsilon \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} \quad (24.30)$$

and so on.

The arguments given above cannot, however, pretend to be convincing. One can object that while forming the approximate equations (24.27), we left out in equations (24.27) terms of the same order of magnitude as the abandoned term εX_0 .

However, it is not difficult to give it, mathematically, a more solid form. For this we make the change of variables

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.31)$$

in which ξ are regarded as new unknowns, in the equations (24.17).

By differentiating (24.31) we have :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (24.32)$$

In view of the property (24.24) of the integrating operator

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, \tilde{\xi})}{\partial t} = X(t, \tilde{\xi}) - X_0(\tilde{\xi}).$$

Putting (24.31) and (24.32) in the equation (24.17), we obtain

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) - \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon X\{t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)\}$$

or

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi)\}, \quad (24.33)$$

in which 1 is taken to represent the unit matrix.

Multiplying (24.33) on the left by

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1}, \quad (24.34)$$

we find that the new unknowns satisfy equations of the form

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \int_1 \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} X_0(\xi) + \varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi)\}. \quad (24.35)$$

On the other hand, expanding (24.34) into a series in powers of z , we have

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots$$

in which the symbol ε^m , in general, denotes a magnitude of the order ε^m . Hence equations (24.35) yield

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots, \quad (24.36)$$

Or in more detailed form

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi)\} + \varepsilon^3 \dots \\ &= \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (24.37)$$

Thus, if ξ satisfies the equations (24.36), the right-hand-side of which differs from the right-hand-side of the equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (24.38)$$

by a magnitude of the second order, the expression

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) \quad (24.39)$$

represents exact solution of the given equations (24.17).

Hence we can take the expression

$$x = \xi, \quad (24.40)$$

as the first approximation and take ξ to represent the solution of the equations of the first approximation (24.38).

The expression (24.39) in which ξ satisfies these very equations, will be called the improved first approximation.

Putting the improved first approximation in the exact equations (24.17), it is not difficult to find that this approximation satisfies the equation to an accuracy of the second order.

Evidently, for effectively constructing the approximate solution it is necessary to solve at first the equations of the first approximation. The fact that these equations (as also the exact ones) are differential equations, imposes certain restrictions on the possibilities for the application of the method discussed above. However, it should be emphasised that for a very large number of practically interesting cases, equations of the first approximation are found to be enough simple and amenable to investigation. This being so, in many cases, in which the general solution cannot be found, we can at least derive important particular solutions like those corresponding to the steady-state oscillation processes.

Thus, for instance, when $n = 1$ the equations of the first approximation are integrated by quadrature. When $n = 2$ we can use the wellknown theory of Poincaré for their investigation.

For any value n , if $X_0(\xi)$ becomes zero at some point $\xi = \xi_5$, we can examine the "quasi-static" solution, $x = x_0$, of the equations of the first approximation. For investigating stability of this solution we can proceed as usual by forming equations for small deviations (variational equations):

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \delta\xi \quad (24.41)$$

If the real parts of the roots of the characterised equations

$$\text{Det } 1p - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} = 0 \quad (24.42)$$

are negative, the quasi-static solution under examination is found to be stable. Any solution of the equation of first approximation obtained from the initial conditions and sufficiently close to ξ_0 will approximate to the quasi-static solution exponentially, when $t \rightarrow \infty$. However, if the real part of one of the roots of the characteristic equation is positive, we have the unstable case. We can also have a critical case when all the real parts are zero. This case may often be reduced to the previous ones by examining the higher approximations.

As the improved first approximation for the given case of quasistatic solution shows, x can be represented as a sum of a constant term and small sinusoidal oscillations with "external" frequencies. Higher approximations might also reveal the presence of terms with combination frequencies composed of the frequency ν .

These remarks made while examining the approximate solutions may be also valid for the exact solutions of the equations (24.17) on strictly mathematical grounds. Thus, it has been proved in reference [7] that when the real parts of the roots of the characteristic equation (24.42) are not zero we can find, under very general conditions, that exact equations (24.17) possess the almost periodic solution $x = x(t)$ (with frequencies based on ν) lying in the neighbourhood of the point $x = \xi$. This closeness may be made as large as we desire by making ε sufficiently small. The almost periodic solution mentioned above is stable or unstable depending on the sign of the real parts of the roots of the algebraic equation (24.42).

Now, turning to the equation (24.38) we note that according to the definition of the operator of averaging

$$X_0(\xi) = M_t\{X(t, \xi)\}$$

and hence, the equations of the first approximation may be represented in the form :

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t\{X(t, \xi)\} \quad (24.43)$$

Thus, the equations of the first approximation (24.43) are obtained from the exact equations (24.17) by averaging the latter ones over time t , which is contained explicitly in them. While averaging ξ are treated as constants.

This process of replacement of the precise equations by average ones is called the principle of averaging.

As we shall find hereafter, the mathematical exposition of the principle of averaging does not require that $X(t, \xi)$ should be represented by the sum (24.18). It is only necessary that there should exist the average value

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt \quad (24.44)$$

We should note that the principle of averaging has been in use since long in some form or the other for obtaining approximate solutions. For example, this principle has been used in the

method of "secular perturbation" developed by the founders of celestial mechanics. However, the problem of providing a mathematical foundation for this principle has received attention only recently.

We now proceed to construct the second approximation.

We note that during the construction of the first approximation through a change in variables (24.31), the equations (24.17) were transformed into the form

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots$$

For obtaining the second approximation we will undertake a similar change in variables transforming the variable x to the variable ξ satisfying the equations of the form

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (24.45)$$

In order to effect this change of variables by the most natural method (according to our opinion) we obtain the expression

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \quad (24.46)$$

which when ξ satisfies an equation of the type

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) \quad (24.47)$$

would satisfy equation (24.17) to an accuracy of the order of ε^3 . Because when ξ is defined by an equation of the first approximation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

the expression

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

satisfies the equation (24.17) to an accuracy of the order of ε^2 , we shall seek the solution of (24.46) in form

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \quad (24.48)$$

in which F is represented by sums of the form

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_{\mu}(\xi) \quad (24.49)$$

But for (24.48)

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 \dots = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (24.50)$$

On the other hand, when ξ is defined by equation (24.47), we obtain by differentiating (24.48)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} X_0(\xi) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned}$$

whence

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots,$$

because

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Thus the expression (24.50) will be equal to (24.51) to an accuracy of ε^3 provided we choose $P(\xi)$ and $F(t, \xi)$ such that the following relation is satisfied :

$$\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - P(\xi) \quad (24.52)$$

But because we have

$$\tilde{X}(t, \xi) = \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi); \quad X(t, \xi) = \sum_v e^{ivt} X_v(\xi), \quad (24.53)$$

we can write

$$\begin{aligned} \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) &= \sum_{v', v'' (v' \neq 0)} e^{i(v' + v'')t} \frac{1}{iv'} \times \\ &\times \left(X_{v'} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X_{v''}(\xi) - \sum_{v \neq 0} e^{ivt} \frac{\partial X_v(\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi), \end{aligned} \quad (24.54)$$

in which for the sums

$$\sum_{\substack{v', v'' \\ (v' \neq 0)}}^{\mu}$$

the summation is extended to all pairs (v', v'') of frequencies v appearing in the sums (24.53). Hence the expression (24.54) may be represented as a sum of the form

$$\left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) = \sum_{\substack{\mu \\ \langle \mu = v, v' + v'' \rangle}} e^{i\mu t} \Phi_\mu(\xi),$$

and the relation (24.52) will be satisfied if we take

$$\begin{aligned} P(\xi) = \Phi_0(\xi) &= \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) = \\ &= M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} \end{aligned}$$

and

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu \neq 0} \frac{e^{i\mu t}}{i\mu} \Phi_j(\xi) = \overline{\left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi)} - \overline{\tilde{X}(t, \xi) X_0(\xi)}. \quad (24.55)$$

Thus, summing up, we can state, that when ξ is defined by the equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}, \quad (24.56)$$

the expression

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) \quad (24.57)$$

satisfies the equation (24.17) to an accuracy of ε^3 .

We now show that if we regard the expression obtained above (24.57) as a formula for the change of variables transforming the unknown x defined by the exact equation (24.17) to a new unknown $\bar{\xi}$, it will satisfy an equation of the form

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(X \frac{\hat{\tau}}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (24.58)$$

For this purpose, we differentiate (24.57) and use the notations (24.55) for the sake of brevity.

Thus we obtain :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \\ &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (24.59)$$

where 1 denotes the unit matrix.

But according to the very definition of the integrating operator we have :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \tilde{\xi})}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \tilde{\xi})}{\partial t} &= \varepsilon X(t, \tilde{\xi}) - \varepsilon M_t \{X(t, \tilde{\xi})\} + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \right) X(t, \tilde{\xi}) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \partial \tilde{X}(t, \xi) X_0(\xi) - \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \right) X(t, \xi) \right\}, \end{aligned}$$

and hence it follows from (24.59) that

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \varepsilon^2 \partial \tilde{X}(t, \xi) X_0(\xi) - \\ &\quad - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}. \end{aligned}$$

We now note that because of (24.17) this expression must be equal to the following:

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X \left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon^2 F \right) = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots$$

Thus we see, that the variable ξ satisfies the equation

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^{-1} [\varepsilon X_0(\xi) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots]. \end{aligned} \quad (24.60)$$

But evidently

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots,$$

and hence equation (24.60) may be represented in the form

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots,$$

which coincides with (24.58).

Thus if ξ satisfies the equation (24.58), the right-hand-side of which differs from the right-hand-side of equation (24.56) by a magnitude of the order of ε^3 the expression (24.57) represents the exact solution of the equation (24.17).

Thus we have as a second approximation :

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.61)$$

in which ξ is defined by the equation (24.56). Speaking otherwise, we use for this second approximation the form of improved first approximation in which ξ satisfies the equation not of the first but of the second approximation.

equations of the first and higher order approximations

The expression (24.57), in which ξ is defined by the equation (24.56), will be the improved second approximation.

We have already seen that the improved second approximation satisfies the exact equation (24.17) with an accuracy of the order z^3 .

What has been said above is directly generalised also into an equation of the type

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x) \quad (24.62)$$

in which terms of the second order appear.

In this case the equations of the second approximation assume the

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \{Y(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\},$$

and the expression of the second approximation will be

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.64)$$

and, finally, we obtain as an improved second approximation :

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \tilde{Y}(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi). \quad (24.65)$$

We now note that

$$\begin{aligned} M_t \left\{ \varepsilon X(t, \tilde{\xi} + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \tilde{\xi} + \varepsilon \tilde{X}) \right\} &= M_t \left\{ \varepsilon X(t, \tilde{\xi} + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \tilde{\xi}) \right\} + \varepsilon^3 \dots = \\ M_t \left\{ \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^2 Y(t, \tilde{\xi}) \right\} &+ \varepsilon^3 \dots, \end{aligned}$$

and since we do not take into account terms of the order z^3 in the equations of the second approximation we can write (24.63) in the form

$$\frac{d\xi}{dt} = M_t \left\{ \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi') \right\} \quad (24.67)$$

or

$$\frac{d\xi}{dt} = M_t \left\{ \varepsilon X(t, \tilde{\xi} + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \tilde{\xi} + \varepsilon \tilde{X}) \right\} \quad (24.68)$$

Thus, we find that the equation of the second approximation may be directly obtained from the exact equations (24.62), provided in their right-hand-side we put in place of x the form of the improved first approximation (or what is the same thing, the form of the second approximation) and average over the explicit time t , provided further that during this process of averaging the variable ξ is considered to remain constant and terms of the third order are neglected.

The principle of averaging may also be formulated as follows. Equations of the second approximation are obtained by averaging the exact equations (24.62) for explicit time t after putting the improved first approximation in both sides of this equation. In fact, the equations of the second approximation follow from the equation

$$M_t \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = M_t \left\{ \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x) \right\} \quad (24.69)$$

(where $\xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$ stands for x), provided during the process of averaging $d\xi$, the variable ξ is treated as constant and terms of the order ε^3 are neglected. For this purpose it would be sufficient to note that during above-mentioned exposition of the operation M_t , we evidently have

$$\begin{aligned} M_t \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} &= M_t \left\{ \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right\} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon M_t \left\{ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\} \frac{d\xi}{dt} + \\ &\quad + \varepsilon M_t \left\{ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right\} = \frac{d\xi}{dt} \end{aligned}$$

and (24.69) passes over into (24.68).

In conclusion, we shall make certain remarks regarding the formation of higher approximations.

Let the general equation in the standard form be represented as

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 X_1(t, x) + \dots + \varepsilon^n X_{n-1}(t, x), \quad (24.70)$$

where $X_k(t, x)$ are certain trigonometrical sums of the type $X(t, x)$.

Hence in order to form the m -th approximation we shall examine the expression

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi), \quad (24.71)$$

in which $F_k(t, \xi)$ are sums of the form:

$$\sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu l} F_{kjl}(\xi)$$

and the variable ξ will be a solution of the equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi). \quad ((24.72,))$$

Putting (24.71) into (24.70) and equating coefficients like powers of ε upto the m -th order inclusive, we would select $F_1, \dots, F_m$ and $P_1, \dots, P_m$ such that (24.71) satisfy the equation (24.70) to an accuracy of the order ε^{m+1} .

Thus we obtain

$$\begin{aligned}
 P_1(\xi) &= M_t\{X(t, \xi)\}; \\
 P_2(\xi) &= M_t\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi) + X_1(t, \xi)\right\}; \dots; F_1(t, \xi) = \tilde{X}(t, \xi); \\
 F_2(t, \xi) &= \left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{X}_t^M\left\{X(t, \xi) + \tilde{X}_1(t, \xi); \dots
 \end{aligned}$$

Now, if after determining $F_1, \dots, F_m$ and $P_1, \dots, P_m$, we examine the expression (24.71) as a certain formula for changing the unknown variable x into a new unknown variable ξ , the latter will be defined by an equation of the form ;

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m-1} \dots \quad (24.73)$$

Thus, if the variable ξ satisfies the equation (24.73), differing from the equation (24.72) by a magnitude of the order ε^{m+1} , the form (24.71) represents an exact solution for (24.70).

Hence, we can take the expression

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \dots + \varepsilon^{m-1} F_{m-1}(t, \xi),$$

as the m -th approximation and in this expression ξ is determined by the equation of the m -th approximation (24.72). For such a value of ξ the formula (24.71) gives the improved m -th approximation satisfying the precise equation (24.70) with an error of the order ε^{m+1} . We note here that if we know the form of the improved $(m-1)$ -th approximation the equations of the m -th approximation may be immediately obtained from the exact equations (24.70) by putting this form into these equations

and averaging with the help of the operator M . The first and often the second approximation is also used in the applications of the theory of perturbations described above. Higher approximations are rarely used because of the rapid increase in complexity during their actual construction.

As an example illustrating the theory mentioned above we examine the oscillations of a physical pendulum represented by a solid substance which may rotate freely in a certain vertical plain around its point of suspension. Let the point of suspension perform in the vertical direction sinusoidal oscillations with a small amplitude a and a frequency ω such that*)

$$\omega > \omega_0 \frac{l}{a}; \frac{a}{l} \ll 1. \quad (24.74)$$

As we will show, the unstable upper position of equilibrium of the pendulum may be rendered stable.

In order to examine this interesting phenomenon, we form an equation of oscillations of the pendulum with a vibrating point of suspension. Considering damping to be proportional to velocity we have**))

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2 \sin \omega t}{l} \sin \theta = 0 \quad (24.75)$$

where θ is the angle of deviation calculated from the lower position of equilibrium ; $y = a \sin \omega t$ the vertical displacement of the point of suspension ; λ the coefficient of damping. Regarding the values of damping we assume that when the point of suspension is fixed the motion of the pendulum for small deviations from the lower position of equilibrium has an oscillatory character. Hence, as we know,

$$\frac{\lambda^2}{4} < \omega^2. \quad (24.76)$$

*) Here l is the length of the pendulum, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ the natural frequency of small oscillations.

**) In fact, the equation of oscillations of the pendulum with its point of suspension at rest, will be

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (\alpha)$$

while, from the point of view of the principle of relativity, the motion of the pendulum with a vertically vibrating point of suspension is equivalent to the motion of the pendulum with its point of suspension at rest but oscillating in a field of gravitational force with an acceleration $g + y''$. Changing g by $g + y''$ in (α) we obtain equation (24.75).

In order that the small parameter may appear explicitly in the equation (24.75) under examination, it will be expedient to introduce "dimensionless" time. In fact, instead of the time t measured in seconds we introduce the time - for which the unit of measurement will be the period of oscillations of the point of suspension divided by 2π , i.e. $\frac{1}{\omega}$. We evidently have,

$$== \omega t; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}; \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2},$$

and hence it follows from (24.75) that

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{\lambda d\theta}{\omega d\tau} + \left\{ \frac{g}{\omega^2} - \frac{a}{l} \sin \tau \right\} \sin \theta = 0. \quad (24.77)$$

Now, we introduce for brevity

$$k = \frac{\omega_0}{\omega} : \frac{a}{l}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0} k. \quad (24.78)$$

Hence

$$\frac{g}{\omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = k^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2; \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0} \omega_0 = \frac{\lambda}{\omega_0} k \frac{a}{l} = 2\alpha \frac{a}{l},$$

and the equation (24.77) may be written in the form:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{a}{l} \frac{d\theta}{d\tau} + \left\{ k^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{a}{l} \sin \tau \right\} \sin \theta = 0.$$

Taking the ratio of the displacement of the point of suspension to the length of the pendulum as a small parameter ε , we have finally

$$d^2\theta/d\tau^2 + 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \{k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin \tau\} \sin \theta = 0, \quad (24.79)$$

where according to (24.74), (24.75) and (24.78) the constants α and k will be less than unity :

$$\alpha < 1, k < 1.$$

Since the equation thus obtained which contains the small parameter ε is not an equation in the standard form, at first we have to transform it into the standard form for immediate application of the theory explained above.

We find that the differential equation of the second order under examination may be transformed by a simple change in variables into two equations of the first order in the standard form. For this, we

introduce in place of a single unknown function of time θ , two new unknowns φ and Ω with the help of the formulae :

$$0 = \varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi$$

Differentiating (24.80) and comparing with (24.81), we have

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi,$$

whence

$$(1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \Omega \quad (24.82)$$

Differentiating (24.81) and putting the result into the equation (24.79), we obtain

$$d\tau^2 \theta = \varepsilon \frac{d\Omega}{d\tau} - \varepsilon \cos \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon \sin \tau \sin \varphi = (\varepsilon \sin \tau -$$

$$-k^2 \varepsilon^2) \sin \theta - 2\pi \varepsilon \frac{d\theta}{d\tau}$$

and hence

$$\varepsilon \frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon \cos \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon \sin \tau \{ \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \sin \varphi \} -$$

$$-k^2 \varepsilon^2 \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - 2x\varepsilon(\varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi),$$

Dividing both sides of the last expression by ε and considering the equation (24.82), we obtain

$$d\Omega = \{ \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \sin \varphi \} \sin \tau -$$

$$-k^2 \varepsilon \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) + \frac{\varepsilon \Omega \cos \tau \cos \varphi}{1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi} -$$

$$-2\alpha \varepsilon (\Omega - \cos \tau \sin \varphi)$$

Thus, we see that owing to the relations (24.82) and (24.83) the variables φ and Ω satisfy the differential equations in the standard form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \varepsilon \Omega + \varepsilon^2 \dots \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \varepsilon \left\{ -\sin^2 \tau \sin \varphi \cos \varphi - k^2 \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \Omega \cos \tau \cos \varphi - 2\alpha \Omega + 2\alpha \cos \tau \sin \varphi \right\} + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (24.84)$$

Applying the principle of averaging to these equations and considering the identical relations

$$M_{\sim} \{ \cos \tau \} = 0, M_{\tau} \{ \sin^2 \tau \} = \frac{1}{2},$$

we obtain equations of the first approximation in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \varepsilon \Omega \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= -\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + k^2 \sin \varphi + 2\alpha \Omega \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24.85)$$

These two equations, of the first order (24.85), are obviously equivalent to an equation of the second order :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2\left(k^2 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi = 0. \quad (24.86)$$

The first approximation thus obtained is much simpler than the exact equation (24.79), though it does not contain time explicitly. It represents the oscillations of a system, similar to the pendulum with a fixed point of suspension, in which "the restoring force" is proportional not to $\sin\varphi$ but to $(k^2 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\sin\varphi$. It is interesting to note in passing that some gyroscopes*), for instance, appear to be systems of this kind.

When damping is absent ($\alpha = 0$) the equation (24.86) is completely solved in terms of the elliptic functions. However, for discussing the case in hand we do not require an expression for the general solution. We immediately find from (24.86) that this equation permits the quasistatic solution $\varphi = \pi$ corresponding to the upper position of equilibrium of the pendulum. For investigating stability we shall examine small deviations $\delta\varphi = \varphi - \pi$ from this position. Hence the equation representing the variation for $\delta\varphi$ assumes the form :

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2} - k^2\right)\delta\varphi = 0 \quad (24.87)$$

Since $s\alpha > 0$ here, the condition of stability will be

$$\frac{1}{2} - k^2 > 0$$

*) P.V. Bulgakov, Applied Theory of Gyroscopes, State Scientific and Technical Literature Publishing Company, Moscow, 1939, page 93, formula (10).
i.e. taking into consideration the definition of k ,

$$\omega > \sqrt{2\omega_0\frac{l}{a}}. \quad (24.88)$$

Thus, if the frequency of vibrations of the point of suspension is sufficiently large to satisfy the inequality (24.88), the upper position of the pendulum will become stable.

Assume, for instance, $l = 40$ cm and $a = 2$ cm. In this case equation (24.88) gives

$$\omega > \sqrt{2}\sqrt{\frac{981}{40}} \approx 140 \frac{1}{\text{sec}}$$

Thus the upper position of the pendulum will be stable if the rate of oscillations of the point of suspension is more than $\frac{\omega}{2\pi}$, i.e. more than 22.3 oscillations per second.

If we examine the quasi-static solution $\varphi = 0$, corresponding to the lower position of equilibrium we find that it remains stable for any value of k and the frequency of oscillations for small deviations (neglecting damping) will be equal to $\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} + k^2}$ for time τ and equal to

$$\varepsilon\omega\sqrt{\frac{1}{2} + k^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a\omega}{l}\right)^2 + \omega_0^2}$$

for time t .

Thus, for the concrete example examined above, if the number of oscillations of the centre of suspension is 60 per second ($\omega = 377 \frac{1}{\text{sec}}$), the frequency of small oscillations of the pendulum will be $\omega_\mu = 14.2 \frac{1}{\text{sec}}$. Hence, as in the case of the centre of suspension at rest, this frequency will be equal to $\omega_\nu = 4.94 \frac{1}{\text{sec}}$. The effective "restoring force" increases in this case to $\left(\frac{\omega_\mu}{\omega_\nu}\right)^2 = 8.2$ times. This force in the case of small oscillations will be the same as in the case of a usual pendulum 8.2 times greater.

We finally note that the equation of the first approximation (24.86) makes it possible for us to discuss the question of stability not only for small deviations but also for larger ones.

Now we proceed to examine the oscillations of a pendulum in the second approximation. It is not difficult to find that the equations of the second approximation coincide with the equations of the first approximation.

Hence, for constructing the second approximation we shall examine another possible type of motion of the pendulum. It will be found that the pendulum may rotate synchronously with the angular velocity ω , doing work in overcoming the resistances only if the latter do not exceed a certain magnitude. Here, oscillations of the axis of the pendulum around an axis rotating uniformly with an angular velocity precisely equal to ω are possible.

In order to simplify the calculations to some extent, we exclude the action of the force of gravity, assuming for this purpose that the motion of the pendulum occurs in horizontal plane.

Hence, putting $k = 0$ in the equation (24.79) we obtain

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau} - \varepsilon\sin\tau\sin\theta = 0 \quad (24.89)$$

The angle θ measures deviation of the axis of the pendulum from some fixed axis, and since we undertake to investigate oscillations of the pendulum around an axis rotating with constant angular velocity ω , it would be convenient to introduce the angle ψ in place of the angle θ :

$$\psi = \theta - \omega t,$$

or, with dimensionless time τ used in the equation (24.89),

$$\psi = \theta - \tau$$

It is obvious that for the angle ψ the equation of the oscillations will be

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\psi}{d\tau} - \varepsilon\sin\tau\sin(\psi + \tau) + 2\varepsilon\alpha = 0. \quad (24.90)$$

For reducing this equation (24.90) to the standard form, we assume

$$\psi = \psi, \frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon}v \quad (24.91)$$

Hence, we obtain two equations of the first order in terms of the unknowns ψ and v :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon}v$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon}\sin\tau\sin(\psi + \tau) - 2\sqrt{\varepsilon}\alpha - 2(\sqrt{\varepsilon})^2\alpha v$$

in which $\sqrt{\varepsilon}$ may be taken as a small parameter.

Since

$$\sin\tau\sin(\psi + \tau) = \frac{1}{2}\cos\psi - \frac{1}{2}\cos(\psi + 2\tau),$$

the improved first approximation (second approximation) will be :

$$\psi = \psi, v = \Omega - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos(\psi + 2\tau) = \Omega - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}\sin(\psi + 2\tau). \quad (24.93)$$

Putting (24.93) into the right-hand-side of equation (24.92) and performing the averaging process with respect to τ , for constant ψ and Ω , we arrive at the equations of the second approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon}\Omega, \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \psi - 2\sqrt{\varepsilon\alpha} - 2\varepsilon\alpha\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (24.94)$$

or

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\psi}{d\tau} - \frac{\varepsilon \cos \psi}{2} + 2\varepsilon\alpha = 0.$$

If we revert to the time t , measured in seconds ($t = \frac{\tau}{\omega}$), the equation of the second approximation thus obtained may be written in the form

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \lambda \frac{d\psi}{dt} - \frac{a\omega^2}{2l} \cos \psi + \lambda\omega = 0. \quad (24.95)$$

We note among other things that in the notation introduced above, the equation of the first approximation may be represented by :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{a\omega^2}{2l} \cos \psi + \lambda\omega = 0. \quad (24.96)$$

It differs from the equation of the second approximation in that it does not contain the term $\lambda \frac{d\psi}{dt}$, which gives rise to the damping of the oscillations.

Examining the equation of the second approximation we find that it permits the quasi-static solution

$$\psi = \psi_0, \quad \text{where} \quad a\omega^2 \cos \psi_0 = i\omega^2, \quad (24.97)$$

corresponding to the rotation of the pendulum ($b = 0, 1 + 0_0$) with a constant angular velocity ω , only if

$$\lambda\omega < a\omega^2/2l \quad (24.98)$$

When

$$\lambda\omega > \frac{a\omega^2}{2l}, \quad (24.99)$$

such quasi-static solutions are not possible.

For investigating the instability of the quasi-static solutions (24.97) in the case (24.98), we examine small oscillations of ψ about ψ_0 :

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi.$$

For small deviations the equation (24.95) gives

$$\frac{d^2\delta\psi}{dt^2} + \lambda \frac{d\delta\psi}{dt} + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 \delta\psi = 0. \quad (24.100)$$

Examining the corresponding characteristic equation

$$p^2 + \lambda p + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 = 0 \quad (24.101)$$

we find that as the coefficient λ is positive when $\frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 > 0$, the real parts of the roots of this equation are negative. Thus when $\frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 < 0$ this equation has a root whose real part is positive.

Thus, the solution (24.97) is stable when $\sin \psi_0 > 0$ and unstable when $\sin \psi_0 < 0$. Hence, we have one stable quasi-static solution $0 < \psi_0 < \pi$ and one unstable $\pi < \psi_0 < 2\pi$.

We note that had we limited our study to the equation of the first approximation (24.96), the term $\lambda \frac{d\delta\psi}{dt}$ would not have been present in (24.100) and the characteristic equation would have had the form

$$p^2 + \frac{a\omega)^2}{2l} \sin \psi_0 = 0$$

Hence, when $\sin \psi_0 > 0$, its roots are found to be purely imaginary with real part zero and the question of stability remains undecided. We have already spoken of the possibility of such cases. However, we see, during examination of the second approximation, that the real parts of the roots of the characteristic equation are different from zero and hence it is possible to decide the question of stability.

In conclusion, we would say a few words regarding the conditions of existence of the quasi-static solutions (24.97).

We note that if I denotes the moment of inertia of the pendulum, ω represents, obviously, the moment of the forces of resistance for the pendulum rotating with angular velocity ω .

Multiplying the moment of the forces of resistance by ω , we obtain the power expended for overcoming these forces :

$$N = I\lambda\omega^2$$

The condition (24.98) shows that in order to make possible the steady-state rotations of the pendulum with an angular velocity ω , it is necessary that the power spent towards overcoming the forces of resistance should not attain a certain limiting value, i.e.

$$N < \frac{I a}{2 l} \omega^3 \quad (24.102)$$

Thus, for instance, if the moment of inertia of the pendulum is $I = 0.5 \text{ kg cmsec}^2$, the length $l = 40 \text{ cm}$ and the centre of suspension performs 60 oscillations per second ($\omega = 377 \text{ sec}^{-1}$) with an amplitude $a = 2 \text{ cm}$, we have

$$\frac{I a}{2 l} \omega^3 = \frac{(377)^3}{80} \text{ kg cmsec} - 1 = 6698 \text{ kg msec}^{-1}$$

Hence, in the given case, according to the conditions (24.102), if the rotation of the pendulum with an angular velocity ω (60 revolutions per second) is to be possible, it is necessary that the power that would be expended in overcoming the resistances should not exceed $6698 \text{ kg msec}^{-1}$.

10.6.2 25. the Case of the Rapidly Rotating Phase

In the present section we shall derive the generalised method of averaging in the case of a system with rapidly rotating phase.

Similar investigation had already been conducted by D.N. Zubarev jointly with one of the authors [10].

We now examine the dynamical system whose state is characterised by the angular variable α and the r variables $x_1, x_2, \dots, x_r$, and is represented by the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r) \quad (k = 1, 2, \dots, r) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\omega(x_1, \dots, x_r) + A(\alpha, x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

where λ is a large parameter, $\lambda\omega$ corresponding to the frequency of rotation α ; $X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r)$, $A(\alpha, x_1, \dots, x_r)$ are periodic functions of the angular variable α with a period 2π .

We note that in the particular case when $\omega = \text{const}$ and $A(\alpha, x_1, \dots, x_r) = 0$, the system (25.1) might directly reduce to the standard form. In fact, in the given case, we have

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(\lambda\omega t + \varphi, x_1, \dots, x_r) \quad (\varphi = \text{const}),$$

and from this, by introducing a new independent variable

$$\lambda\omega t = \tau,$$

we obtain equations of type (24.14), in which

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda\omega}$$

In the general case of the system (25.1) also, we can utilise the basic ideas of the method of averaging.

We will show that the variable α may be eliminated from the right-hand-sides of the equations (25.1), with any degree of accuracy in the expansion in terms of the powers of $\frac{1}{\lambda}$. For this purpose we make the following change of variables :

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \xi_k^{(n)}(\alpha, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} U_n(\alpha, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r), \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

With the help of these changes, (25.1) may be reduced to the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)}(x_1, \dots, x_r) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\omega(x_1, \dots, x_r) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \Omega_n(x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

such that the coefficients in the equation (25.3) do not depend on the angular variable $\bar{\alpha}$.

The physical meaning of the transformation (25.2) lies in the decomposition of the actual motion described by the variables $x_1, x_2, \dots, x_r$, α , into averaged motion with coordinates $x_1, \dots, x_r$ and "vibrations" described by angle $\bar{\alpha}$ and the functions

$$U_n(\alpha, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \text{ and } \xi_k(\alpha, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$$

The definition of the functions appearing in the equation (25.2), generally speaking, is not unique because one can confine oneself to different terms of the expansion either to the first or to higher terms of the series in an arbitrary manner. Above circumstances have already been repeatedly mentioned. When we have any concrete expansion (25.2), we can always effect a change, in the variables, of the form

$$\bar{x}_k = x_k + \varepsilon f_k(x_1, \dots, x_r) + \varepsilon^2 \dots$$

and, as a result of this, we can obtain another possible form of the expansion because x_k may be taken as a new $\bar{x}_k$ with the same justification.

For obtaining definite single-valued expressions for the coefficients (25.2), it is necessary to impose certain additional conditions. We assume that U_n and $\xi_k^{(n)}$ do not contain zero harmonics in $\bar{\alpha}$, considering at the same time that x_k and $\bar{\alpha}$ include the averaged motion. We may also impose other additional conditions. Thus, for example, if the system were canonical it might be required that the equations of the averaged motion (25.3) must also be canonical.

Since, the abovementioned ambiguity is of a trivial character, we shall not discuss the possible cases in detail.

Putting (25.2) into (25.1) and equating the terms with λ, λ^0 and λ^{-1} , we obtain a system of four equations for determining the six functions $\Omega_0, \Omega_1, X_k^{(0)}, X_k^{(1)}, \xi_k^{(1)}, U_1$:

$$\begin{aligned}
 X_k^{(0)} + \frac{\partial \xi \xi_k^{(1)}}{\partial \alpha} \omega &= X_k \quad (k = 1, 2, \dots, r) \\
 X_k^{(1)} + \frac{\partial \xi k_k^{(2)}}{\partial \alpha} \omega + \frac{\partial \xi k_k^{(1)}}{\partial \alpha} \Omega_0 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial \xi k_q^{(1)}}{\partial x_q} X_q^{(0)} &= \frac{\partial X_k}{\partial x} U_1 - \\
 &+ \sum_{q=1}^r \frac{\partial X_k}{\partial x_q} \xi_q^{(1)} \\
 \Omega_1 + \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} \omega + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \Omega_0 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial U_1}{\partial x_q} X_q^{(0)} &= \\
 = \sum_{p=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \xi_p^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_p \partial x_q} \xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \alpha} U_1 + \\
 &+ \sum_{q=1}^r \frac{\partial A}{\partial x_q} \xi_q^{(1)} \\
 \Omega_0 + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \omega &= \sum_{q=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} - \xi_q^{(1)} + A.
 \end{aligned} \tag{25.4}$$

In the system (25.4) the number of unknowns is greater than number of equations and this agrees fully with the remarks made above about the ambiguity. The remaining equations are obtained from the equations for the absence of the zero-th harmonics in $\zeta_k^{(n)}$ and U_n , i.e.

$$\tilde{\xi}_k^{(n)} = 0, \quad \tilde{U}_n = 0 \tag{25.5}$$

(The symbol $\sim$ denotes an average over $\bar{\alpha}$).

We now expand the functions $A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ and $X_k(\bar{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ into Fourier series :

$$\left. \begin{aligned}
 A(\alpha, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) &= \sum_{-\infty < m < \infty} A_m e^{im\alpha}, \\
 X_k(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r) &= \sum_{-\infty < m < \infty} X_{km} e^{im\alpha}.
 \end{aligned} \right\} \tag{25.6}$$

Averaging the equation 25.4 over α we obtain the following relations

$$X_k^{(10)} = X_k, \dots \quad (25.7)$$

$$\xi_k^{(i)} = \sum_{\substack{(i) \\ n \neq 0}}^1 X_{k, \dots} c_{in}^{inx}, \quad (25.8)$$

$$\Omega_0 = A_0, \quad (25.9)$$

$$U_1 = \sum_{n \neq 0} A_n e^{in\bar{x}} - \sum_{n \neq 0} \sum_{q=1}^r \frac{\partial(1)}{\partial \bar{x}_q} \frac{X_q v_n}{\bar{n}^2 (1)^2} c i \bar{n} \bar{x}, \quad (25.10)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2(1)}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)} + \sqrt{\frac{\partial A}{\partial \alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)}, \quad (25.11)$$

$$X_k^{(1)} = \sigma_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial \vec{X}_k \xi_q^{(1)}}{\partial \bar{x}_q}. \quad (25.12)$$

With the help of 25.8 and 25.10 the equations 25.11 and 25.12 get reduced to the form

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,q,n \\ n \neq 0}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_a} \frac{1}{\omega^2 - n^2} X_{p,n} X_{a,-n} + \sum_{\substack{q,n \\ n \neq 0}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_a} 1 \omega^2 n A_n X_{a,-n} - \\ & - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega} A_k A_{-n} - \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{i \omega n} \frac{\partial A_n}{\partial \bar{x}_q} X_{o,-n}, \end{aligned} \quad (25.13)$$

$$\begin{aligned} X_k^{(1)} = & - \sum_{\substack{(n \neq 0) \\ \omega}} \frac{1}{\omega} X_{k,n} A_{-n} - \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} 1 n_{i(0)} X_{k,n} X_{a,n} + \\ & + \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i \omega^2 n} X_{k,n} X_{q,-n}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

The expansions 25.7, 25.10, 25.13 and 25.14 give us the required solution of the system of equations 25.4

We now change over from the complex Fourier series 25.6 to real series

$$\begin{aligned} A A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos nx) \xi_n \sin nx, \\ X_k X_{k,n} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k,n} \cos nx + g_{k,n} \sin nx). \end{aligned} \quad (25.15)$$

We represent the formulac for change of the variable 25.2 with the help of equations 25.8, 25.10 and 25.15 in the form

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k &= \bar{x}_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \omega} \{ -G_{k,n} \cos n\bar{x} + F_{k,n} \sin n\bar{x} \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \omega} \{ -g_n \cos n\bar{x} + f_n \sin n\bar{x} \} - \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{n^2 \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \{ F_{q,n} \cos n\bar{x} + G_{q,n} \sin n\bar{x} \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (25.16)$$

But the system of equations 25.3 after putting into it the coefficients derived from 25.7 – (25.10) and 25.13–25.14 takes the form

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} = & X_{k,0} - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\omega} \{F_{k,n} f_n + G_{k,n} g_n\} - \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2n\omega} \left\{ \frac{\partial F_{k,n}}{\partial x_q} G_{i,n} - \frac{\partial G_{k,n}}{\partial x_q} F_{a,n} \right\} + \\ & + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{2\omega^2 n} \frac{\partial \bar{x}_q}{2} \{F_{k,n} G_{q,n} - G_{q,n} F_{q,n}\} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (25.17)$$

$$\begin{aligned} d\alpha = & \lambda\omega + A_0 + 1 \sum_{\lambda} \sum_{\substack{n,p,q \\ (n \neq 0)}} 4\omega^2 n^2 \partial^2 x_p \partial_{x_q} \{F_{p,n} F_{u,n} + G_{\nu,n} G_{i,n}\} - \\ & (n \neq 0) \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial(\omega)}{\partial x_q} \{g_n F_{q,n} - f_n G_{q,n}\} - \\ & + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2\omega n} \left\{ \frac{\partial g_n}{\partial x_q} F_{q,n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_q} G_{q,n} \right\} - \\ & (n \neq 0) \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{1}{2\omega} \{f_n^2 + g_n^2\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (25.18)$$

The system of equations (25.17) and (25.18) gives the solution of the problem posed in the beginning of the section to an accuracy upto the first order inclusive, in terms of the parameter $\frac{1}{\lambda}$. The first group of equations of the system (25.17) expresses systematic motion. Equation (25.18) for α expresses "vibration." Thus, the systematic motion is separated from the "vibration" with an accuracy upto terms of the order $\frac{1}{\lambda^2}$.

We now examine as an illustration the motion of a charged particle in a magnetic field. This is of interest for a number of problems in theoretical physics. For example, in cosmic electrodynamics we come across the problem of investigating the trajectories of cosmic particles in non-homogeneous fields. The same problem also arises in the theory of some electrotechnical instruments used in radioengineering, such as analogous to magnetrons.

Exact integration of the equations of motion of a charged particle in non-homogeneous electric or magnetic field is difficult and, in a majority of cases, may be performed only by the numerical methods. However, in practice, these methods are also not always applicable. In particular, the difficulties of numerical calculations become almost insuperable when the particle performs a larger number of revolutions along the Larmor circle. Actually it is here that we can use the above method of asymptotic approximation which permits us to bypass the difficulties involved in the calculations.

We shall assume that the magnetic field changes little along the length of the Larmor radius

:

$$R_L \frac{1}{H} \frac{dH}{dx} \leq 1, \quad (25.19)$$

where $R_L = \frac{w}{\omega_H}$ is the radius of the Larmor circle, $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ is the Larmor frequency, and w is the velocity of the particle in a plane perpendicular to the magnetic field.

Hence the charged particle moves in a spiral along the magnetic lines of force, revolving around these at a distance equal to the Larmor radius and 'drifts' in a direction perpendicular to the magnetic field. Under these circumstances, we can construct a simplified averaged equation for the motion of the centre of gravity of the Larmor circle.

The condition (25.19) is fulfilled if the strength of the magnetic field is large, the magnetic field is homogeneous and the velocity of the particle is small. However, if the velocity of the particle is also large, then in order that the condition (25.19) be satisfied the magnetic field should be sufficiently large and homogeneous. Further if the magnetic field is weak, the condition (25.19) can again be fulfilled provided the velocity of the particle is sufficiently small and the magnetic field is sufficiently homogeneous. In the given example, we will investigate the motion of a charged particle in a non-homogeneous electric and magnetic field assuming that the magnetic field changes little along the length of the Larmor radius.

The equations of motion of a charged particle in an electromagnetic field, in non-relativistic approximation, have the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} + \frac{e}{mc} [v\mathbf{H}], & \mathbf{F} &= \frac{e\mathbf{E}}{m}, \\ \frac{dr}{dt} &= v. \end{aligned} \right\} \quad (25.20)$$

We choose a curvilinear system of coordinates with orthogonal unit vectors, τ_0, τ_1, τ_2 , one in the direction of the lines of the magnetic field and the second perpendicular to it :

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\mathbf{H}}{H}, \\ \tau_1 &= [\tau_2 \tau_0], \\ \tau_2 &= [\tau_0 \tau_1], \\ \tau_0 &= [\tau_1 \tau_2], \end{aligned} \right\} \quad (25.21)$$

We write equations (25.20) in the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} + \omega_H [v\tau_0] \\ \frac{dr}{dt} &= v, \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

where $\omega_H = \frac{eH(r)}{mc}$ is the Larmor frequency.

We write equation (25.22) in such a form that the rotation of the particle with angular frequency ω_H can be shown explicitly. For this purpose we decompose the vector v representing the velocity of the particle in terms of the orthogonal unit vectors τ_0, τ_1, τ_2 :

$$\left. \begin{aligned} s &= u\tau_0 + w \{ \tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha \} \\ (v^2 &= w^2 + u^2) \end{aligned} \right\} \quad (25.23)$$

where u and w are the components of the velocity parallel and perpendicular to the field respectively. With the help of equation (25.23), equation (25.22) assumes the form :

$$\left. \begin{aligned} du\tau_0 + & \left[u \frac{d\tau_0}{dt} + \frac{dw}{dt} \{ \tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha \} + \right. \\ & + w \left\{ \frac{d\tau_1}{dt} \cos \alpha + \frac{d\tau_2}{dt} \sin \alpha \right\} + w \{ -\tau_1 \sin \alpha + \tau_2 \cos \alpha \} \frac{d\alpha}{dt} = \\ & \left. = \mathbf{F} + \omega_H w \{ \tau_1 \sin \alpha - \tau_2 \cos \alpha \} \right] \end{aligned} \right\} \quad (25.24)$$

Multiplying equation (25.24) successively by $\tau_0, \tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha$ and $\tau_2 \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha$, we obtain equations for $\frac{du}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ and $\frac{d\alpha}{dt}$:

$$\frac{du}{dt} = (\mathbf{F}\tau_0) - w \left\{ \tau_0 \frac{\alpha_1}{dt} \cos \alpha + \tau_0 dt \sin \alpha \right\} \quad (25.31)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\mathbf{F}\tau_1) \cos \alpha + (\mathbf{F}\tau_2) \sin \alpha - u (\tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha) \frac{d\tau_0}{dt} \quad (25.25)$$

$$w \frac{d\alpha}{dt} = -\omega_H w + F \{ \tau_2 \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha \} - \\ - \{ \tau_2 \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha \} \left\{ u \frac{d\tau_0}{dt} + w \left(\frac{d\tau_1}{dt} \cos \alpha + \frac{d\tau_2}{dt} \sin \alpha \right) \right\}$$

Hence, with the help of (25.26) and (25.27), the equation (25.25) can be written in the form:
 $du = (\mathbf{F}\tau_0) + w^2 \text{div} \tau_0 + uw (\tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \cos \alpha + \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \sin \alpha) +$
 $dt w_2 \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha + \frac{w^2}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha,$

$$dw = -\frac{uw}{2} \text{div} \tau_0 + \{ (\mathbf{F}\tau_1) - u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} \cos \alpha + \quad (25.28)$$

$$dt \{ (\mathbf{F}\tau_2) - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} \sin \alpha - \frac{uw}{2} \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha -$$

$$- \frac{uw}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha, \quad (25.29)$$

$$d\alpha = -\omega_H - \frac{u}{2} \{ \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + 2\tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_1 \} +$$

$$+ \frac{1}{w} \{ [\mathbf{F}\tau_2] - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 + w^2 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} \cos \alpha +$$

$$+ \frac{1}{w} \{ -(\mathbf{F}\tau_1) + u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - w^2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \} \sin \alpha - \\ - \frac{u}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha + \frac{u}{2} \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha.$$

To these equations we have to add the second of the equations

$$\frac{dr}{dt} = u\tau_0 + w \{ \tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha \} \quad (25.30)$$

The equations of motion of the charged particle in a non-homogeneous field of the form (25.28) - (25.31) are suitable for application of the above-mentioned method of asymptotic approximation to the case of magnetic fields that deviate slightly from the homogeneous ones and satisfy the condition (25.19).

We make a change of variables, analogous to (25.16), in the system of equations (25.28) - (25.31) :

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \frac{w}{\omega_H} (\tau_2 \cos \bar{\alpha} - \tau_1 \sin \bar{\alpha})$$

We have

$$d\tau_i = \frac{\partial \tau_i}{dt} + (v \nabla) \tau_i = \frac{\partial \tau_i}{dt} + u (\tau_0 \nabla) \tau_i + \\ + w \{ (\tau_1 \nabla) \tau_i \cos \alpha + (\tau_2 \nabla) \tau_i \sin \alpha \} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (25.26)$$

and

$$\tau_0 (\tau_0 \nabla) + \tau_1 (\tau_1 \nabla) + \tau_2 (\tau_2 \nabla) = \nabla. \quad (25.27)$$

We put $\frac{\partial \tau_i}{\partial t} = 0$, i.e. we assume that the magnetic field does not depend on time, though such a restriction might not actually be imposed.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\omega_H} (g_1 \cos \bar{\alpha} - f_1 \sin \bar{\alpha}) + \frac{w}{\omega^2} (\tau_1 \cos \bar{\alpha} + \\ &\quad + \tau_2 \sin \bar{\alpha}) \nabla \omega_H + \frac{1}{2\omega_H} (g_2 \cos 2\bar{\alpha} - f_2 \sin 2\bar{\alpha}) \\ u &= \bar{u} - \frac{1}{\omega_H} \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{-G_{4n} \cos n\bar{\alpha} + F_{4n} \sin n\bar{\alpha}\} \\ w &= \bar{w} - \omega_H \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{-G_{5n} \cos n\bar{\alpha} + F_{5n} \sin n\bar{\alpha}\} \end{aligned} \right\} \quad (25.32)$$

Equations (25.28) and (25.29) give in zero-th order approximation: where u and w correspond to the variables x_4 and x_6 of the system (25.1) and $\omega H = -\lambda\omega$; $f_n, g_n, F_{4n}, G_{4n}, F_{5n}, G_{5n}$ are coefficients to the corresponding harmonics in the equations (25.28) - (25.31):

$$\begin{aligned} &\text{ponding harm 1} \\ f_1 &= w_1 \{(\mathbf{F}\tau_2) - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 + w^2 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2\}, \\ g_1 &= w_1 \{- (\mathbf{F}\tau_1) + u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - w^2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1\}, \\ f_2 &= -\frac{u^u}{2} \{\tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0\}, \\ g_2 &= 2^u \{\tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0\}. \\ F_{41} &= uw \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0, F_{42} = w^2 \{\tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0\}, \\ F_{51} &= (\tau_1 \mathbf{F}) - u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0, \\ F_{52} &= -\frac{uw}{2} [\tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0], \\ G_{41} &= u \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0, \\ G_{42} &= \frac{w^2}{2} \{\tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0\}, \\ G_{51} &= (\tau_2 \mathbf{F}) - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0, \\ G_{52} &= -\frac{uw}{2} [\tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0]. \end{aligned} \quad (25.33)$$

The first formula of the system (25.32) expresses the rotation of the particle along the Larmor circle around the mean position. The second, third and fourth formulae describe the influence of the inhomogeneity of the field and of external force on the angle of rotation α and on the components u and w of velocity.

The equations (25.28)-(25.31), after the transformation (25.32), will not contain the angular variable α . In future we will always leave out the signs of averaging for the variables, denoting $\bar{\mathbf{r}}, \bar{u}, \bar{w}$ simply by $\mathbf{r}, u, w$. This will not cause any confusion because henceforth we will deal only with averaged variables.

We shall carry out the calculations correct upto the terms proportional to $\frac{1}{\omega_H H}$. Hence in the approximate equations for $\frac{du}{dt}$ and $\frac{dw}{dt}$, it is sufficient to retain (as will be clear from what follows) only the terms of zero-th order in $\frac{1}{\omega_H}$. because

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\mathbf{F}\tau_0) + w^2 + \text{div } \tau_0 \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{uw}{2} \text{div } \tau_0, \end{aligned} \right\} \quad (25.34)$$

The law of energy conservation for the averaged motion follows from the system (25.34). In fact, if we multiply the first equation of the system (25.34) by u , the second by w and add the results, we get :

$$u \frac{du}{dt} + w \frac{dw}{dt} = u (\mathbf{F} \tau_0) = -\frac{1}{m} dV$$

where V is the potential energy of the particle.

Hence

$$\frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{V}{m} = \text{const.} \quad (25.36)$$

We now derive the adiabatic invariant from the second equation of (25.34). We have

$$\left. \begin{aligned} X_{40} &= (\mathbf{F} \tau_0) + \frac{w^2}{2} \text{div } \tau_n, \\ X_{50} &= -\frac{uw}{2} \text{div } \tau_0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

The law of energy conservation for the averaged motion follows

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{uw}{2} \left(\mathbf{H} \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right) = -\frac{Hw}{2} \left(\mathbf{u} \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right) = \\ &= -\frac{Hw}{2} \left(\frac{dr}{dt} \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right) = -\frac{Hw}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) \end{aligned} \quad (25.37)$$

because $\text{div } \mathbf{H} = 0$ and $u \tau_0 \approx \frac{dr}{dt}$.

Integrating equation (25.37), we obtain

$$\frac{w^2}{H} = \text{const.} \quad (25.38)$$

The quantity $\frac{w^2}{H}$ is the adiabatic invariant, i.e. is not accurately preserved but only upto terms of the order $\frac{1}{\omega_H}$.

We might extend the expression (25.38) by higher terms in $\frac{1}{\omega_H}$, beginning with the first, and thus obtain an explicit expression for an approximate integral of motion preserving its value upto a given degree of accuracy fixed beforehand.

The physical meaning of adiabatic invariance of the quantity $\frac{w^2}{H}$ lies in that the magnetic flux across the Larmor circle is of a constant magnitude, correct upto terms of the order of smallness $\frac{1}{\omega_H}$.

Equation (25.31) assumes, as a result of transformation (25.32), the form

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} u \tau_0 + \frac{w}{2\omega_H} (\tau_1 f_1 + \tau_2 g_1) + \\ + \frac{w^2}{2\omega_H} ((\tau_2 \nabla) \tau_1 - (\tau_1 \nabla) \tau_2) + 2\omega_H (\tau_1 G_{51} - \tau_2 F_{51}) - \\ - \frac{w^2}{2\omega_H^2} (\tau_1 (\tau_2 \nabla^{(\omega)} H) - \tau_2 (\tau_1 \nabla^{(\omega)} H)) + O\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right) \end{aligned} \quad (25.39)$$

where we have taken into account

$$\begin{aligned} w (\tau_1 f_1 + \tau_2 g_1) + \tau_1 G_{51} - \tau_2 F_{51} = \\ = \tau_1 \{ 2 (\tau_2 F) - 2u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 + w^2 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} + \\ + \tau_2 \{ -2 (\tau_1 F) + 2u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - w^2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \} \end{aligned}$$

Equation (25.39) may be re-written in the form

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} = & u\tau_0 + \frac{1}{\omega_H} \{ \tau_1 (\mathbf{F}\tau_2) - \tau_2 (\mathbf{F}\tau_1) \} - \frac{u^2}{\omega_H} \{ \tau_1 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - \\
& - \tau_2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} + \frac{w^2}{2\omega_H} \{ \tau_1 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 - \tau_2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \} + \frac{w^2}{2\omega_H} \{ (\tau_2 \nabla) \tau_1 - \\
& - (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} - \frac{w^2}{2\omega_H} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla \omega_H) - \tau_2 (\tau_1 \nabla \omega_H) \} + O\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right), \tag{25.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} = & \tau_0 \left\{ u + \frac{w^2}{2\omega_H} (\tau_0 \text{rot } \tau_0) \right\} + \tau_0 \times \left\{ -\frac{1}{\omega_H} \mathbf{F} + \frac{w^2}{2\omega_H^2} \nabla \omega_H + \right. \\
& \left. + \frac{u^2}{\omega_H} (\tau_0 \nabla) \tau_0 \right\},
\end{aligned}$$

because

$$\begin{aligned}
& \tau_1 (F\tau_2) - \tau_2 (F\tau_1) - [F/\tau_0], \\
& \tau_1 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - \tau_2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 = [(\tau_0 \nabla) \tau_0 / \tau_0], \\
& \tau_1 - (\tau_1 \nabla) \tau_2 = \tau_0 (\tau_0 \text{rot } \tau_0) - \tau_1 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 - \tau_2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1.
\end{aligned}$$

In the equation (25.41) we can neglect the small corrections,

$$\frac{w^2}{2\omega} (\tau_0 \text{rot } \tau_0) \tau_0$$

to the principal longitudinal term $u\tau_0$.

It is not difficult to see that in equation (25.41), under the abovementioned approximation, terms perpendicular to the field $\mathbf{H}$ begin with the terms of the order $\frac{1}{\omega_H}$ while those parallel to the field $\mathbf{H}$ are determined correct only upto $\frac{1}{\omega_H}$. Preserving the same accuracy, we may add to this equation magnitudes of the type $\tau_0^c \omega_H$. In fact, if we change over from $\mathbf{r}$ to another variable (vide note on "ambiguity") by the substitution

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{new}} + \frac{\tau_0}{\omega_H^2} f(\alpha, \mathbf{r}) \tag{25.42}$$

then shifting $\mathbf{r}$ along the lines of the magnetic field by a magnitude of the order $\frac{1}{\omega_H^2}$, which can be neglected for the given degree of accuracy, we can add, during differentiation of (25.42), even the terms $\frac{\tau_0}{\omega_H} f'_z$ besides the non-essential terms of the order $\frac{1}{\omega_H^2}$.

We now use the above-mentioned arbitrariness and determine u such that it is precisely equal to the component of the velocity $\frac{dr}{dt}$ of the centre of the Larmor circle parallel to the magnetic field. Hence, the new u will be equal to the old u plus $\frac{L}{\omega_H}$. In the equation (25.41) we can simply replace the old u by the new u because the difference between these two quantities as regards their orders is less than that between the terms contained in (25.41).

Thus, we finally obtain the following system of equations determining the motion of the centre of the Larmor circle :

$$\left. \begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{uw}{2} \text{div } \tau_0, \\
\frac{dw}{dt} &= \tau_0 u + \tau_0 \times \left\{ -\frac{1}{\omega_H} \mathbf{F} + \frac{w^2}{2\omega_H^2} \nabla \omega_H + \frac{u^2}{\omega_H} (\tau_0 \nabla) \tau_0 \right\}.
\end{aligned} \right\} \tag{25.43}$$

It is not difficult to find the physical meaning of the various terms in the equations (25.43); $\tau_0 u$ is the component of the velocity vector of the particle directed along the magnetic field ;

$$\frac{1}{\omega H} [\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_0] = \frac{c}{H^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (E \ll H)$$

is the "drift velocity" of the particle under the action of the electric and the magnetic field ;

$$\frac{w^2}{2\omega_H^2} [\boldsymbol{\tau}_0 \times \text{grad } \omega H] = \frac{mcw^2}{2eH^3} [\mathbf{H} \times \nabla H]$$

is the drift velocity caused by the inhomogeneity of the magnetic field ;

$$-\frac{u_2}{\omega_H} [(\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \times \boldsymbol{\tau}_0] = -\frac{u^2}{\omega_H R} [\mathbf{n} \boldsymbol{\tau}], \quad |\mathbf{n}| = 1$$

(where R is the radius of curvature of the lines of the magnetic field; $\mathbf{n}$ the principal normal to the lines of the magnetic field) is the drift velocity caused by the curvature of the lines of magnetic field or the centrifugal drift. The last equation of the system (25.43) may be written also in the form :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & u \frac{\omega_H}{\omega} + \frac{v^2 + u^2}{2\omega_H^3} [\omega_H \times \nabla_{\omega_H}] + \frac{1}{\omega_H^2} [\mathbf{F} \omega_H] + \\ & + \frac{u^2}{\omega_H^2} \left\{ \text{rot } \omega_H - \frac{\omega_H}{\omega_H^2} (\omega_H \text{rot } \omega_H) \right\} \\ & \mathbf{v}^2 = u^2 + w^2 \end{aligned} \quad (25.44)$$

where we have put $\omega_H = \omega_H \tau_0$ and have taken into account the identity $(\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 = -[\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0]$, or else in the form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & u \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}] + \frac{mc(v^2 + w^2)}{2eH^3} [\mathbf{H} \nabla H] + \\ & + \frac{mcu^2}{eH^2} \left\{ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}}{H^2} (\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}) \right\}. \end{aligned} \quad (25.45)$$

In the particular case, when $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, equation (25.45) takes the form

$$d\mathbf{r} = u \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}] + me^2 (v^2 + u^2) [H \nabla H].$$

Equations (25.43) describe the motion of the centre Larmor circle, accurate upto the terms ω_{HH}^{1*} .

We finally note that the general asymptotic method described above in the case of rapidly rotating phase may also be used in investigating gyroscopic systems. We finally note that the general asymptotic method described above in the case may also be used in investigating syroscopic

^{0*)} We note that the case under examination has been solved upto the second approximation by S.1. Braginskii (Ukrainian Mathematical Journal, Vol. VIII, 1956).

10.7 6 Foundation of Asymptotic Methods

10.7.1 26. Foundation of the Method of Averaging

The question of mathematical foundation of the asymptotic methods may be investigated from different points of view. We can, for instance, search for conditions under which the difference between the exact solution and its asymptotic approximation, for sufficiently small values of the parameter, may be made as small as desired, for as large a finite interval of time as we like.

We can also set out for more complex problems by attempting to establish a correspondence between those properties of the exact and the approximate solutions which depend on the behaviour of the latter in an infinite interval.

In the present section we shall examine the first problem which is simpler.

Since the asymptotic methods examined above permit a reduction to the method of averaging, we would formulate this method, for the sake of generality, as applied to a system of differential equations in the standard form.

Thus, we shall examine the system of equations :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (26.1)$$

(x, X are points in an n -dimensional Euclidean space), with a small parameter ε . For this, we construct the corresponding system of averaged equations

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (26.9)$$

and proceed on to prove the theorem that under very general conditions the difference $x(t) - \xi(t)$ may be made as small as desired, for a sufficiently small value of ε , for as large an interval $0 - t - T$ as one likes. Since $\xi(t)$ depends on t through the mediation of the product t , we should choose for T a magnitude of the order $\frac{L}{z}$, where L may be made as large as desired (for a sufficiently small value of z) so that during the course of the aforementioned interval of time, might not considerably depart from its initial value, i.e. this interval might be found sufficiently long from the point of view of variation in ζ .

Hence, we formulate a statement about the smallness of the error $x(t) - \xi(t)$, in the first approximation, in the following manner.

Theorem. If the function $X(t, x)$ satisfies the conditions:

(a) for some domain D we may have such positive constants M and λ that for all real values of $t \geq 0$ and for any points x, x', x'' of this domain, the inequalities

$$|X(t, x)| \leq M; |X(t, x') - X(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|. \quad (26.3)$$

are satisfied ;

(b) there exists, for all x in the domain D , a limit :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x) \quad (26.4)$$

thus, corresponding to any positive ρ and η as small as desired and for as large a value of L as wanted, we may find such a positive z_0 that if $\xi = \xi(t)$ is a solution of the equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

defined in the interval $0 < t < \infty$ and lying in the domain D along with its entire ρ -neighbourhood*), then, for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, in the interval $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ the inequality

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta$$

is valid; in this inequality, $x = x(t)$ represents the solution of the equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

coinciding with $\xi(t)$ at $t = 0$.

Proof. We fix a certain positive number a and construct the function

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a \{1 - |x|^2\}^2, & |x| \leq a, \\ a^2, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (26.5)$$

in which the positive constant A_a is defined by the relation

$$\int_{E_n} \Delta_a(x) dx = 1 \quad (26.6)$$

the integration is performed over the entire space E_n under examination and dx denotes an infinitesimally small element of the n -dimensional Euclidean space.

Evidently the function $\Delta_a(x)$ introduced here, along with its partial derivatives upto the second order inclusive, is bounded. Since this function and its derivatives are identically equal to zero for $|x| > a$, it is not difficult to see that the integral

$$I_a = \int_{E_n} \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} dx \quad (26.7)$$

is finite for all positive values of a .

We next examine the function

$$u(t, x) = \int_D \Delta_a(x - x') \left\{ \int_0^t [X(t, x') - X_0(x')] dt \right\} dx' \quad (26.8)$$

With the help of the condition (b) we can construct such a monotonically decreasing function $f(t)$, tending to be zero when $t \rightarrow \infty$, that the relation

$$\frac{1}{t} \int_0^t [X(t, x) - X_0(x)] dt \leq f(t) \quad (26.9)$$

is valid in the whole of the domain D .

Hence we have

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq t f(t) \int_D \Delta_a(x - x') dx' \leq t f(t) \int_{E_n} \Delta_n(x - x') dx' = \\ &= t f(t) \int_{E_n} \Delta_n(x') dx' \end{aligned}$$

i.e.

$$|u(t, x)| \leq t f(t). \quad (26.10)$$

^{0*)} By ρ -neighbourhood of a set A we shall mean the set of all points the distances of which from A are less than ρ .

Further, we have

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \leq tf(t) \int_D \frac{\partial \Delta_a(x - x')}{\partial x} dx' \leq tf(t) \int_{E_n} \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} dx$$

or, in view of (26.7),

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \leq I_a tf(t). \quad (26.11)$$

On the other hand, by virtue of the condition (a),

$$|X_0(x)| \leq M; |X_0(x') - X_0(x'')| \leq \lambda |x' - x''|; x, x', x'' \in D, \quad (26.12)$$

and hence

$$|X(t, x') - X_0(x') - X(t, x) + X_0(x)| \leq 2\lambda |x' - x|; x, x' \in D.$$

We now see from (26.8) that

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \int_D \{X(t, x') - X_0(x')\} \Delta_a(x - x') dx'$$

whence, on the basis of (26.13), we can find that the inequality

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \{X(t, x) - X_0(x)\} \int_D \Delta_a(x - x') dx' \leq 2\lambda a \quad (26.14)$$

is valid in the domain D .

But, according to the definition of the function $\Delta_a(x)$, for any point x , with its a -neighbourhood belonging to D , we have

$$\int_D \Delta_a(x - x') dx' = \int_{|x-x'| < a} \Delta_a(x - x') dx' = 1$$

FOUNDATION OF ASYMPTOTIC METHODS

432

and, thus, the relation (26.14) gives for such points

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - X(t, x) + X_0(x) \leq 2\lambda a \quad (26.15)$$

We now find a number a such that

$$a < \rho, a < 8\lambda_L e^{L\lambda}, \text{ where } \eta^* = \min(\eta, \rho),$$

and introduce the functions

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leq L} \left| \nabla f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right|; \quad \Phi(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t tf(t) dt$$

Evidently, we have

$$F(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0; \quad \Phi(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Hence, we can choose such a small positive value ε_0 that for any positive ε not exceeding ε_0 , the inequalities

$$F(\varepsilon) < a; \quad F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}; \quad \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \leq \frac{\eta^*}{4L^2 e^{L\lambda} (\lambda + I_a M)} \quad (26.17)$$

are satisfied.

After making the necessary choice we examine the expression

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon u(t, \xi(t)) \quad (26.18)$$

where $\xi(t)$ is a solution of the equation (26.2) belonging, with its p -neighbourhood, to the domain D . By virtue of (26.10), (26.16) and (26.17), we have

$$|\varepsilon u(t, \xi)| \leq \varepsilon t f(t) \leq F(\varepsilon) < a < p \quad (26.19)$$

in the interval *

$$0 < t < \frac{L}{\varepsilon}, \quad (26.20)$$

and hence in this interval $\bar{x}(t) \in D$.

We further have

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \bar{x}) = R \quad (26.21)$$

in which

$$\begin{aligned} R &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon u) = \\ &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - X(t, \xi) + X_0(\xi) \right\} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} X_n(\xi) + \varepsilon \{X(t, \cdot) - X(t, \cdot) - \varepsilon u\}. \end{aligned}$$

Hence, in consequence of the inequalities (26.10), (26.11), (26.12) and (26.15) we obtain :

$$|R| \leq 2\lambda a \varepsilon + I_a M =^2 t f(t) + \lambda z^2 t f(t)$$

and thus, in the given interval (26.20), we derive

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\tau\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| d\tau &\leq e^{L\lambda} \int_0^{L/\varepsilon} |R(t)| dt \\ &< \left\{ 2\lambda a L + (I_a M - i) L^2 \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \right\} e^{jL}, \end{aligned}$$

or, by (26.16) and (26.17),

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\tau_1^*}{4} + \frac{\tau_1^*}{4} = \frac{\tau_1^*}{2}$$

so that

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\eta}{2}; \quad \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\tau}{2} \quad (26.22)$$

Now let $x = x(t)$ represent a solution of the equation (26.1) such that $x(0) = \xi(0)$.

Hence, in the interval

$$0 < t < t^*; t^* \leq \frac{L}{\varepsilon} \quad (26.23)$$

in which $x(t) \in D$, we can write

$$|X(t, x) - X(t, \bar{x})| \leq \lambda |x - \bar{x}|,$$

whence, by (26.21), we find that

$$\frac{d(x - \bar{x})}{dt} \leq \lambda \varepsilon |x - \bar{x}| + |R(t)|, \leq x$$

and because the difference $x - \bar{x}$ vanishes when $t = 0$, we have

$$|x - \bar{x}| \leq \int_0^t e^{\varepsilon \lambda (1-\tau)} |R(\tau)| d\tau$$

Therefore, by (26.22) we find that, in the interval (26.23), the inequalities

$$|x - \bar{x}| < \frac{n}{2}, \quad |x - \bar{x}| < \frac{0}{2}$$

are fulfilled. We find from these inequalities that, in consequence of (26.18) and (26.19), the relations

$$|x - \xi| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta; \quad |x - \xi| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) < \rho \quad (26.24)$$

are true.

We will now show that the number t^* may be taken to be equal to $\frac{L}{\varepsilon}$.

In fact, if it cannot be made so, the inequality

$$|x - \xi| < p \quad (26.25)$$

cannot be satisfied in the whole of the interval $(0, \frac{L}{\varepsilon})$, because in the latter case we might have $x(t) \in D$ for any value t in the interval $(0, \frac{L}{\varepsilon})$. But, since the inequality (26.25) is obviously fulfilled for sufficiently small values of t , it becomes clear from considerations of continuity that there exists a value t_1 , such that in the interval $(0, t_1)$ this inequality is satisfied and, moreover,

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| > p - \delta, \quad (26.26)$$

where we can take for δ any number as small as we desire. We now take

$$\delta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho}{2} - F(\varepsilon) \right\} \quad (26.27)$$

and put $t^* = t_1$. This substitution is possible because in the segment $[0, t_1]$ the point $x(t)$ belongs to the domain D . But then, by virtue of (26.24), we have

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) = \rho - 2\delta < \rho - \delta,$$

which contradicts (26.26).

Thus, we may put $t^* = \frac{L}{\varepsilon}$ and the inequalities (26.24) are found to be valid in the interval $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$; this proves our theorem.

We now find that if the domain D is bounded (i.e. it lies in a limited part of the Euclidean space in question), we can exclude from the condition (b) the requirement of uniformity and formulate it as a condition for the existence of the limit (26.4) at each point of this domain.

In fact, in view of the condition (a), the functions

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt$$

satisfy the inequality

$$|F_T(x') - F_T(x'')| \leq i|x' - x''|$$

and thus the sequence of these functions (when $T \rightarrow \infty$) is continuous to the same degree. But, because the domain D , being limited, is compact, any sequence continuous to the same degree and converging at each point of D , is also found to be uniformly convergent.

We further find that since there exists the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

for any almost periodic function $f(t)$, the condition (b) is satisfied for the bounded domain D provided the expression $X(t, x)$ for each point x of D is found to be an almost periodic function of the variable t .

Here, we have examined the question of error in the first approximation only. However, we do not meet with any difficulty in obtaining asymptotic estimates of the error for the higher approximations too.

10.7.2 27. Transformation of the Basic System of Equations

In the present section we shall discuss the problem of the second type, i.e. the problem of correspondence between those properties of the exact and the approximate solutions of the system

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (27.1)$$

that depend on the behaviour of these solutions in an infinite interval of time. At first, we shall examine the simplest case when the equations of the first approximation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (27.2)$$

have a quasi-static solution corresponding to the equilibrium point

$$\xi = \xi_0; \quad X_0(\xi_0) = 0 \quad (27.3)$$

Hence, for solutions of these equations infinitesimally close to ξ_0 , we have the variational equations

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = H\delta\xi, \quad H = \left(\frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (27.4)$$

which are found to be homogeneous linear differential equations with constant coefficients. We examine the characteristic equation corresponding to the equation (27.4) :

$$\text{Det } |pI - H| = 0 \quad (27.5)$$

and represent the general solution of the system (27.4) in the form

$$\delta\xi(t) = \sum_{(1 \leq s \leq n)} C_s u_s(\tau), \quad (27.6)$$

in which C_s are arbitrary constants and $u_s(\tau)$ are linearly independent particular solutions corresponding to the different roots of the characteristic equation (27.5).

For the simple root $\eta = p_s$

$$u_s(\tau) = e^{n_s \tau} \quad (27.7)$$

If this root is a multiple one, then

$$u_s(\tau) = P_s(\tau) e^{\eta_s \tau} \quad (27.8)$$

$P_s(\tau)$ being polynomials in τ whose degree does not exceed the order of the multiplicity of p_s . Thus, if all the roots of the given characteristic equation possess negative real parts, then $\delta\xi$, tends exponentially to zero.

We now assume that the s roots $p_1, p_2, \dots, p_s$ possess negative real parts and that the real parts of the remaining $(n - s)$ roots $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_n$ are all positive.

We examine in this case an s -dimensional manifold of points which we will denote by the symbol $\mathfrak{M}_s$. This manifold is charac

$$\delta\xi_0 = \sum_{1 \leq j \leq s} C_j u_j(\tau_0) \quad (27.9)$$

or, in general case, by

$$\delta\xi_0 = \sum_{1 \leq j \leq s} C_j P_j(\tau_0) e^{p_j \tau_0} \quad (27.10)$$

where all the $p_j (j = 1, 2, \dots, s)$ possess negative real parts.

Hence, for functions $\delta\xi(t)$ having as their initial values the magnitudes (27.10), we obtain

$$\delta\xi(t_0) = \sum_{1 \leq i \leq s} C_i u_i(\tau_0) \quad (27.11)$$

whence we find that in this case, when $t \rightarrow \infty$, $\delta\xi(t)$ tends to zero.

In other words, if $\bar{\delta\xi}(t_0)$ lies in the manifold $\mathfrak{M}_{t_0}$, then $\bar{\delta\xi}(t)$ will exponentially tend to zero; if, on the other hand, $\bar{\delta\xi}(t_0)$ does not lie in this manifold, $\delta\xi(t)$ will diverge from $\mathfrak{M}_{t_0}$ without limit, beginning with sufficiently large values of t . In particular, when the real parts of all the roots of the characteristic equation (27.5) are positive the manifold $\mathfrak{M}_{t_0}$ will degenerate to the point $\delta\xi(t_0) = 0$ and any solution of $\delta\xi(t)$ different from zero will not tend in course of time to zero and, conversely, in course of time $\delta\xi(t)$ will diverge from the manifold $\mathfrak{M}_{t_0}$ without limit.

If the real parts of some of the roots of the characteristic equation (27.5) are equal to zero, then the equations (27.4) possess solutions of the form

$$\delta\xi(t) = e^{i\hat{v}t} \quad (27.12)$$

corresponding to roots with real values of v . However, in this case any arbitrary small change in the form of the equations brought about, for example, by the inclusion of non-linear terms, may radically change the behaviour of the solutions and give rise to damping in or step up the oscillations of the type (27.12). On the other hand, if the real parts of all the roots of the characteristic equation (27.5) are different from zero, the behaviour of the solutions is found to be less sensitive to the inclusion of small additional terms.

In this case we can prove the theorem that the solutions of the exact equations (27.1), lying in the neighbourhood of ξ_n , where ξ_n is a quasi-static solution of the averaged equations (27.2), possess properties that are a natural generalization of the properties of the solutions (27.6), $\delta\xi = \delta\xi(t)$, of which we spoke before. In other words, we can prove theorems stating that under definite conditions the difference between any solution of the exact equations (27.1) and the

quasi-static (quasistationary) solution of the equations (27.1), the initial values of which will belong to the certain point manifold with a number of dimensions equal to the number of roots of the characteristic equation (27.5) with negative real parts, will tend to zero in course of time.

Of course, for the exact equations (27.1) the role of a quasistatic solution will be played by some special solution close to ξ_0 , but depending, in general, on time.

Now, the "improved first approximation"

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \tilde{X}(t, \zeta_{01}) = \xi_0 + \varepsilon \sum_{v \neq 0} \frac{X_v(\xi_n)}{iv} e^{ivt} \quad (27.13)$$

will depend on time and in this case oscillations with external frequencies appearing in the expression

$$X(t, x) = \sum_v X_v(x) e^{ivt} \quad (27.14)$$

will be present.

We further introduce some definitions. Let there be a set S_t of points x corresponding to each t in the interval $(-\infty, \infty)$. This set might be represented mathematically in a parametric form by equations of the type

$$x = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s),$$

in which $f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$ satisfies the Lipschitz conditions for parameters $C_1, C_2, \dots, C_s$ in the whole domain of their variation.

Then we would say that S_t is an s -dimensional integral manifold for the equation (27.1), if for any solution $x = x(t)$ of this equation, there follows from the relation

$$x(t) \in S_t$$

which is valid at any instant of time $t = t_\theta$, its validity for any real t .

For a proof of the theorem on the behaviour of the exact solutions in the neighbourhood of $\frac{5}{7}$, it would be expedient for us to have, besides the condition of non-equality to zero of the real parts of the roots of the characteristic equation (27.5), only the most general conditions.

Thus, we assume that

(a) the function $X(t, x)$ and its partial derivatives of the first order with respect to x are bounded and are uniformly continuous in x in the domain

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho, \quad (27.15)$$

in which D_ρ is a ρ -neighbourhood of the point ξ_ρ ;

(b) at each point of the domain D_ρ

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt \rightarrow X_0(x) \text{ when } T \rightarrow \infty \quad (27.16)$$

uniformly in respect of t in the interval $(-\infty, \infty)$.

Putting into (27.1)

$$x = \xi_0 + b, \quad (27.17)$$

where ξ_0 is the quasi-static solution of the equation (27.2), we can write, with the help of (27.4), the fundamental equation (27.1) in the form

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, b), \quad (27.18)$$

where

$$B(t, b) = Z(t, \xi_0 + b) + X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - \left(\frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} b, \quad (27.19)$$

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x). \quad (27.20)$$

Here, by virtue of (a) and (b), in the p -neighbourhood of the point $b = 0$ the functions $B(t, b)$, $Z(t, \xi_0 + b)$ and their partial derivatives of the first order with respect to b are bounded and uniformly continuous in relation to b in the domain

$$-\infty < t < \infty, \quad |b| \leq p. \quad (27.21)$$

Moreover, at each point of the neighbourhood $|b| \leq \rho$ in question, we have, according to (27.16) and (27.20),

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(t, \xi_0 + b) dt \rightarrow 0 \quad \text{when } T \rightarrow \infty \quad (27.22)$$

uniformly in respect of t : hence it evidently follows that

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t, b) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} B(b) - X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - X'_{0\xi}(\xi_0) b. \quad (27.23)$$

Since $B(b)$, along with its partial derivatives of the first order, becomes zero when $b = 0$, it follows from the condition satisfied by the function $B(b)$,

$$|B(b') - B(b'')| \leq \frac{\partial B(b)}{\partial b} \quad b = \tilde{b} |b' - b''| \quad (b' \leq \tilde{b} \leq b''),$$

that when

$$|b'| < \sigma, |b''| < \sigma \quad (\sigma < \rho)$$

we have the relation

$$|B(b') - B(b'')| \leq \eta(\sigma) |b' - b''| \quad (27.24)$$

where

$$\eta(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{when } \sigma \rightarrow 0$$

It is evident from the expressions (27.19) and (27.20) that if $X(x, t)$ possess partial derivatives (upto the n -th order inclusive) which are bounded and uniformly continuous in relation to b in the domain (27.21), then $B(t, b)$ and $Z(t, \xi_0 + b)$ will also possess these properties.

For future investigation it will be convenient to transform the equation (27.18) into the form

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (27.25)$$

in which $Q(t, h, \varepsilon)$ may be a sufficiently small quantity for small values of h and ε .

However, we would not make this transformation because we can reduce equation (27.18) to an analogous form if we examine a case more general than the one discussed above, viz., to be specific, when the equations of the first approximation (27.2) possess a periodic solution

$$x = \xi(\omega\tau).$$

Hence, we proceed to investigate the case in which the equations of the first approximation (27.2) possess a periodic solution in the ρ -neighbourhood of which the function $X(t, x)$ possesses the properties:

- (a) this function and its partial derivatives of the first order with respect to x are bounded and uniformly continuous in relation to x in the interval solution of the equations of the first approximation,
- (b) at each point of D_p

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt \rightarrow X_0(x) \text{ when } T \rightarrow \infty \quad (27.26)$$

uniformly in relation to t in the interval $(-\infty, \infty)$.

Thus, let the periodic solution of the equations (27.2) be of the form

$$x = \xi(\omega-), \quad (27.27)$$

where $\xi(\varphi)$ is a periodic function of φ , with period 2π .

We construct for equations of the first approximation (27.2) variational equations corresponding to the periodic solution (27.27).

We shall obtain a system of linear homogeneous differential equations with periodic coefficients :

$$\frac{d\delta\zeta}{d\tau} = X'_{0x}\{\xi(\omega\tau)\}\delta\xi. \quad (27.28)$$

According to the definition of the function (27.27) we have identically

$$\omega'_\varphi(\varphi) = X_0\{\xi(\varphi)\}. \quad (27.29)$$

Differentiating this identity with respect to p , it is not difficult to see that for any arbitrary constant δu_0 the expression

$$\delta\zeta = \zeta'_\zeta(\omega-)\delta u_0 \quad (27.30)$$

becomes the solution of the variational equation (27.4).

Before we proceed on to transform the equations (27.1) we make certain remarks on the theory of differential equations with periodic coefficients.

As we know, according to the Floke-Liapounov theorem on the properties of linear homogeneous differential equations with periodic coefficients, a transformation of the type

$$\delta\Xi_k = \xi'_k(\omega\tau)\delta u_0 + \sum_{q=1}^{n-1} A_{kq}(\omega\tau)\delta u_q \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad ((27.3))$$

in which $A_{kq}(\varphi)$ ($k = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, n-1$) are periodic functions of φ , with a period 2π , possessing continuous first derivatives, enables us to reduce the equations with periodic coefficients (27.28) to a system of differential equations with constant coefficients :

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau} = 0; \quad \frac{d\delta u_k}{d\tau} = \sum_{q=1}^{n-1} H_{kq}\delta u_q \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (27.32)$$

the roots of the equation

$$\text{Det } \|pI_{kq} - H_{kq}\| = 0, \quad I_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases} \quad (27.33)$$

will be the characteristic indices for the system (27.28).

Here, it is also convenient to rewrite the system in the matrixvector notation. For this, we introduce the matrix

$$A(\varphi) = \|A_{kq}(\varphi)\| \quad (27.34)$$

with n rows and $(n-1)$ columns, the square matrix $H = \|H_{kq}\|$ of $(n-1)$ -th order and the vector δu with components $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_{n-1}$.

Thus, the transformation (27.31) and the equations (27.32) may be written as

$$\delta \xi = \xi'(\omega\tau)\delta u_0 + A(\omega\tau)\delta u \quad (27.35)$$

$$d\delta u_0 = 0, \frac{d\delta u}{d\tau} = H\delta u \quad (27.36)$$

respectively. Here we note that not only the matrices $A(\varphi)$ and H but also the vector δu is found to be, generally speaking, complex inspite of the fact that the coefficients of the equation (27.28) are themselves real.

We now establish another relation which we shall use in future. For this, we put (27.35) into (27.28). As a result of this substitution we

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'(\varphi)}{d\tau}\delta u_0 + \xi'(\varphi)\frac{d\delta u_0}{d\tau} + \frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\omega\delta u + A(\varphi)\frac{d\delta u}{d\tau} = \\ = X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}\xi'(\varphi)\delta u_0 + X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}A(\varphi)\delta u.. \end{aligned}$$

Taking into consideration that $\xi'_\zeta(\omega-)u_0$ is a solution of the variational equations (27.28) and also the relation (27.36), we obtain the following identity

$$\frac{dA(\xi)}{d\rho} \omega + A(\xi)H = X'_{nx}(\xi); \zeta(\xi); A(\eta), \quad (27.37)$$

and also

$$\frac{dA^*(\rho)}{d\varphi} \omega + A^*(\rho)H^* = X'_{0x}\{\zeta(\eta)\}A^*(\zeta), \quad (I)$$

where $A^*(\varphi), H^*$ are conjugate to $A(\varphi)$ and H respectively.

We now pass on to transform the equation (27.1). For this purpose, we write it in the form

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon Z(t, x) \quad (27.38)$$

where

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x) \quad (27.39)$$

Here we introduce new variables $\varphi, b(b_1, \dots, b_{n-1})$ through the formula^{*}:

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} \{A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*\}, \quad (27.40)$$

where b and b^* are mutually conjugate quantities.

Putting (27.40) into (27.38) we obtain

$$\begin{aligned} & \xi'_\varphi(\varphi) \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{2} \{A'_\varphi(\rho)b + A^*_\varphi(\varphi)b^*\} + \frac{1}{2} \{A(\varphi) \frac{db}{dt} + A^*(\varphi) \frac{db^*}{dt}\} = \\ & = \varepsilon X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + \right. \\ & \quad \left. + A^*(\varphi)b^*] \right\} = \varepsilon X_0 \{ \xi(\varphi) \} + \varepsilon X'_{0x} \{ \xi(\varphi) \} \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] + \\ & \quad + \varepsilon [X_0 \left\{ \xi + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} - X_0 \{ \xi(\varphi) \} - \\ & \quad - X'_{0x} \{ \xi(\varphi) \} \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]] + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + \right. \\ & \quad \left. + A^*(\varphi)b^*] \right\} \end{aligned}$$

*) This change of variables is different from the one made in the previous edition in that for any complex b the expression x is real. Academician L.S. Pontryagin drew our attention to the necessity of preserving the real character of x . We express our deep gratitude to him for this. whence, taking into consideration the relation (27.29) and the identities (27.37) and (27.37'), we obtain

$$\begin{aligned} & \left[\xi'_\varphi(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi)b + A''_\varphi(\varphi)b^*) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \frac{1}{2} \left[A(\varphi) \left(\frac{db}{dt} - Hb \right) + \right. \\ & \quad \left. + A^*(\varphi) \left(\frac{db^*}{dt} - H^*b^* \right) \right] = \varepsilon \left[X_0 \left\{ \xi + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} - \right. \\ & \quad \left. - X_0 \{ \xi \} - \frac{1}{2} X'_{0x} \{ \xi \} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right] + \\ & \quad + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} \end{aligned} \quad (27.41)$$

The system of equations (27.41) may be written in the form

$$\begin{aligned} & \left[\check{\xi}'_\varphi(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi)b + A''_\varphi(\varphi)b^*) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[A(\varphi) \left(\frac{db}{dt} - Hb \right) + A^*(\varphi) \left(\frac{db^*}{dt} - H^*b^* \right) \right] = Y, \end{aligned} \quad (27.42)$$

where Y is a real function.

We derive from the system the variables

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega, \frac{db}{dt} - Hb = R \quad (27.43)$$

such that the condition*)

$$R = R^* \quad (27.44)$$

is satisfied and hence

$$\frac{db^*}{dt} - H^*b^* = R$$

may also be satisfied.

Considering the condition (27.44), we obtain from the system (27.42) a system of linear equations with real coefficients related to expressions (27.43) :

$$\begin{aligned} & \left[\xi'_\varphi(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi)b + A''_\varphi(\varphi)b^*) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \frac{1}{2} (A(\varphi) + \\ & \quad + A^*(\varphi)) R = Y. \end{aligned} \quad (27.45)$$

*) Since in this case the values of b are complex there is always some arbitrariness in the choice of R . The choice of the additional conditions in the form (27.44) does not appear to be compulsory. We might also choose other more convenient forms of the additional conditions.

We recall here that Y and $\xi(\xi)$ are n -dimensional vectors ; R and b are $(n-1)$ -dimensional vectors and A is a matrix having n rows and $(n-1)$ columns. We assume that the determinant of this system

$$D(\varphi, b) = \xi'(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_{\varphi}(\varphi)b + A''_{\varphi}(\varphi)b^*), \frac{1}{2} (A(\varphi) + A^*(\varphi)) \quad (27.46)$$

is non-zero when $b = 0^*$. Hence, due to the continuity it will remain non-zero also in some δ -neighbourhood of the point $b = 0$.

We would conventionally denote the δ -neighbourhood of the point $b = 0$ in which the determinant $D(\varphi, b)$ is different from zero by the symbol U_{δ} . The domain of variation in the values of (ε, b) for which b changes in U_{δ} will be denoted by the symbol $\Omega_{U_{\delta}}$.

We note that it is always possible to take so small a positive value of δ that the inequality

$$\frac{1}{2}A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^* <_p$$

is satisfied in the domain $\Omega_{U_{\delta}}$ ($b, b^* \in U_{\delta}$) and hence

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*)$$

may be found in the domain D_{ρ} where D_{ρ} is the ρ -neighbourhood of the periodic solution of $\xi(\varphi)$ in which the function $X(t, x)$ satisfy the conditions (a) and (b) (vide page 441).

Since the combination within the brackets is always real there is no necessity of generalising the functions $X(t, \phi)$ for complex values of x .

Solving the system of equations (27.45) in the domain U_{δ} for the variables (27.43), we derive

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b) \\ \frac{db}{dt} & \end{aligned} \right\} \quad (27.47)$$

*) The dependence of $D(\varphi, b)$ on b^* will not be shown here for the sake of facility in writing.

where *)

$$\begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= K(\varphi, b) \left[X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. - X_0' \{ \xi(\varphi) \} - X_{0x}' \left\{ \xi(\varphi) \right\} \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right] + \\ &\quad + L(\varphi, b) Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\}, \\ B(t, \varphi, b) &= M(\varphi, b) \left[X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} - X_0' \{ \xi(\varphi) \} - \right. \\ &\quad \left. - X_{0x}' \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} \right] + N(\varphi, b) Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\}; \end{aligned}$$

$W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$ appear here as real functions.

Here, $K(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$ and $N(\varphi, b)$ represent the minors of the determinant (27.46) divided by the determinant itself and are rational functions of b , regular when $b = 0$ (regular in the sense that $b = 0$ is not a singular point).

By virtue of the properties of the functions $A(\varphi)$, the coefficients of the powers of b in the expressions for $K(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$ and $N(\varphi, b)$ are continuous periodic functions of φ with a period 2π and possess continuous derivatives with respect to φ upto the second order inclusive.

Since, in the domain $\Omega_{U_{\delta}}$, we have the relation

$$\frac{1}{2} |A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*| < \varphi$$

and $\xi'(\varphi)$ is also bounded by virtue of (27.29) and moreover since the functions $A(\varphi)$ and $\xi(\varphi)$, with their partial derivatives, upto the second order inclusive, are continuous, the functions $K(\varphi, b)$, $M(\rho, b)$, $L(\rho, b)$ and $N(\varphi, b)$, along with their partial derivatives of the first order, will also be bounded and continuous in this domain.

Hence, by virtue of (27.39) and (27.48) where $X(t, \lambda)$ possess bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to x upto the second order inclusive in the domain

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_p,$$

*) For the sake of simplicity, we have not shown the dependence of $W(t, c, b)$ and $B(t, p, b)$ on b^* . In future we will not show the dependence of these functions on b^* . it follows that in the domain

$$-\infty < t < \infty, \quad (\varphi, b) \in \Omega U_2$$

the functions $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \rho, b)$, and their partial derivatives of the first order with respect to (ρ, h) , will also be bounded and uniformly continuous in respect of (ρ, b) .

Further, from the relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt &\rightarrow X_0(x), T \rightarrow \infty \\ Z(t, x) &= X(t, x) - X_0(x) \end{aligned}$$

we have

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(t, x) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty$$

Hence, it follows from (27.48) that at any point of the domain (27.49)

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} W(t, \varphi, b) dt \rightarrow W(\varphi, b); \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t, \rho, b) dt \rightarrow B(\rho, b) \quad (27.50)$$

uniformly in relation to t when $T \rightarrow \infty$; here

$$\begin{aligned} W(\varphi, b) &= K(\varphi, b) \left[X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\xi)b^*) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - X_0 \{ \xi(\varphi) \} - X'_{0x} \{ \xi(\varphi) \} \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right], \\ B(\varphi, b) &= M(\varphi, b) \left[X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\rho)b^*) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - X_0 \{ \xi(\varphi) \} - X'_{x0} \{ \xi(\varphi) \} \cdot \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right]. \end{aligned} \quad (27.51)$$

As we see from (27.51), the functions $W(\rho, b)$ and $B(\rho, b)$, along with their partial derivatives of the first order, become zero when $b = 0$.

Hence, taking any arbitrary positive quantity $\sigma < \delta$, we may write the following obvious relations for the functions $W(\varphi, b)$ and $B(\varphi, b)$:

$$\begin{aligned} |W(\varphi', b') - W(\varphi'', b'')| &\leq \frac{\partial W(\varphi, b)}{\partial \varphi} \sum_{b=\frac{\sigma}{b}} - |\varphi' - \varphi''| + \frac{\partial W(\varphi, b)}{\partial b} \sum_b |b' b''| \\ |B(\varphi', b') - B(\varphi'', b'')| &\leq \frac{\partial B(\varphi, b)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}} |\varphi' - \varphi''| + \frac{\partial B(\varphi, b)}{\partial b} \Big|_{b=\tilde{b}} |\tilde{\varphi}| |b' - b''| \end{aligned}$$

$$\left(|b'| \leq \sigma; |b''| \leq \sigma; \varphi' \leq \tilde{\varphi} \leq \varphi''; b' \leq \tilde{b} \leq b'' \right),$$

whence follow the inequalities valid in the domain ΩU_σ :

$$\left. \begin{aligned} |W(\varphi', b') - W(\varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{ |\varphi' - \varphi''| + |b' - b''| \}, \\ |B(\varphi', b') - B(\varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{ |\varphi' - \varphi''| + |b' - b''| \}, \end{aligned} \right\} \quad (27.52)$$

where $\eta(\sigma) \rightarrow 0$ when $\sigma \rightarrow 0$.

We now return to the expressions (27.48) for $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$. The functions $K(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$ and $N(\varphi, b)$, as it has already been shown above, (page 446), are continuous and periodic functions of φ with period 2π . Other functions appearing in the expressions for $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$:

$$\begin{aligned} &X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}, X_0 \{ \xi(\varphi) \}, \\ &X'_{0z} \{ \xi(\varphi) \}, A(\varphi), Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}, \end{aligned}$$

are also found to be periodic in φ by virtue of their definition.

Hence, $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$ are periodic functions of φ , with period 2π .

Moreover, if $\{\tau_m\}$ is a sequence of R , for which the difference $X(t + \tau_m, x) - X(t, x)$ tends uniformly to zero in the domain RD_ρ when $m \rightarrow \infty$, it follows from the expressions (27.39) and (27.48) that

$$\begin{aligned} W(t + \tau_m, \varphi, b) - W(t, \varphi, b) &\rightarrow 0 \\ &(\text{when } m \rightarrow \infty) \\ B(t + \tau_m, \varphi, b) - B(t, \varphi, b) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (27.53)$$

uniformly in the domain $R\Omega U_\delta$.

We now impose another restrictive condition on the system (27.1) by stipulating that the real parts of all the $(n - 1)$ roots of the characteristic equation (27.33) are different from zero. At the same time we would further impose the condition that the real parts of the $(n - 1)$ characteristic indices*) for the variational equations (27.28) are also not equal to zero.

We finally note that by introducing the new variables $b = b(h_1, \dots, h_{n-1})$, according to (27.40) we obtain instead of the system (27.1) the system (27.47) which is in fact equivalent to the former.

Now, let φ and $b(b_1, \dots, b_{n-1})$ satisfy the system of equations (27.47). Under the condition (27.48) the system (27.45) is identically true and hence

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*)$$

identically satisfies the system of equations (27.1).

For the sake of facility in the future study of equations (27.47), it will be found convenient to transform these by introducing new variables $g, h(h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ such that

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon) \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (27.54)$$

where $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ may be sufficiently small for small values of h and ε .

For this, we would examine a certain function $f(t, x)$, defined for all real values of t and for all x belonging to the set E . We assume that E is a compact set of a certain metric space and that at each point of E ,

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \rightarrow 0, T \rightarrow \infty \quad (27.55)$$

uniformly in relation to t .

Moreover, we assume that we may find such positive constants M and λ that for all real values of t and for all x, x' and x'' belonging to E the inequality

$$|f(t, x)| \leq M; |f(t, x') - f(t, x'')| \leq \rho(x', x'') \quad (27.56)$$

is satisfied. In this inequality, $\rho(x', x'')$ is the distance between the points x' and x'' .

It is not difficult to find that from the above conditions it follows that the relation (27.55) is satisfied uniformly not only in respect of t but also in respect of (t, x) .

Hence, we can construct such a function $\varepsilon(T)$, tending to zero when $T \rightarrow \infty$, that we would have the inequality

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \leq \varepsilon(T), -\infty < t < \infty, x \in E \quad (27.57)$$

We now take any arbitrary quantity η and construct the function

$$f_\eta(t, x) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x) d\tau \quad (27.58)$$

Introducing the new variable z in place of τ by the formula $z = t - \tau$, we can write $f_\eta(t, x) = \int_0^\infty e^{-\eta z} f(t - z, x) dz = \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) e^{-\eta(z-nT)} dz$,

and, hence, we obtain by (27.56) (27.59)

$$\begin{aligned} |f_n(t, x)| &= \left| \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} [f(t - z, x) e^{-\eta(z-nT)} + \right. \\ &+ f(t - z, x) - f(t - z, x)] dz \left| = \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) dz - \right. \\ &- \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) (1 - e^{-\eta(z-nT)}) dz \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) dz + \\ &+ M \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} (1 - e^{-\eta(z-nT)}) dz = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) dz \left| + MT \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} + M \frac{1}{\eta} e^{-\eta T} \leq \right. \\ &\leq \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - z, x) dz + MT \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^\infty e^{-\eta nT} \int_{nT}^{nT+T} f(t, x) dt + MT \quad (27.60) \end{aligned}$$

^{0*)} The n -th characteristic index is equal to zero because: of the assumption of the existence of a periodic solution.

or, in view of (27.57),

$$|f_n(t, x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-r_n T z(T) T + M T = \int_1^{T z(T)} e^{-(T + M T)} e^{-(27.61)}$$

Uptil now the quantity T was taken to be arbitrary. We now take T as a function of n determined by the equation

$$1 - e^{-\eta_1 T} = \varepsilon(T) \quad (27.62)$$

Since $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ when $T \rightarrow \infty$, it is not difficult to see that for the function T_n , defined by this equation the condition

$$\eta T_n \rightarrow 0 \text{ when } r_1 \rightarrow 0$$

must be satisfied.

We now put

$$(M + 1)\eta T_n = \zeta(\eta_1).$$

Hence, we find from (27.61) and (27.58) that for the given function $f(t, x)$ the inequality

$$\int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x) d\tau \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, -\infty < t < \infty, x \in E \quad (27.63)$$

is satisfied and in this

$$\zeta(\eta) \rightarrow 0 \text{ when } \eta_1 \rightarrow 0. \quad (27.64)$$

Thus we obtain the inequality (27.63) for the function $f(t, x)$, possessing the following properties:

1. $f(t, x)$ is defined for all real values of t and for $x \in E$ where E is a compact set ;
2. at each point of E

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

uniformly in respect of t :

- 3) $|f(t, x)| \leq M, |f(t, x') - f(t, x'')| \leq x_0(x', x'') :$
- 4) when (3) is fulfilled the tendency to the limit (2) is uniform in respect of (t, x) .

We now obtain inequalities of the type (27.63) for the functions

$$\left. \begin{aligned} W_1(t, \varphi, b) &= O'(t, \varphi, b) - O'(\varphi, b) \\ W_1(t, \varphi, b) &= B(t, \varphi, b) - B(\varphi, b), \end{aligned} \right\} \quad (27.65)$$

taking the domain ΩU_δ as the set E .

Since these functions are periodic in φ with period 2π we may evidently represent Ω as a neighbourhood and hence $E = \Omega U_\delta$ will be a compact domain in the metric space which will be a topological product of Ω and the $(n - 1)$ -dimensional Euclidean space.

Moreover, by virtue of (27.50), at any point of the domain ΩU_δ

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_1(t, \varphi, b) dt \rightarrow 0; \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B_1(t, \varphi, b) dt \rightarrow 0, \text{ when } T \rightarrow \infty, \quad (27.66)$$

uniformly in respect of t .

It is also obvious that the functions $\partial Y_1(t, \varphi, b)$ and $B_1(t, \varphi, b)$, and also the functions $\gamma(\varphi, b)$ and $B(\varphi, b)$, satisfy, in the domain ΩU_σ where $\sigma < \delta$, inequalities of the type

$$|W_1(t, \varphi', b') - W_1(t, \varphi'', b'')| \leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \quad (27.67)$$

$$|B_1(t, \varphi', b') - B_1(t, \varphi'', b'')| \leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}$$

$$(|b'| \leq \sigma, |b''| \leq \sigma),$$

where

$$\eta(\sigma) \rightarrow 0 \text{ when } \sigma \rightarrow 0.$$

Hence, we can construct the function $\zeta(\eta)$ with the property (27.64) such that for any arbitrary positive η the inequalities

$$|W_{1\eta}(t, \varphi, b)| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}; |B_{1\eta}(t, \varphi, b)| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta} \quad (27.68)$$

$$-\infty < t < \infty, (\varphi, b) \in \Omega U_\delta$$

hold. Here

$$\left. \begin{aligned} W_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(t, \varphi, b) d\tau \\ B_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(t, \varphi, b) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (27.69)$$

Now we introduce, in analogy with the definition (26.5), function

$$\Delta_a(b) = \begin{cases} A_a \{1 - |b|^2\}^{2\pi}, & |b| < a, \\ 0, & |b| > a, \end{cases} \quad (27.70)$$

in which a is a certain given, sufficiently small, number, A_a is defined by the condition of normalisation :

$$\int_{U_0} \Delta_a(b) db = 1 \quad (27.71)$$

where $db = db_1 \dots db_{n-1}$.

In (27.70) $q > 1$ is some fixed integer whose value may be taken to be as large as desired.

We now construct the function $\partial_a(\varphi)$ of a single real variable φ , defining it to hold in the interval $(-\pi, \pi)$, with the help of the relations :

$$\delta_a(\varphi) = \begin{cases} \Phi_a \left\{ 1 - \frac{\varphi^2}{a^2} \right\}^{2\pi}, & |\varphi| \leq a \\ 0, & |\varphi| > a \\ \int_{-a}^a \delta_a(\varphi) d\varphi = 1, & a < \pi \end{cases} \quad (27.72)$$

and further extend its domain of definition along the entire real axis with the help of the condition of periodicity with period 2π .

Introducing this function we construct the expressions

$$\left. \begin{aligned} u(t, \varphi, b) &= \iint_{\Omega} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') W_{1\eta}(t, \varphi', b') d\varphi' db' \\ v(t, \varphi, b) &= \iint_{\Omega} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') B_{1\eta}(t, \varphi', b') d\varphi' db' \end{aligned} \right\} \quad (27.73)$$

having period 2π with respect to φ because, according to the definition, $\delta_a(\varphi)$ is a periodic function of φ with period 2π .

We note that, according to its construction, the function

$$\delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \quad (27.74)$$

possesses partial derivatives with respect to φ and b upto the order $2q$ inclusive. Moreover, since $\Delta_a(b)$ and $\delta_a(\varphi)$ are non-zero when $|b| \leq a$ and $|\varphi| \leq a$, respectively, the function (27.74) and its partial derivatives up to the order $2q$ inclusive are bounded and do not exceed in norm some magnitude $G(a)$ which, in general, tends to ∞ when $a \rightarrow 0$. Hence, from (27.68) we can conclude that the function (27.73) and all of its partial derivatives with respect to p and b (upto the order $2q$ inclusive) are bounded in norm in the set*) $R\Omega U_\delta$ by the magnitude $G(a)^{\zeta(\eta)}$.

Uptil now a and η were arbitrary. Now we take for a and η certain functions a_ε and η_ε of the parameter ε such that

$$\left. \begin{aligned} a_\varepsilon \rightarrow 0, r_{i\varepsilon} \rightarrow 0, \varepsilon G(a)^{\zeta(\eta_\varepsilon)} \eta_\varepsilon \rightarrow 0, \\ G(a_\varepsilon) \Leftarrow (r_{i\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ when } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (27.75)$$

We take a certain positive number $\rho_0 < \delta$ and take ε^* so small that for $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $a = a_\varepsilon$, would also satisfy the inequality

$$a + \rho_0 < \delta \quad (27.76)$$

We note that the inequalities

$$|b| < \rho_0, |b - b'| \leq a \text{ and } a + \rho_0 < \delta$$

lead to the result

$$|b'| < \delta$$

Hence, taking into consideration the definitions (27.70) and (27.71) of the function $\Delta_a(b)$, we find that when $b \in U_{\rho_0}$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$,

$$\int_{U_\delta} \Delta_a(b - b') db' = 1 \quad (27.77)$$

Now, taking into consideration (27.69), we write the expression (27.73) for $u(t, \varphi, b)$ in the form

$$u(t, \varphi, b) =$$

$$= \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_i(t-\xi)} W_1(t, \varphi', b') d\xi \right] d\varphi' db \quad (27.78)$$

*) For the sake of brevity, we have denoted here the real axis $(-\infty, \infty)$ by R so that $R\Omega U_i$ denotes the set of points (t, p, b) , for which $-\infty < t < \infty, p \in \Omega, b \in U_\delta$.

Hence, we have

Hence,

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + \tau_1 u = \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1, t-\eta)} W_1(-, \sigma', b') d\sigma' + \right. \\ \left. + \eta_{-\infty} e^{-\eta_1(t-\eta)} W_1(-\eta', b') d\eta' \right\} d\sigma' db', \quad (27.79) \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau = -\eta_1 \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \zeta', b') d\tau + \\ + W_1(t, \zeta', b'), \end{aligned}$$

it follows from (27.79) that

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u = \int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b - b') W_1(t, \var', b') d\var' db'$$

By virtue of the periodicity of $\delta_a(\rho)$ and the relation (27.77) for $(t, \varphi, b) \in R\Omega U_{\rho_0}$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$,

we have

$$\int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b, b') d\var' db' = \int_{\Omega} \delta_a(\varphi - \var') d\var' = \int_{\Omega} \delta_a(\var') d\var' = 1.$$

Hence, for these values of t, q and b , we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_1 u - W_1(t, \varphi, b) &= \iint_{\Omega} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b - b') \{W_1(t, \var', b') - \\ &\quad - W_1(t, \varphi, b)\} d\var' db' \end{aligned} \quad (27.82)$$

On the other hand, we note that on the basis of (27.67) we can find such a positive number λ that the inequality

$$\begin{aligned} |W_1(t, \var', b') - W_1(t, \varphi, b)| &\leq \lambda \{|\var' - \varphi| + |b' - b|\} \\ (t, \varphi, b), (t, \var', b') &\in R\Omega U_{\delta} \end{aligned} \quad (27.83)$$

is satisfied.

Owing to the periodicity of $\delta_a(\varphi)$ in φ , integration over $\var'$ may be performed over any interval of duration 2π ; in particular, we may take the interval

$$\varphi - \pi, \varphi + \pi$$

as the range of integration. With this choice of the interval, $\varphi - \var'$ will change from $-\pi$ to π and consequently, by virtue of (27.72), $\delta_a(\varphi - \var')$ will be non-zero only when

$$|\varphi - \var'| \leq a.$$

Hence, since for $|\varphi - \var'| \leq a(a < \pi)$, $|b - b'| \leq a$, $b \in U_{\rho_0}$ ($p_0 + a < \delta$), $\varepsilon < \varepsilon^*$,

$$\int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_n(b - b') d\var' db' = 1$$

we have the inequality, for $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ and over $R\Omega U_{\rho_0}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r_1 u - W_1(t, \varphi, b) \leq 2\lambda a \int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b - b') d\var' db' = 2\lambda a \quad (27.84)$$

We now examine the partial derivatives

$$\frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + r_1 u - W_1(t, \varphi, b) \right\}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \eta_1 u - W_1(t, \varphi, b) \right\} \quad (27.85)$$

and find that with the help of the expression (27.78), after integrating it by parts, they can be written in the form

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b - b') &\left\{ \frac{\partial W_1(t, \var', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b} \right\} d\var' db', \\ \int_{\Omega} \int_{U_{\delta}} \delta_a(\varphi - \var') \Delta_a(b - b') &\left\{ \frac{\partial W_1(t, \var', b')}{\partial \var'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi} \right\} d\var' db'. \end{aligned} \quad (27.86)$$

By virtue of the definition of the functions $W_1(t, \varphi', b')$ and $W_1(t, \varphi, b)$, their partial derivatives with respect to b, b', φ and φ' will be continuous functions. Hence, we can find a monotonic function $\xi(\varepsilon)$, tending to zero for $\varepsilon \rightarrow 0$, such that

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b} &\leq \xi(\varepsilon) \{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\}, \\ \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi} &\leq \xi(\varepsilon) \{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\}. \end{aligned} \right\} \quad (27.87)$$

Arguing as before, i.e. taking $n - 7$ as the range of integration in which $\delta_a(\rho - \rho')$ will be non-zero and also taking into consideration (27.82) which is valid when $|b' - b| = a$, we find that the derivatives (27.85) will, in the set $R\Omega U_{\rho^n}$ and for $0 < z < z^*$, be less in norm than $2Ea$. Since by virtue of (27.75) $a \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$, it is obvious that the function (27.82) and its partial derivatives with respect to b and s , in the set $R^\Omega U_{\rho^0}$ and for $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, will be less in norm than $2 \leq a$.

Since by virtue of (27.75) $a \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$, we find that the function (27.82) and its partial derivatives with respect to b and s , in the set $R\Omega U_{\rho^0}$, will be less in norm than a certain magnitude $2(\varepsilon)$ tending to zero along with ε .

Similarly, we find that the function

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \tau_v v - B_1(t, \tau_c, b)$$

also possesses the same properties.

Further, the functions $\tau_i u$ and $\tau_i v$ and their partial derivatives with respect to φ and b are bounded in norm, in the set $RQU_{=0}$, by the magnitude $G(a)\zeta(r_1)$ which tends to zero when $z \rightarrow 0$.

Thus, the functions

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - W_1(t, \varphi, b) &= \frac{\partial u}{\partial t} - W(t, \varphi, b) + W(\varphi, b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B_1(t, \varphi, b) &= \frac{\partial v}{\partial t} - B(t, \varphi, b) + B(\varphi, b) \end{aligned} \right\} \quad (27.88)$$

and their partial derivatives of the first order with respect to b and s are bounded in norm in the set $R\Omega U_{g_0}$ by the magnitude $x(\varepsilon)$ which tends to zero along with ε .

After noting this, we turn to equation (27.47), effecting a change of variables

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h); b = h + \varepsilon v(t, g, h). \quad (27.89)$$

Differentiating (27.89) and putting the result into (27.47), we have $\frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u dg}{\partial g dt} + \frac{\partial u dh}{\partial h} \frac{dh}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \omega + \varepsilon W\{t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v\}$,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v dg}{\partial g} dt + \varepsilon \frac{\partial v dh}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon Hh + \varepsilon^2 Hv + \\ &+ \varepsilon B\{t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{or} \\ \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - W(t, g, h) + W(g, h) \right\} + \\ &+ \varepsilon \{W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h)\} + \varepsilon \omega, \\ \frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} - B(t, g, h) + B(g, h) \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 Hv + \varepsilon \{B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h)\} + \\ &+ \varepsilon B(g, h) + \varepsilon Hh. \end{aligned} \right\} \quad (27.90)$$

We now take such a small value $\varepsilon_1 < \varepsilon^*$ that for any positive ε not exceeding ε_1 , we have the inequality

$$= G(a)\zeta(\eta_1) < \delta - \rho_1, 0 < \rho_1 < \delta. \quad (27.91)$$

Hence, in view of the fact that the functions (27.73) are bounded by $G(a)\zeta(\eta)$, it follows that

$$|\varepsilon v| \leq \varepsilon G(a) \zeta(\eta) \quad (27.92)$$

and when $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ and $(t, g, h) \in R\Omega U_{\rho_1}$, we shall have

$$|h + \varepsilon v| \leq \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta_1} + \rho_1 < \delta. \quad (27.93)$$

But, as was shown above, the functions

$$W(t, \varphi, b) - W(\varphi, b), B(t, \varphi, b) - B(\varphi, b)$$

for values $b \in U_\delta$, are found to be bounded in the set $R\Omega U_\delta$, along with their partial derivatives tending to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$.

Hence, since $h + sv \in U_\delta$, we find that the functions

$$\left. \begin{aligned} W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h), \\ B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h) \end{aligned} \right\} \quad (27.94)$$

and their partial derivatives of the first order with respect to g and h are bounded in norm in the set $R\Omega U_{2_1}$ by a certain function that tends to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$. In view of the fact that the functions (27.88) also possess these properties, the expressions

$$\begin{aligned} L_1(t, g, h, \varepsilon) = W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h) - \frac{\partial u}{\partial t} + W(t, g, h) - \\ - W(g, h), \\ - B(g, h) + \varepsilon H v \end{aligned}$$

and their partial derivatives of the first order with respect to z and h are bounded in the set $R\Omega U_{\rho_1}$ by a certain function of z and h which tends to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$. After noting this, we present the expression (27.90) in a form which is obtained after we have solved for z .

For this we take the matrix inverse to the matrix of the n -th order

$$\begin{vmatrix} 1_1 + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial g} & \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h} \\ \frac{\partial v}{\partial g} & 1_{n-1} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \end{vmatrix} \quad (27.95)$$

where 1_{n-1} represents the square unit matrix of $(n-1)$ -th order.

As we have said above, functions (27.73) and all their partial derivatives with respect to φ and b up to the order $2q$ inclusive are bounded in norm, in the set $R\Omega U_o$, by the magnitude $G(a) \frac{(r_i)}{r_1}$.

Obviously, for values $(t, g, h) \in R\Omega U_{p_1}$, where $p_1 < 0$, the functions $u(t, g, h)$ and $v(t, g, h)$ will also be bounded in norm in the set $R\Omega U_{F_1}$ along with their partial derivatives of the first order with respect to g and h by the function $x(\varepsilon)$ which tends to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$.

Hence, we can find such a positive number $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ that for any positive value $\varepsilon < \varepsilon_0$ the matrix inverse to the matrix (27.95) would always exist in $R\Omega U_{g_1}$ and may be represented in the form

$$\begin{pmatrix} 1_1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1_{n-1} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad (27.96)$$

where

$$a_{11}(t, g, h, \varepsilon), a_{12}(t, g, h, \varepsilon), a_{21}(t, g, h, \varepsilon), a_{22}(t, g, h, \varepsilon)$$

and their partial derivatives of the first order with respect to g and h would tend to zero uniformly in $R\Omega U_{\rho_1}$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

By solving the system of equations (27.90) for $\frac{dg}{dt}$ and $\frac{dh}{dt}$, we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon \Pi(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (27.97)$$

where

$$\begin{aligned} \Pi(t, g, h, \varepsilon) &= W(g, h) + a_{11}(t, g, h, \varepsilon) \{\omega + W(g, h) + L_1(t, g, h, \varepsilon)\} + \\ &+ a_{21}(t, g, h, \varepsilon) \{Hh + B(g, h) + L_2(t, g, h, \varepsilon)\} + L_1(t, g, h, \varepsilon); \\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &= B(g, h) + a_{12}(t, g, h, \varepsilon) \{\omega + W(g, h) + \\ &+ L_1(t, g, h, \varepsilon)\} + a_{22}(t, g, h, \varepsilon) \{Hh + B(g, h) + \end{aligned} \quad (27.98)$$

We would now make some remarks on the properties of the functions $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ and $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ which will be necessary for further analysis.

As we see from (27.98), functions $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ and $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ are defined for every positive $\varepsilon < \varepsilon_0$ in the set $R\Omega U_{\rho_1}$ and the functions

$$\Pi(t, g, h, \varepsilon) - W(g, h), \Gamma(t, g, h, \varepsilon) - B(g, h)$$

and their partial derivatives with respect to g and h tend to zero uniformly when $\varepsilon \rightarrow 0$.

Taking into consideration (27.51), we conclude that it will be possible to find such functions $M(\varepsilon)$ and $\lambda(\varepsilon, \sigma)$ satisfying the conditions that $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$ and $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ that we have the inequalities

$$\begin{aligned} |\Pi(t, g, 0, \varepsilon)| &\leq M(\varepsilon); |\Gamma(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon), \\ \varepsilon &< \varepsilon_0, t \in R, g \in \Omega. \end{aligned} \quad (27.99)$$

$$\left. \begin{aligned} |\Pi(t, g', h', \varepsilon) - \Pi(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{|g' - g''| + \\ &+ |h' - h''|\}, \\ |\Gamma(t, g', h', \varepsilon) - \Gamma(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{|g' - g''| + \\ &+ |h' - h''|\}, \\ (t, g', h'), (t, g'', h'') &\in R\Omega U_\sigma, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \end{aligned} \right\} \quad (27.100)$$

where σ is an arbitrary positive number less than ρ_1 .

The functions $\Pi(t, g, h, \varepsilon), \Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ have period 2π with respect to g , because this is the property possessed by the functions that appear in the expression for $\Pi(t, g, h, \Sigma)$ and $\Gamma(t, g, h, \Sigma)$. Since the functions $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ and $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ (see (27.98)) are expressed by functions which in turn are expressed by $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$ it is clear that if $\{\tau_m\}$ is such a sequence in R for which the relations (27.53) hold uniformly in $R\Omega U_\delta$, we would have for this sequence

$$\left. \begin{aligned} \Pi(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Pi(t, g, h, \varepsilon) &\rightarrow 0 \\ \Gamma(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (27.101)$$

uniformly in $R\Omega U_{\rho_1}$ when $m \rightarrow \infty$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\rho_2}$.

If the condition (a) (vide page 441) of boundedness and uniform continuity of the partial

derivatives of the function $X(t, x)$ with respect to x is supplemented by the requirement of boundedness of the partial derivatives upto the m -th order inclusive, the functions $\Pi(t, g, h, z)$ and $I(t, g, h, \varepsilon)$ will also possess bounded and uniformly continuous partial derivatives upto the m -th order inclusive. This follows from an examination of the formulae (27.66), (27.69), (27.73) and (27.89).

Now, turning to the equations (27.97), we would convert them in terms of "slowing time" by putting

$$\tau = \varepsilon t.$$

We thus obtain

$$\left. \begin{aligned} dg &= \omega + I \left(\frac{\tau}{d\tau}, g, h, \varepsilon \right) \\ dh &= Hh + \Gamma \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon \right) \end{aligned} \right\} \quad (27.102)$$

We would now separate out for discussion a particular case which will be examined in detail in §30. It arises when the functions $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$, entering into the equation (27.47), have the form

$$\left. \begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= W(t, \varphi + vt, h), \\ B(t, \varphi, h) &= B(t, \varphi + vt, b), \end{aligned} \right\} \quad (27.103)$$

where $\bar{W}(t, \varphi, b)$ and $\bar{B}(t, \varphi, b)$ are periodic in t with a constant period T .

Hence, by virtue of the formulae (27.66), (27.69), (27.73) and (27.89), we see that

$$\begin{aligned} I(t, g, h, \varepsilon) &= I(t, g + vt, h, \varepsilon) \\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &= \bar{\Gamma}(t, g + vt, h, \varepsilon) \end{aligned}$$

where $\Pi(t, g, h, \Sigma)$ and $I(t, g, h, \Sigma)$ will have the same period T .

In the particular case (27.103) under examination, we change over to a new angular variable θ :

$$g + vt = g + \frac{v\tau}{\varepsilon} = \theta,$$

and obtain, instead of the system of equations (27.102),

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \omega + \frac{v}{\varepsilon} + \Pi \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}, \theta, h, \varepsilon \right), \\ dh &= Hh + \Gamma \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \theta, h, \varepsilon \right), \end{aligned} \right\} \quad (27.104)$$

the right-hand-sides having the period εT in τ .

As we see, equations (27.102), in the particular case (27.103), and equations (27.104) to which the fundamental equations

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b)$$

and

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \rho, b)$$

are reduced by the change of variables

$$\begin{aligned}\varphi &= g + \varepsilon u(t, g, h, \varepsilon), b = h + \varepsilon v(t, g, h, \varepsilon), \\ \varepsilon t &= \tau, \quad g + vt = \theta,\end{aligned}$$

may be reduced to the type :

$$\left. \begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon) \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon)\end{aligned}\right\} \quad (27.105)$$

In this case, by virtue of the above-mentioned properties of the functions $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ and $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$, we can find such positive numbers ε_0 and ρ_1 ($\rho_1 < \delta$) that the following conditions are satisfied:

- (a) function $G(\varepsilon)$ is defined for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$;
- (b) functions $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ are defined in the domain

$$t \in R, g \in \Omega, h \in U_{\rho_1}, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

and possess period 2π in the angular variable g (let us refer back to the fact that in the particular case (27.103) $\Pi(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon)$ and $\Gamma(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon)$ in equation (27.104) possess a period εT in respect of τ);

- (c) $G(\varepsilon)$ and $P(t, g, h, \varepsilon)$ can take up only real values ;
- (d) for $t \in R, g \in \Omega$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ we have the inequalities

$$|P(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon); |Q(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon)$$

TRANSFORMATION OF THE BASIC SYSTEM OF ESEATIENS

where $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ for $\varepsilon \rightarrow 0$;

- (e) for any positive value $s < p_1$, we have in the domain

$$t \in R, g' \in \Omega, g'' \in \Omega, h' \in U_\tau, h'' \in U_\tau, 0 - z - z_?$$

the inequalities

$$\begin{aligned}|P(t, g', h', \varepsilon) - P(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq i(\varepsilon, \tau) |g' - g''| |h' - h''| h' \\ |Q(t, g', h', \varepsilon) - Q(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq i, (\varepsilon, \tau) \{|g' - g''| - |h' - h''| h',\end{aligned}$$

where $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$;

- (f) all real parts of the roots $p_1, \dots, p_{n-1}$ of the equation

$$\text{Det } |pI_{n-1} - H| = 0$$

are different from zero.

(27.108)

We now note that in the static case, when there is no relation with the angular variable φ , the fundamental equations (27.1) are reduced to

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, \bar{h}, \varepsilon),$$

(27.109)

through similar transformations. Here we can have ε_0 and ε_1 such that the following conditions are satisfied:

- (a) functions $Q(t, h, \Xi)$ are defined in the domain

$$t \in R, h \in U_{\eta_1}, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

(b) for $t \in R$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, we have the inequality

$$|Q(t, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon)$$

(27.110)

where $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$;

(c) for any positive $\sigma < p_1$ in the domain

$$t \in R, h' \in U_\sigma, h'' \in U_\sigma, 0 < z < z_0$$

we have the inequality

$$|Q(t, h', \varepsilon) - Q(t, h'', \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{|h' - h''|\} \quad (27.111)$$

where $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$;

(d) all real parts of the roots of the characteristic equation

$$\text{Det } [pI_{n-1} - X'_0(\zeta^n)] = 0 \quad (27.112)$$

are different from zero.

We now introduce certain definitions relating to the theory of almost periodic functions.

We examine any function $f(t, x)$, given in RE , where E denotes some set of values of x . We would say that $f(t, x)$ is an almost periodic function of t , uniform in x , if for any $t_i > 0$ we can select a positive $l(t_i)$ such that in any interval in R , of length $l(t_i)$, there lies at least one $\div$ (the almost period for η) for which we have the inequality

$$|f(t + \tau, x) - f(t, x)| \leq \eta$$

everywhere in RE .

For these almost periodic functions there exists an enumerable set of frequencies $\{\lambda_j\}$, independent of x , such that for any value of λ , not belonging to the set, the relation

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) e^{-i\lambda t} dt = 0$$

is satisfied.

Let $\{\omega_\alpha\}$ represent an enumerable set of real numbers possessing the properties :

1. there do not exist between the ω_x 's non-trivial linear relations

$$- \sum n_\alpha \omega_\alpha = 0$$

with integral coefficients ;

2) any λ_1 may be represented by a linear combination of the ω_x 's with integral coefficients.

We would conventionally call such a set $\{\omega_\alpha\}$ as a frequency base for an almost periodic function. In particular, for a periodic function the frequency basis consists of a single element; for quasi-periodic functions the frequency basis consists of a finite number of elements.

It is already known that the frequency basis possesses the following important property : if τ_m is a sequence such that for any ω_α

$$e^{i\omega_\alpha \tau_m} \rightarrow 1 \quad \text{when } m \rightarrow \infty \quad (27.113)$$

we have uniformly over RE

$$f(t + \tau_m, x) - f(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{when } m \rightarrow \infty \quad (27.114)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EOLATIONS 45.5

This property may also serve as a definition of almost periodic functions under discussion.

In fact, if $\{\omega_\alpha\}$ represents an enumerable set of linearly independent real numbers and if for each sequence - m , for which (27.113) is valid, (27.114) is also valid uniformly in RE , then $f(t, x)$ will be an almost periodic function uniform in x and $\{\omega_2\}$ will be its frequency basis. We shall conventionally call the expression of an s -dimensional integral manifold S_t ,

$$x = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$$

periodic with a period T , if the identity

$$f(t + T, C_1, C_2, \dots, C_s) = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$$

is satisfied for all values of $t, C_1, C_2, \dots, C_s$, belonging to the domain of their variation.

We also note that for an almost periodic function $f(t, x)$ there exists the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt$$

convergence to the limit for which will be uniform with respect to t and x .

Thus, condition (b) imposed on the right-hand-side of equation (27.1), $X(t, x)$ (vide page 441) will always be satisfied if the function $X(t, x)$ is almost periodic in t and uniform with respect to $x \in D_i$.

28. Some properties of the solutions of the transformed equations in the neighbourhood of equilibrium points and closed orbits

Now we shall examine some properties of the solutions of the systems of equations of the form (27.105) to which, as it has been proved in preceding section, the equations (27.1) may be reduced. After we have examined in detail equations (27.105) we can formulate and prove the theorems relating to equations (27.1).

Thus, we shall first formulate and prove a number of Lemmas on the properties of the solutions of the system of equations (27.105). In future we shall always assume in this case that the functions $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ satisfy the conditions mentioned in the preceding section, $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ being always real for all complex values of h lying in the domain in question.

Lemma 1. We can find a positive number $\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0$) such that for each positive value $\bar{\varepsilon}$ less than ε the system of equations

$$\left. \begin{aligned} dg &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ dt &= \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

have an integral manifold which may be represented by a relation of the form

$$h = f(t, g, \varepsilon)$$

in which $f(t, g, \varepsilon)$, as a function of t and g , is defined in $R\Omega$ and satisfies the inequalities

$$|f(t, g, \varepsilon)| \leq D(\varepsilon) < \rho \quad (28.2)$$

and

$$|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leq \Delta(\varepsilon) |g' - g''|, \quad (28.3)$$

where

$$D(\varepsilon) \rightarrow 0, \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{when } \varepsilon \rightarrow 0.$$

The function $f(t, g, \varepsilon)$ has a period 2π in the angular variable g .

If the functions $P(t, g, h, \varepsilon), Q(t, g, h, \varepsilon)$ in the domain $t \in R, g \in \Omega, h \in U_\rho, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, possess bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to g and h upto the m -th order inclusive, then $f(t, g, \varepsilon)$ will also possess bounded and uniformly continuous derivatives with respect to g upto m -th order inclusive.

Proof. We examine the matrix

$$H = U \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} U^{-1}, \quad (28.4)$$

where U is an arbitrary matrix possessing an inverse U^{-1} ; H_+ and H_- are matrices for which the roots of the characteristic equations are the

some properties of the solutions of traversopert encatons 467

roots of the equation introduced in condition (e) with positive real parts for H and negative real parts for H respectively. Thus, if equation (27.108) possesses s roots with negative real parts, and $n - s - 1$ roots with positive real parts, then the matrix H_- will be of s -th order while the matrix H_+ will be of $(n - s - 1)$ -th order.

We now define a matrix $J(t)$ with the help of the following relations :

$$\left. \begin{aligned} J(t) &= -U \begin{pmatrix} e^{-H_+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} \text{ for } t > 0 \\ J(t) &= U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_-t} \end{pmatrix} U^{-1} \text{ for } t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

The matrix $J(t)$ thus defined will satisfy the differential equation

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \text{ for } t \neq 0 \quad (28.6)$$

and the condition of discontinuity at $t = 0$

$$J(-0) - J(+0) = E. \quad (28.7)$$

Since the general solution of equation (28.6) has the form

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j J_j(t),$$

where $J_j(t) = e^{z_j t}$ for a simple root of the equation (27.108), and $J_j(t) = F_j(t)e^{z_j t}$ for a multiple root $z = z_j$, ($F_j(t)$ is a certain polynomial, the degree of which does not exceed the order of multiplicity of the root z_j), we have in the general case

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{z_j t} = e^{-Ht}. \quad (28.8)$$

Hence, we find that the elements of the matrices e^{-H_+t} and e^{-H_-t} are respectively

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{(\mu_j + i\nu_j)t}, \quad \text{when } \mu_j < 0, \quad (28.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{(\mu_j + i\nu_j)t}, \quad \text{when } \mu_s > 0. \quad (28.10)$$

In view of the fact that the exponent increases faster than the polynomial we can always find positive constants α and K such that the inequality

$$|J(t)| \leq K e^{-\alpha|t|} \quad (28.11)$$

is satisfied along the entire real axis.

Noting this, we concentrate on the positive numbers D and Δ ($D < \rho$) and examine the class $C(D, \Delta)$ of the functions $F(t, g)$ with values belonging to E_{n-1} where E_{n-1} is an $(n-1)$ -dimensional Euclidean space defined in $R\Omega$, satisfying the inequalities

$$|F(t, g)| \leq D, |F(t, g') - F(t, g'')| \leq \Delta |g' - g''| \quad (28.12)$$

and possessing a period 2π in the angular variable g .

We examine an equation of the form

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon) \quad (28.13)$$

for some function $F(t, g)$ belonging to the class $C(D, \Delta)$.

Since the function $P(t, g, h, \varepsilon)$ possesses the property (d) (vide page 462 (where instead of σ , characterising the domain of definition of h , we would have D characterising the domain of definition of the functions $F(t, g)$), we will have everywhere in $R\Omega$:

$$\begin{aligned} |P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g', 0, \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, D) |F(t, g')|, \\ |P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, D) \{|g' - g''| + \\ &\quad + |(t, g') - F(t, g'')|\} \end{aligned}$$

or considering that when $h = 0$, the function $P(t, g, h, \varepsilon)$ is of the order ε and that the functions $F(t, g)$ satisfy the conditions (28.12), we finally have

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D, \quad (28.14)$$

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |g' - g''|.$$

Hence, with arbitrary initial conditions

$$g = g^0 \quad \text{when } t = t_0,$$

we can, with the help of Cauchy theorem construct the solution of the equation (28.13) for any value of t , this being the unique solution. We denote it symbolically in the form

$$g_t = T_{z, t_0}^F(g^0), \quad \text{where } z = t - t_0. \quad (28.16)$$

some properties of the solutions of transformpt ergutions 469

Generally speaking, g_t depends upon the parameter z . However, since during the entire proof ε will be regarded as a fixed and sufficiently small number, we do not show the dependence on ε explicitly and thus avoid the writing of the various formulae to get involved. In the sequel, we proceed on similarly, without special reservations.

We note that since the solution

$$g(t) = T_{z, t_0}^F(g^{n^2})$$

corresponds to the initial value g^0 and the solution

$$g(t) + 2\pi = T_{z, t_0}^F(g^0 + 2\pi)$$

(which, owing to the periodicity of the right-hand-side of equation (28.13) in the angular variable g with a period 2π , is also a solution of the equation (28.13)) corresponds to the initial value $g^0 + 2\pi$, we get by comparing these relations:

$$T_{z,t_0}^F(g^0 + 2\pi) = T_{z,t_0}^F(g^0) + 2\pi,$$

i.e. by changing g^0 in $T_{z,t_0}^F(g^0)$ to $g^0 + 2\pi$ the expression is given an additional increment of 2π .

We now examine certain functions F and $\bar{F}$ belonging to the class $C(D, \Delta)$. We put

$$g_t = T_{z,t_0}^F(g^0), \quad \bar{g}_t = T_{z,t_0}^{\bar{F}}(\bar{g}), \quad z = t - t_0, \quad (28.17)$$

where

$$g^0 = g_t(t_0), \quad \bar{g} = \bar{g}_t(t_0).$$

Hence, from (28.13), we shall have

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{g}_t - g_t)}{dt} &= |P(t, \bar{g}_t, \bar{F}(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - P(t, g_t, F(t, g_t), \varepsilon)| = \\ &= |P(t, \bar{g}_t, \bar{F}(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - P(t, \bar{g}_t, F(t, \bar{g}_t), \varepsilon) + P(t, \bar{g}_t, F(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - \\ &\quad - P(t, g_t, F(t, g_t), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D) |\bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t) + \\ &\quad + \lambda(\varepsilon, D) \{|\bar{g}_t - g_t| + |F(t, \bar{g}_t) - F(t, g_t)|\} \end{aligned}$$

or, considering (28.12), we would finally obtain

$$\frac{d(\bar{g}_t - g_t)}{dt} \leq \lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t)\| \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |\bar{g}_t - g_t|, \quad (28.18)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANEISP MED EOCATION: 471
where

$$\|f\| = \sup_{t,g} |f(t, g)|.$$

It is not difficult to show that we have the inequality

$$\begin{aligned} |T_{z,t_0}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z,t_0}^F(g^0)| &= |\bar{g}_t - g_t| \leq |\bar{g} - g^0| \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} + \\ &+ \frac{\|\bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t)\|}{1 + \Delta} \{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|] - 1\}, \end{aligned} \quad (28.19) \quad (28.19)$$

where $\bar{g}$ and g^0 are the initial values of $\bar{g}_t$ and g_t .

Now, examining the equations

$$\frac{du}{dt} = \lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F} - F\| + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)u, \quad (28.20)$$

with the initial condition

$$u|_{t=t_0} = u_0 = |\bar{g}_t - g_t|_{t=t_0},$$

along with the inequality (28.18), we find that when the solution of (28.20) is given by

$$u = u_0 \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} + \frac{\|\bar{F} - F\|}{1 + \Delta} \{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|] - 1\},$$

the inequality

$$|\bar{g}_t - g_t| \leq u \leq |\bar{g} - g^0| \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} +$$

$$+ \frac{\|\bar{F} - F\|}{1 + \Delta} \{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)]|z| - 1\}$$

holds.

After these preliminary remarks we examine the transformation S , which transforms the function F belonging to the class $C(D, \Delta)$ into the function

$$S_{t,o}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q \{t + z; T_{z,t}^F(g); F[t + z; T_{z,t}^F(g)]; \varepsilon\} dz. \quad (28.22)$$

By virtue of the above-mentioned property of periodicity, in 8, of the second kind of the function $T_{z,t_0}^F(g)$,

$$T_{z,t_0}^F(g + 2\pi) = T_{z,t_0}^F(g) + 2\pi,$$

and also by virtue of periodicity of functions $F(t, g)$ and $2(t, z, h, z)$ in the angular variable g with the period 2π , we can conclude that $S_{6,0}(F)$ also has the period 2π in the angular variable g .

We now estimate the values of the functions

$$|S_{t,o}(F)|; |S_{t,\partial}(\bar{F}) - S_{t,g^0}(F)|.$$

Utilising the condition (28.12) satisfied by the function $F(t, g)$ as well as the properties (c) and (d) of the function $Q(t, g, h, \varepsilon)$ (see page 462) we have

$$\begin{aligned} & |Q \{t + z; T_{z,t}^F(g); F[t + z; T_{z,t}^F(g)]; \varepsilon\}| \leq |Q \{t + z; T_{z,t}^F(g); 0; z\}| - \\ & + |Q \{t + z; T_{z,t}^F(g); F[t + z; T_{z,t}^F(g)]; \varepsilon\} - Q \{t - z; T_{z,t}^F(g); 0; z\}| \leq \\ & \leq |Q \{t + z; T_{z,t}^F(g); 0; \varepsilon\}| + \lambda(\varepsilon, D) |F[t + z; T_{z,t}^F(g)]| < \\ & \leq M(\varepsilon) + i(\varepsilon, D)D. \end{aligned} \quad (28.24)$$

Maximising (28.22) and taking account of (28.11) and (28.24), we

obtain

$$\begin{aligned} |S_t(F)| & \leq \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz = \\ & = \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} \end{aligned}$$

According to (28.22) and in consideration of the inequality (28.11) and the property (c) (vide page 462), we obtain

$$\begin{aligned} & |S_t, \bar{g}(\bar{F}) - S_{t,g^0}(F)| \leq \\ & \leq K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} |Q \{t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g}); \bar{F}[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]; z\} - \\ & - Q \{t + z; T_{z,t}^F(g^0); F[t + z; T_{z,t}^F(g^0)]; z\}| dz \leq \\ & \leq K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} \lambda(z, D) \left\{ |T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - \right. \\ & \left. - T_{z,t}^F(g)| + |\bar{F}[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t + z; T_{z,t}^F(g^0)]| \right\} dz. \end{aligned} \quad (28.26)$$

$$\begin{aligned} & \left| \bar{F}[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t + z; T_{z,t}^F(g^0)] \right| = \left| \bar{F}[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - \right. \\ & \left. - F[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] + F[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t + z; T_{z,t}^F(g^0)] \right| \leq \\ & \leq \left| \bar{F}[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] \right| + \Delta \left| T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z,t}^F(g^0) \right|, \end{aligned}$$

as a result of which we can represent the inequality (28.26) in the form

$$\begin{aligned}
 & |S_{l,\bar{g}}(\bar{F}) - S_{l,g^0}(F)| \leq \\
 & \leq K\lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F} [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\| \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz + K\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} |T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z,t}^F(g^0)| dz.
 \end{aligned}$$

In view of (28.19) we can write the following inequality instead of the

$$\begin{aligned}
 & |S_{l,\bar{g}}(\bar{F}) - S_{l,g^0}(F)| \leq K\lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F} [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - \\
 & - F [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz + \\
 & + K\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} + \\
 & + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z| |\bar{g} - g^0| dz + \\
 & + K\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \frac{\|\bar{F} [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\|}{1 + \Delta} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} dz - \\
 & - K\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \left\| \bar{F} [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F [t + z; T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})] \right\| \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz = K\lambda(\varepsilon, D) \{|\bar{g} - g^0|(1 + \Delta) + \\
 & + \|\bar{F} - F\| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} dz.
 \end{aligned}$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EREATIONG 473

Uptil now the quantities D and Δ were taken as arbitrary. Now we choose them as functions of a parameter : : $D = D(\varepsilon), \Delta = \Delta(\varepsilon)$, such that

$$D(\varepsilon) \rightarrow 0, \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ when } \varepsilon \rightarrow 0$$

and for all values of ε less than a certain value ε , the inequality $2k\{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} < D; \frac{4K}{\alpha}\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) < \Delta;$

$$(1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D) < \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K < 1$$

(28.28)

holds.

Such a choice of $D = D(\varepsilon)$ and $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ is always possible because $M(\varepsilon) \rightarrow 0, \lambda(\varepsilon, D) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0, D \rightarrow 0$.

In view of the relation

$$(1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D) < \frac{\alpha}{2},$$

we evidently have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(1 + \Delta)|z|\} dz < \frac{4}{\alpha}. \quad (28.29)$$

Thus, considering (28.29) and also the inequality (28.28), we finally obtain, instead of (28.25) and (28.27)

$$|S_{t,g}(F)| \leq D(\varepsilon), \quad (28.30)$$

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F}) - S_{t,g^0}(F)| \leq \Delta(\varepsilon) |\bar{g} - g^0| + \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \quad (28.31)$$

whence, as a particular case, the inequality

$$|S_{t,\bar{g}}(F) - S_{t,g^0}(F)| \leq \Delta(\varepsilon) |\bar{g} - g^0| \quad (28.32)$$

follows.

By virtue of the definition of the class $C(D, \Delta)$ the functions belonging to it are characterised by the fact that they satisfy the conditions (28.12). Conditions (28.30) and (28.31) which are similar to the condition (28.12) are also satisfied by the functions $S_{t,g}(F)$.

This means that the function $S_{t,g}(F)$ belongs to the same class, $C(D, \Delta)$, to which does the function F , i.e. the transformation S , when $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ (for $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ we obtained, by a suitable choice of D and Δ , the inequalities (28.30) and (28.31)), reduces the functions belonging to the class $C(D, \Delta)$ to functions of the same class.

When $\bar{g} = g^0$, we obtain from (28.31) the inequality

$$|S\bar{F} - SF| \leq \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \text{ where } \|f\| = \sup |f|. \quad (28.33)$$

On the basis of this and with the help of the Cacciopoli-Banach theorem it is easy to prove the existence and the uniqueness of the solution of the equation

$$F = SF \quad (28.34)$$

in the class of functions $C(D, \Delta)$.

The Cacciopoli-Banach theorem*) is formulated as follows :

Let there be a non-empty set $\{\varphi\}$ of the functions defined in one and the same set M possessing the following properties.

1. Every function φ is bounded (may be by its own constant)

$$|\varphi| \leq D_\varphi.$$

2. The limit of a uniformly convergent sequence of functions of this family is also a function of the family.
3. In the given family an operator is defined which reduces any function of this family to a function of the same family.
4. For any pair of functions φ_1 and φ_2 of the family we have the inequality

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leq m \sup |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad \text{where } 0 \leq m \leq 1.$$

Hence, equation $\varphi = A(\varphi)$ is a unique solution.

We will now establish the fulfilment of the conditions of the theorem for the class of functions F .

The functions F are defined in the class $C(D, \Delta)$ and evidently form a non-empty set. Moreover, there holds the inequality

$$|F(t, g)| \leq D$$

*) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles [abstraits et leurs application aux equation intégrales, Fund. Math., t. III, 1922.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EQUATIONS 475

In term of the operator A we will have a certain transformation S which, as we have shown above, reduces a function of the class $C(D, -\Delta)$ to a function of the same class.

For any pair of functions F and $\bar{F}$ the relation

$$|S\bar{F} - SF| \leq 2\|\bar{F} - F\|, \text{ where } \|\bar{F} - F\| = \sup |\bar{F} - F|, (28.35)$$

holds and hence $m = \frac{1}{2}$.

We will show that the second condition is also fulfilled, i.e. the sequence of functions F_n , belonging to the class $C(D, \Delta)$, also converges to a function F belonging to the same class $C(D, \Delta)$.

For this purpose we take the function F_0 and construct a function $F_1 = SF_0$, which we shall call the first approximation of the equation $F = SF$, taking for granted that $F_1 \in C(D, \Delta)$. Thereafter we can construct the second approximation $F_2 = SF_1$, which will also belong to $C(D, \Delta)$. And thus in general we can construct the $(p+1)$ -th approximation

$$F_{p+1} = SF_p, (28.36)$$

again belonging to the class $C(D, \Delta)$. Thus we obtain a sequence of functions

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, (28.37)$$

belonging to $C(D, \Delta)$.

We will now show that this sequence converges uniformly to the function F , also belonging to the class of functions $C(D, \Delta)$.

For this purpose we examine the series

$$F_0 + (F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \dots + (F_{n+1} - F_n) + \dots (28.38)$$

If $|F_0| \leq M_0$ and $|F_1| \leq M_1$ (by virtue of the fact that the functions are bounded), we have

$$|F_1 - F_0| \leq M_0 + M_1 = M.$$

By virtue of the property (28.4) of the transformation S , we have

$$|F_{n+1} - F_n| = |S(F_n) - S(F_{n-1})| \leq m \sup |F_n - F_{n-1}| \quad (28.39)$$

$$\left(m = \frac{1}{2}\right).$$

Hence, the terms of the series (28.38) do not exceed in absolute magnitude the corresponding terms of the convergent series with constant positive terms :

$$M_0 + M + Mm + Mm^2 + \dots \quad \left(m = \frac{1}{2}\right)$$

and, hence, the series (28.37), whose terms are partial sums of the series (28.38), converge uniformly to some function F .

The functions F_s belonging to the class $C(D, \Delta)$ are periodic in g with period 2π and satisfy the inequalities (28.12).

Since $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ and F_n satisfy these properties irrespective of n , the same properties will be satisfied by F and hence F also belongs to the class of functions $C(D, \Delta)$.

Thus all the conditions of the theorem are fulfilled and consequently the equation $F = SF$ has a unique solution.

We denote this solution by

$$F = f(t, g, \varepsilon) \quad (28.40)$$

By the definition of F it belongs to the class $C(D, \Delta)$ and satisfies the conditions (28.12).

By differentiating the iteration formulae (28.36) it is not difficult to see that if $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ in the domain

$$t \in R, \quad g \in \Omega, \quad h \in U_p, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

have bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to g and h upto the m -th order inclusive, the derivatives of F_p with respect to g , upto the m -th order, will also converge uniformly.

For this purpose we examine the sequence of $F_p^{(r)}$:

$$F_0^{(r)}, F_1^{(r)}, \dots, F_n^{(r)}, \dots \quad (28.41)$$

and the series

$$\begin{aligned} F_0^{(r)} + \left| F_1^{(r)} - F_0^{(r)} \right| + \left| F_2^{(r)} - F_1^{(r)} \right| + \dots + \left| F_{p+1}^{(r)} - F_p^{(r)} \right| + \dots \end{aligned} \quad (28.42)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRAMBRTMST, 25.75% 87-
O wing to the existence of continuous derivatives $P = ?$
respect to g and h , the uniform convergence of the fitters

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q(t+z, g, h, z) dz, \\ \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q^{(n)}(t+z, z, h, z) dz. \end{aligned}$$

which is evident from (28.11), and also owing to us userses function $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$ and its derivatives with to the m -th order, it follows that in the exprever differentiate under the integral sign with respect to z :

$$\begin{aligned} F_{p+1}^{(r)} = SF_p^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q^{(r)} \left\{ t+z, T_{z, t_p}^{F_z}, F_{x, z; zz} \right. \\ \left. (r = 1, 2, \dots, m) \right\} \end{aligned}$$

If $\left| F_0^{(r)} \right| < N_0 (r = 1, 2, \dots, m)$, then taking into account server. ness of the derivatives of $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$ with respect to g and. vest. m -th order, we have $\left| F_1^{(r)} \right| \leq N_1$; consequently,

$$\left| F_1^{(r)} - F_0^{(r)} \right| \leq N_0 + N_1 = N_2 \quad (26 < 4)$$

By virtue of (28.19), we derive

$$\begin{aligned}
& \left| F_2^{(r)} - F_1^{(r)} \right| = \left| SF_1^{(r)} - SF_0^{(r)} \right| = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \left[Q^{(r)} \{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, z\} - Q^{(r)} \{t+z, T_{z,t}^{F_0}, F_0, z\} \right] dz \\
& \leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_1 - F_0| = \lambda_1(\varepsilon, D) M = \lambda, \\
& \left| F_3^{(r)} - F_2^{(r)} \right| = \left| SF_2^{(r)} - SF_1^{(r)} \right| = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \left[Q^{(r)} \{t+z, T_{z,t}^{F_2}, F_2, \varepsilon\} - Q^{(r)} \{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\} \right] dz \leq \\
& \leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_2 - F_1| \leq \lambda_1(\varepsilon, D) \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} N.
\end{aligned}$$

FOUNDATION OF ASYMPTOTIC METHODS

Hence, the terms of the series (28.38) do not exceed in absolute magnitude the corresponding terms of the convergent series with constant positive terms :

$$M_0 + M + Mm + Mm^2 + \dots \quad \left(m = \frac{1}{2} \right)$$

and, hence, the series (28.37), whose terms are partial sums of the series (28.38), converge uniformly to some function F .

The functions F_s belonging to the class $C(D, \Delta)$ are periodic in g with period 2π and satisfy the inequalities (28.12).

Since $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ and F_n satisfy these properties irrespective of n , the same properties will be satisfied by F and hence F also belongs to the class of functions $C(D, \Delta)$.

Thus all the conditions of the theorem are fulfilled and consequently the equation $F = SF$ has a unique solution.

We denote this solution by

$$F = f(t, g, \varepsilon) \quad (28.40)$$

By the definition of F it belongs to the class $C(D, \Delta)$ and satisfies the conditions (28.12).

By differentiating the iteration formulae (28.36) it is not difficult to see that if $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ in the domain

$$t \in R, \quad g \in \Omega, \quad h \in U_p, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

have bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to g and h upto the m -th order inclusive, the derivatives of F_p with respect to g , upto the m -th order, will also converge uniformly.

For this purpose we examine the sequence of $F_p^{(r)}$:

$$F_0^{(r)}, F_1^{(r)}, \dots, F_p^{(r)}, \dots \quad (28.41)$$

and the series

$$\begin{aligned}
& F_0^{(r)} + \left| F_1^{(r)} - F_0^{(r)} \right| + \left| F_2^{(r)} - \right. \\
& \quad \left. - F_1^{(r)} \right| + \dots + \left| F_{p+1}^{(r)} - F_p^{(r)} \right| + \dots
\end{aligned} \quad (28.42)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFOP MED ERCATIONS 477

owing to the existence of continuous derivatives of $Q(t, z, h, z)$ with respect to g and h , the uniform convergence of the integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z)Q(t+z, g, h, z)dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z)Q^{(r)}(t+z, g, h, \varepsilon)dz$$

which is evident from (28.11), and also owing to the boundedness of the function $Q(t+z, g, h, z)$ and its derivatives with respect to g and h upto the m -th order, it follows that in the expression (28.22) we can differentiate under the integral sign with respect to g :

$$F_{p+1}^{(r)} = SF_p^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} J(z)Q^{(r)}\left\{t+z, T_{z,t_0,F_p,z}^{F_p}\right\}z$$

$$(r = 1, 2, \dots, m) \quad (28.43)$$

If $\left|F_0^{(r)}\right| < N_0$ ($r = 1, 2, \dots, m$), then taking into account the boundedness of the derivatives of $Q(t+z, g, h, z)$ with respect to g and h upto the m -th order, we have $\left|F_1^{(r)}\right| \leq N_1$; consequently,

$$\left|F_1^{(r)} - F_0^{(r)}\right| \leq N_0 + N_1 = N_2. \quad (28.44)$$

By virtue of (28.19), we derive

$$\left|F_2^{(r)} - F_1^{(r)}\right| = \left|SF_1^{(r)} - SF_0^{(r)}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \left[Q^{(r)}\left\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\right\} - Q^{(r)}\left\{t+z, T_{z,t}^{F_0}, F_0, \varepsilon\right\}\right] dz \leq$$

$$\leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_1 - F_0| = \lambda_1(\varepsilon, D)M = N$$

$$\left|F_3^{(r)} - F_2^{(r)}\right| = \left|SF_2^{(r)} - SF_1^{(r)}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \left[Q^{(r)}\left\{t+z, T_{z,t}^{F_2}, F_2, \varepsilon\right\} - Q^{(r)}\left\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\right\}\right] dz \leq$$

$$\leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_2 - F_1| \leq \lambda_1(\varepsilon, D)\frac{1}{2}M = \frac{1}{2}N.$$

Similarly we compute the values of

$$\left|F_4^{(r)} - F_3^{(r)}\right|, \dots, \left|F_{p+1}^{(r)} - F_n^{(r)}\right|, \dots$$

and find that the terms of the series (28.42) do not exceed in absolute magnitude the corresponding terms of the convergent series with positive terms :

$$N_0 + N_2 + N + \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}N + \dots$$

Hence, the sequence of the bounded and uniformly continuous functions $F_n^{(r)}$ converges uniformly

$$F_n^{(r)} \Rightarrow \Phi. \quad (28.46)$$

On the other hand, since the sequence $\{F_n\}$ converges uniformly to the function f_1 :

$$F_n \Rightarrow f_1$$

(which has been proved), this sequence may be differentiated term by term. Hence, according to (28.46), we have

$$\Phi = f_1^{(r)},$$

i.e. $f_1(t, g, \varepsilon)$ possesses bounded and uniformly continuous derivatives with respect to g upto the m -th order inclusive.

Thus, we establish that the function $f(t, g, \varepsilon)$ satisfies the conditions of the Lemma 1, and hence, for completing the proof of the Lemma it remains to be shown that the relation

$$h = f(t, g, \varepsilon) \quad (28.47)$$

defines an integral manifold for the given system of differential equations (28.1).

For this purpose we write out in full the equation $F = SF$.

Considering (28.22) and (28.47), we have

$$f(t, g, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q \left\{ t + z; T_{z,t}^f(g); f \left[t + z; T_{z,t}^f(g) \right]; \varepsilon \right\} dz \quad (28.48)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED ERISATION; 479

We replace g here by $T_{t-t_0, t_0}^f(g)$ and note that in our notation,

$$T_{t-t_0, t_0}^f(g^0) = g_t, T_{0, t_0}^f(g^0) = g^0,$$

we have the identity

$$T_{z,t}^f, T_{t-t_0, t_0}^f = T_{z+1-t_0, t_0}^f.$$

Hence, introducing $z := z + t$ as a new variable of integration in place of z and assuming for simplicity that

$$f \{ t; T_{t-t_0, t_0}^f(g), \varepsilon \} = h_t; T_{t-t_0, t_0}^f(g) = g_t,$$

we obtain from (28.48)

$$\begin{aligned} h_t &= \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau = \int_{-\infty}^t J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau \\ &\quad + \int_t^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau \end{aligned} \quad (28.49)$$

Differentiating this identity with respect to t as a parameter, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dh_t}{dt} &= - \int_{-\infty}^t \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \Sigma) d\tau + J(-0) Q(t, g_t, h_t, \Sigma) - \\ &\quad - \int_t^{\infty} \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \Sigma) d\tau - J(+0) Q(t, g_t, h_t, \varepsilon) \end{aligned}$$

Taking into consideration (28.6) and the condition of discontinuity (28.7), we finally derive

$$\frac{dh_i}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} dJ(\tau - t) \quad dt \quad Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon),$$

or, according to (28.49),

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

On the other hand, according to the definition of the operator T_{t-t_1, t_n}^t , we have

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

Thus

$$g_t = T_{t-t_0, t_0}^f(g); \quad h_t = f(t, g_t, \varepsilon) \quad (28.50)$$

represent the solution of the given system of differential equations (28.1), reducing to $g; f(t_0, g, \varepsilon)$ when $t = t_0$.

Thus, the manifold (28.47), here, is an integral manifold for the system (28.1) and satisfies inequalities (28.2) and (28.3) (by virtue of the selection of the class of functions $C(D, \Delta)$, for which the condition (28.2) is satisfied) and possesses a period 2π in relation to the angular variable g . Moreover, if $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$, when $0 < \varepsilon < \varepsilon$, possess, in the domain $R\Omega U_\rho$, bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to g and h upto the m -th order inclusive, then $h = f(t, g, \varepsilon)$ will also have bounded and uniformly continuous partial derivatives with respect to g upto the m -th order inclusive.

Thus the Lemma 1 is fully proved.

Corollary. From the equations

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon) \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned}$$

we find that the angular variable g , for solutions lying in the manifold

$$h = f(t, g, \varepsilon)$$

satisfies the equation

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g, \varepsilon) \quad (28.51)$$

in which

$$F(t, g, \varepsilon) = P(t, g, f(t, g, \varepsilon), \varepsilon)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TPANERORMED FOLATIONS 481

Hence, from Lemma 1, $F(t, g, \varepsilon)$, defined for all real values of t and g , is itself a periodic function of g with period 2π and satisfies the relations :

$$\begin{aligned} |F(t, g, \varepsilon)| &\leq M(\varepsilon)_{t \rightarrow 0} - 0 \\ |F(t, g', \varepsilon) - F(t, g'', \varepsilon)| &\leq N(\varepsilon) - 0. \end{aligned} \quad (28.52)$$

Moreover, if $P(t, g, h, \varepsilon)$ possesses continuous derivatives with respect to g and h upto the m -th order inclusive, then $F(t, g, \varepsilon)$ will also have continuous derivatives with respect to g upto the m -th order inclusive.

Lemma 2. If there exists a sequence $\{-m_i\}$ of real numbers such that for some $\varepsilon < \varepsilon$ the right-hand-sides of equations (27.105) also satisfy, in $R\Omega U_\rho$, the conditions

$$\left. \begin{aligned} |P(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0 \\ |Q(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.54)$$

then, for this ε we shall have, in $R\Omega$,

$$|f(t + \tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \quad (28.55)$$

where $f(t, g, \varepsilon)$ is an integral manifold for the system of differential equations (27.105).

Proof. We take some function $F(t, g)$ from the class $C(D, J)$ where, as in Lemma 1, D and Δ are taken to be certain functions of z :

$$D = D(\varepsilon), \Delta = \Delta(\varepsilon)$$

We note that while proving Lemma 1 the solutions of the equation

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon) \quad (28.56)$$

were denoted by

$$g_t = T_{z, t}^F(g^0), \quad (28.57)$$

where $z = t - t_0$. Hence, in this case, the variable t , as well as the index of g , is equated to the sum of the lower indices of T :

$$t = z + t_0$$

Thus, putting (28.57) into (28.56), we can write

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(z + t_0, g_t, F[z + t_0, g_t], \varepsilon) \quad (28.58)$$

We now examine the following expressions :

$$y_z = T_{z, t}^F(g); \quad y_z^\tau = T_{z, t+\tau}^F(g) \quad (28.59)$$

By virtue of (28.56), (28.57) and (28.58) we find that these expressions satisfy the following two equations :

$$\begin{aligned} dy_z &= G(\varepsilon) + P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}, \\ dy_z^{\bar{x}} &= G(\varepsilon) + P\{z + t + \tau; y_z^{\bar{x}}; F[z + t + \tau; y_z^{\bar{x}}]; \varepsilon\}, \\ dz &= \end{aligned}$$

where $z + t$ and $z + t + \tau$ also represent the sum of the lower indices of the functions $y_z = T_{z, t}^F(g)$ and $y_z^\tau = T_{z, t+\tau}^F(g)$, respectively, differentiation with respect to t in this case being replaced by differentiation with respect to z .

We shall, by way of convention, introduce the notation :

$$\|P\tau - P\| = \sup_{t, g, h} |P(t + \tau, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \quad (28.62)$$

$$\|F\tau - F\| = \sup_{t, g} |F(t + \tau, g) - F(t, g)| \quad (28.63)$$

for $t \in R; g \in \Omega; h \in U_\rho$.

Subtracting (28.60) from (28.61), we obtain

$$\begin{aligned} d(y_z^{\bar{\tau}} - y_z) &= P\{z + t + \tau; y_z^{\bar{\tau}}; F[z + t + \tau; y_z^{\bar{\tau}}]; \varepsilon\} - \\ &dz - P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} \end{aligned}$$

Applying the usual maximisation method we compute the value of the right-hand-side of the equation thus obtained by taking into account the inequalities (28.14) and (28.15). We have

$$\begin{aligned}
& |P\{z+t+\tau; y_z^\tau; F[z+t+\tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P\{z+t; y_z; F[z+t; y_z]; z\}| = \\
& = |P\{z+t+\tau; y_z^\tau; F[z+t+\tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P\{z+t+\tau; y_z; F[z+t+\tau; y_z]; \xi\} + \\
& + P\{z+t+\tau; y_z; F[z+t+\tau; y_z]; z\} - P\{z+t+\tau; y_z; F[z+t; y_z]; z\} + \\
& + P\{z+t+\tau; y_z; F[z+t; y_z]; \varepsilon\} - P\{z+t; y_z; F[z+t; y_z]; z\}| \leq \\
& \leq \lambda(\varepsilon, D) \{|y_z^\tau - y_z| + |F(z+t+\tau; y_z^\tau) - F(z+t+\tau; y_z)|\} + \\
& + \lambda(\varepsilon, D) \|F[z+t+\tau; y_z] - F[z+t; y_z]\| + \|P_\tau - P\|, \quad (28.65)
\end{aligned}$$

or, taking into consideration the fact that, according to (28.12), the inequality

$$|F(z+t+\tau, y_z^\tau) - F(z+t+\tau, y_z)| \leq \Delta |y_z^\tau - y_z| \quad (28.66)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSPORT EQUATIONS he is valid, we derive

$$d(y_z^* - y_z) \leq \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |y_z^* - y_z| + i(\varepsilon, D_1) \quad F_1 \quad , \quad F_1 \quad F_1 \quad) \quad dz$$

Solving the differential inequality thus obtained, we finally have

$$\begin{aligned}
|y_z^\sigma - y_z| & \leq \|P_\tau - P\| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\| \quad \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \quad \{\exp(\lambda(\varepsilon, D)) \dots; \quad \}_{z,b} \\
(24.62)
\end{aligned}$$

On the other hand, according to the definition of the transformation $S_t(F)$, (28.22), we have

$$\begin{aligned}
S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F) & = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \{Q[t+z+\tau; y_z^\tau; F[t+z+\tau; y]; z] - \\
& - Q[t+z; y_z; F[t+z; y_z]; z\} dz. \quad (28.69)
\end{aligned}$$

Maximising the right-hand-side of (28.69) and taking into consideration

$$|J(z)| \leq K e^{-\alpha|z|}$$

we derive

$$\begin{aligned}
S_{t+\tau, g}(F) S_{t, \sigma}(F) & \leq K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|} \{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |y_z^\tau - y_z| - \\
& + \|Q_\tau - Q\| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\|\} dz - \quad (28.70)
\end{aligned}$$

We now choose D and Δ as in Lemma 1, i.e. we assume that for $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ the following relations hold :

$$\begin{aligned}
\frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} & < D; \quad \frac{4K}{\alpha} \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) < \Delta \\
(1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D) & < \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K < 1
\end{aligned}$$

where $D(\varepsilon) \rightarrow 0, \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, when $\varepsilon \rightarrow 0$.

We now examine the following expressions :

$$y_z = T_{z,t}^F(g); \quad y_z^\tau = T_{z,t+\tau}^F(g). \quad (28.59)$$

By virtue of (28.56), (28.57) and (28.58) we find that these expressions satisfy the following two equations :

$$dy_z = G(\varepsilon) + P \{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}, \quad (28.60)$$

$$\begin{aligned} dz &= G(\varepsilon) + P \{z + t + \tau; y_z^\sigma; F[z + t + \tau; y_z^\sigma]; z\}, \\ dz &= G(z), \end{aligned} \quad (28.61)$$

where $z + t$ and $z + t + \tau$ also represent the sum of the lower indices of the functions $y_z = T_{z,t}^F(g)$ and $y_z^\tau = T_{z,t+\tau}^F(g)$, respectively, differentiation with respect to t in this case being replaced by differentiation with respect to z .

We shall, by way of convention, introduce the notation :

$$\|P\tau - P\| = \sup_{t,g,h} |P(t + \tau, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \quad (28.62)$$

$$\|F\tau - F\| = \sup_{t,g} |F(t + \tau, g) - F(t, g)| \quad (28.63)$$

for $t \in R; g \in \Omega; h \in U_p$.

Subtracting (28.60) from (28.61), we obtain

$$\begin{aligned} d(y_z^- - y_z) &= P \{z + t + \tau; y_z^-; F[z + t + \tau; y_z^-]; \varepsilon\} - \\ &\quad dz - P \{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} \end{aligned} \quad (28.64)$$

Applying the usual maximisation method we compute the value of the right-hand-side of the equation thus obtained by taking into account the inequalities (28.14) and (28.15). We have

$$\begin{aligned} &|P \{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P \{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}| = \\ &= |P \{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P \{z + t + \tau; y_z; F[z + t + \tau; y_z]; \varepsilon\} + \\ &+ P \{z + t + \tau; y_z; F[z + t + \tau; y_z]; \varepsilon\} - P \{z + t + \tau; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} + \\ &+ P \{z + t + \tau; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} - P \{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}| \leq \\ &\leq \lambda(\varepsilon, D) \{|y_z^\tau - y_z| + |F(z + t + \tau; y_z^\tau) - F(z + t + \tau; y_z)|\} + \\ &+ \lambda(\varepsilon, D) \|F[z + t + \tau; y_z] - F[z + t; y_z]\| + \|P_\tau - P\|, \end{aligned} \quad (28.65)$$

or, taking into consideration the fact that, according to (28.12), the inequality

$$|F(z + t + \tau, y_z^\tau) - F(z + t + \tau, y_z)| \leq \Delta |y_z^\tau - y_z| \quad (28.66)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANBFGRMET, EREATIONS 4 : 3
is valid, we derive

$$d(y_z^- y_z) \leq \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |y_z^- - y_z| + \lambda(\varepsilon, D_1) \|F, F - P, P\|$$

Solving the differential inequality thus obtained, we finally get

$$|y_z^* - y_z| \leq \frac{\|P - P\| + \lambda(\varepsilon, D)\|F - F\|}{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)} \{\exp[\lambda(\varepsilon, D)|z|] - 1\}. \quad (28.68)$$

On the other hand, according to the definition of the transformation $S_l, (F)$, (28.22), we have

$$S_{l+\tau,g}(F) - S_{t,a}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \{ Q[t+z+\tau; y_z^-; F[t+z+\dots; y_z^-]; z] - \\ - Q[t+z; y_z; F[t+z; y_z]; z] \} dz. \quad (28.59)$$

Maximising the right-hand-side of (28.69) and taking into consideration

$$|J(z)| \leq K e^{-|z|},$$

we derive

$$S_{t+\tau,g}(F) S_{t,u}(F) \leq K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|} \{ \lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) |y_z^\tau - y_z| + \\ + \|Q_\tau - Q\| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\| \} dz \quad (28.70)$$

We now choose D and Δ as in Lemma 1, i.e. we assume that for $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ the following relations hold :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2K}{\alpha} \{ M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D \} &< D; \frac{4K}{\alpha} \lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) < \Delta \\ (1+\Delta) \lambda(\varepsilon, D) &< \frac{\alpha}{2}; \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K < 1 \end{aligned} \right\} \quad (28.71)$$

where $D(\varepsilon) \rightarrow 0, \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, when $\varepsilon \rightarrow 0$.

Taking into consideration (28.68), we obtain from (28.70) :

$$|S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F)| \leq \\ \leq K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x|z|} \left\{ \lambda(1+\Delta) \left[\frac{\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|}{\lambda(1+\Delta)} (e^{\lambda(1+\Delta)|z|} - 1) \right] + \right. \\ + \|Q_\tau - Q\| + \lambda\|F_\tau - F\| \} dz = K \int_{-\infty}^{\infty} \{ e^{-\alpha|z| + \lambda(1+\Delta)|z|} (\|P_\tau - P\| + \\ + \lambda\|F_\tau - F\|) - e^{-x|z|} (\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + e^{-x|z|} (\|Q_\tau - Q\| \\ + \lambda\|F_\tau - F\|) \} dz = K \int_{-\infty}^{\infty} \{ e^{-x|z| + \lambda(1+\Delta)|z|} (\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + \\ + e^{-x|z|} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|) \} dz$$

Since $\lambda(1+\Delta) < \frac{\alpha}{2}$, so

$$K \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -\alpha|z^*| + \lambda(1+\Delta)|z| \} dz < \frac{4K}{\alpha} \quad (28.73)$$

Then, we have from (28.72) :

$$S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F) \leq \frac{4K}{\alpha} (\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + \\ + \frac{2K}{\alpha} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|),$$

or, taking into consideration that $\frac{8K\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} < 1$, we finally obtain

$$|S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F)| \leq \frac{1}{2} \|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha} \{ \|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\| \},$$

or in short

$$|(SF)_\tau - SF| \leq \frac{1}{2} \|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha} \{ \|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\| \}. \quad (28.74)$$

Now we note that in Lemma 2, the functions $F(t, g)$ satisfy all the conditions necessary for the fulfilment of the Cacciopoli-Banach principle. Hence, the equation

$$F = SF \quad (28.75)$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EQUATIONS 485
has a unique solution which we may denote, as in Lemma 1, by

$$F = f(t, g, e).$$

that in the given case the uniformly to the function $f(t, g, z)$:

$$\|F_N - f\| \rightarrow 0 \text{ when } N \rightarrow \infty.$$

We now write, for the sake of brevity,

$$\sigma_\tau = \frac{2K}{\alpha} \{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \quad (28.78)$$

Hence, assuming in succession $F = F_1, F = F_2, \dots$, we have from

$$\begin{aligned} \|(F_1)_\tau - F_1\| &\leq \sigma_\tau; \|(F_2)_\tau - F_2\| \leq \frac{1}{2} \|(F_1)_\tau - F_1\| + \sigma_\tau = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_\tau + \sigma_\tau = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sigma_\tau \end{aligned}$$

$$\|(F_3)_\tau - F_3\| \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\sigma_\tau; \dots$$

In general, we have

$$\|(F_N)_\tau - F_N\| \leq 2\sigma_\tau \quad (28.79)$$

Since, according to (28.77),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = f,$$

so it is evident that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F_N)_\tau = f_\tau$$

Hence, going to the limit in (28.79), we obtain

$$\|(f)_\tau - f\| \leq 2\sigma_\tau,$$

or, writing out this relation in full and taking into consideration (28.78), we find that, everywhere in $R\Omega$ and for any τ , we have the inequality

$$|f(t + \tau, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \leq \frac{4K}{\alpha} \{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \quad (28.80)$$

Now, let $\{\tau_m\}$ be a sequence in R such that, for some $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ and again in $R\Omega$, we have

$$\begin{aligned} |Q(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0 \\ |P(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

when $m \rightarrow \infty$.

Hence, for this value of ε ,

$$\|Q_{\tau_m} - Q\| \rightarrow 0, \|P_{\tau_m} - P\| \rightarrow 0$$

when $m \rightarrow 0$. Consequently, according to (28.80), we have also in $R\Omega$,

$$|f(t + \tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \rightarrow 0$$

when $m \rightarrow \infty$.

This Proves Lemma 2.

The following corollaries may be derived from the Lemma.

Corollaries. If the functions $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$ are almost periodic functions of t , uniform in relation to g and h in the domain ΩU_p , then $F(t, g, \varepsilon)$ will also be found to be an almost periodic function, uniform in relation to $g \in \Omega$, with the frequency base of the functions $P(t, g, h, \varepsilon)$ and $Q(t, g, h, \varepsilon)$. The validity of this corollary is obvious when we compare the formulae of Lemma 2, the corollary to Lemma I and the definition of an almost periodic function (vide page 464).

We observe that the following result obtains from the corollary to Lemma 2 or directly from the Lemma itself :

If $f(t, x)$ is an almost periodic function uniform with respect to x and the set $\{\omega_\alpha\}$ is its frequency base, then $F(t, x)$ will also be an almost periodic function uniform with respect to x and with the same frequency base.

Lemma 3. We can find positive constants $\varepsilon', \gamma, C, \sigma_0$ and σ_1 (where $\sigma_0 < \sigma_1 < \rho, \varepsilon' < \varepsilon$) such that if s characteristic values of the matrix H have negative real parts and the remaining $n - 1 - s$ positive ones, then for each $\varepsilon < \varepsilon'$, for any real t_0 and also for any g_0 from Ω in some neighbourhood U_{σ_0} , there exists an s -dimensional manifold $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ of the points $\{h\}$ with the following properties:

(1) If* for $t = t_0$

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \text{ but } h_t \in \sum^2 \left\} (t_0, g_0, \varepsilon),$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EQUATIONS

then for some $t > t_0$

$$h_t \in U_{\sigma_1}.$$

(2) If for $t = t_0$

then, for all $t \geq t_0$,

$$h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, z).$$

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leq C e^{-Y} |t - t_0| |h_0 - f(t_0, g_0, \varepsilon)|,$$

where (g_0, h_0) represent (g_t, h_t) when $t = t_0$ and γ is a positive constant.

(3) If all the characteristic values of the matrix have positive real parts, the manifold $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ degenerates to the point $h = f(t_0, g_0, \varepsilon)$.

(4) If, on the other hand, the real parts of all the characteristic values of the matrix H are negative, the manifold $\mathfrak{M}(t_0, g_0, z)$ coincides with the entire neighbourhood U_{σ_0} .

Thus, the Lemma shows that if the initial values of any solution of the system of equations (27.105) do not belong to an s -dimensional point manifold $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ lying in an $(n - 1)$ -dimensional neighbourhood of U_{σ_0} , then with increase of time this solution will depart from $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ and, in particular, will pass out of some domain U_{σ_1} where $\sigma_1 > \sigma_0$. And, conversely, the integral curves the initial values of which belong to the manifold $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, will, in

**) Here, as usual, $g = g_t, h = h_t$ denotes the solution of the given system of differential equations (27.105).

course of time, tend to an s -dimensional manifold of integral curves which may be represented parametrically as $f(t, g_t, \varepsilon)$.

Proof. Instead of the differential system (27.105), we will examine the integro-differential system :

$$\left. \begin{aligned} h_t &= \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) A \\ \frac{dg_t}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) \\ &(\text{when } t = t_0, g_t = g_0) \end{aligned} \right\} \quad (28.81)$$

where A is a certain arbitrary fixed vector in E_{n-1} .

For investigating this system we will use the methods of computation used for Lemma 1 ; for the values ε', σ_0 and σ_1 subject to the conditions

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon}, D(\varepsilon') < \sigma_0, \sigma_0 < \sigma_1 < \rho \quad (28.82)$$

(where ε and ρ have been defined in Lemma 1), we can easily arrive at the following result.

For any value of the parameter ε and for any vector A in E_{n-1} , satisfying the inequalities

$$0 < \varepsilon < \varepsilon', \quad |A| < \sigma_0 :$$

(a) the system (28.81) has one and only one solution (g_t, h_t) , for which $h_t \in U_{\sigma_1}$ for all $t \geq t_0$;

(b) for this solution

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad (28.83)$$

where $\Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon)$ is a continuous function of its arguments and satisfies the Lipschitz condition in the form

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0, t, g', A', \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g'', A'', \varepsilon)| &\leq v(\varepsilon, \sigma_0) |g' - g''| + \\ &+ \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{\alpha}{2}|t-t_0|} |A' - A''|, t \geq t_0 \end{aligned} \quad (28.84)$$

where $\nu(\varepsilon, \sigma_0)$ and $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$ tend to zero when $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma_0 \rightarrow 0, \frac{\alpha}{2}$ is some positive constant.

Differentiating the expression

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t - t_0) A, \quad t < t_0$$

with respect to t as a parameter and on the basis of the equation

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \text{ for } t \neq 0$$

and the conditions of discontinuity

$$J(-0) - J(+0) = E$$

we find that the solutions of the integro-differential system are the solutions of the system of the differential equations (27.105):

$$\begin{aligned} dg &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon) \\ dt &= \\ dh &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \\ dt &= \end{aligned}$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EQUATIONS

$h_0 \in U_{\sigma_0}$, shall call any solution of the equations (27.105) for which

We will now show that any S -type solution is a solution of the integro-differential system (28.81) when $A = h_0$. For the solution (g_t, h_t) of the system (27.105), we have evidently

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, z) \quad (28.85)$$

We multiply both sides of this identity by $J(= -t)$ ($\cdot$ is a new ble of integration) and then integrate the expression thus obtained, between the limits from t to ∞ and from t_0 to t . We thus obtain

$$\int_t^\infty J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau = \int_t^\infty J(\tau - t) H h_\tau d\tau + \int_t^\infty J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau \quad (28.86)$$

$$\int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t J(\tau - t) H h_\tau d\tau + \int_{t_0}^t J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau \quad (28.87)$$

Integrating by parts the left-hand-sides of the expressions

$$(28.87), \text{ we get} \quad (28.86)$$

$$\begin{aligned} \int_t^\infty J(= -t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= -J(+0)h_t - \int_t^\infty dJ(\tau - t)h_\tau d\tau \\ \int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{d\tau}{d\tau} d\tau &= J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t dJ(\tau - t)h_\tau d\tau \end{aligned}$$

Taking into consideration the equation

$$\frac{dJ}{dt} = -JH = -HJ, t \neq t_0$$

the last expressions may be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \int_t^\infty J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= -J(+0)h_t + \int_t^\infty J(\tau - t) H h_\tau d\tau \\ \int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t J(\tau - t) H h_\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (28.88)$$

Utilising the equations (28.86), (28.87) and (28.88) and the condj. tions of discontinuity for the matrix $J(t)$ when $t = 0$;

we find that

$$h_t = \int_{\tau_0}^\infty J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) h_0$$

identically. From this it follows that the solution (g_i, h_i) in hand satisfies the integro-differential system (28.81) when $A = h_0$. But a solution of the integro-differential system exists only for $|A| < \sigma_0$; hence h_0 , occuring in the expression (28.89), belongs to U_{σ_0} .

On the other hand, the solution h_c of the differential system belong. ing to domain U_{σ_1} , having its initial value h_0 belonging to U_{σ_0} , will be called an S -type solution.

Hence, an S -type solution is a solution of the integro-differential system when $A = h_0$.

Taking into consideration that the integro-differential system (28.81) has a solution when $|A| < \sigma_0$ and permitting the parametric representation

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon),$$

and also that the S -type solutions, i.e. the solution of a differential system for which $|h_0| < \sigma_0$, are the solutions of the integro-differential system when $A = h_0$, we can write for the solutions of the differential system

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon); \quad |A| < \sigma_0. \quad (28.90)$$

Solutions of the integro-differential system exist under the conditions

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon}, D(\varepsilon') < \sigma_0, \sigma_0 < \rho, |A| < \sigma_0. \quad (28.91)$$

Hence, S -type solutions exist under the same conditions.

But the conditions (28.91) are equivalent to the conditions under which there exists an s -dimensional manifold of integral curves for differential equations (27.105); we denote a parametric representation of this type by the notation $h = f(t, g, \varepsilon)$.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EOTATIONS 491

Thus, the conditions under which there exists an integral manifold for the differential system and the conditions for which S -type solutions exist, are equivalent.

Since S -type solutions are the solutions of the same differential system and $h = f(t, g, \varepsilon)$ also exist under the same conditions, it follows that all solutions lying in the integral manifold $h = f(t, g, \varepsilon)$, belong to S -type and hence are simultaneously found to be the solutions of the integro-differential system (28.81). Hence, for each one of them we can find corresponding $A = A'$, i.e. these solutions may be represented in the form

$$h = f(t, g, \varepsilon) = \Psi'(t_0, t, g, A', z').$$

Thus, finding that to all solutions lying in the integral manifold

$$h = f(t, g, \varepsilon), \quad (28.92)$$

there corresponds some $A = A'$, and by virtue of the fact that all solutions of the integro-differential system are solutions of the differential system, we can write, instead of one of the solutions of the integro-differential system, the solution (28.92) lying in the manifold $h = f(t, g, \varepsilon)$ and depending on $A = A'$ appearing in the inequality (28.84) valid for solutions of the integro-differential system.

As a result we obtain

$$|f(t, g, \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{1}{2}|t-t_0|} |A' - A|, t \geq t_0 \quad (28.93)$$

where $f(t, g, \varepsilon)$ is represented by the formulae (28.92).

Since S -type solutions are solutions of the integro-differential system when $A = h_0$, we can take the solution h_t of the differential system instead of the solution of the integro-differential system $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$ replacing the arbitrarily fixed g by g_t . In this case h_0 will stand in the right-hand-side instead of A corresponding to $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$ because Ψ is equal to h_t when $A = h_0$. Instead of A' we can put the initial value of $f(t, g, \varepsilon)$.

Hence, instead of the inequality (28.84) valid for the solutions of the integro-differential system, we obtain the following inequality for any solution. h_i of the S -type :

$$|f(t, g_t, \varepsilon) - h_i| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{\alpha}{2}|t-t_0|} |f(t_0, g_0, \varepsilon) - h_0|. \quad (28.94)$$

Now we examine the set of points $\{h\}$ belonging to U_{σ_0} , for which the set corresponding to the fixed values t_0, g_0, ε , being denoted by the symbol $\mathfrak{F}(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Thus, since for any solution of the S -type, the relation (28.90) is found to be satisfied, i.e.

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0$$

we obtain by putting in it $t = t_0$

$$h_v = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0$$

Consequently, for any solution of the S -type, h_0 must belong to $\mathfrak{M}(t_0, \varepsilon_0, \varepsilon)$.

Hence, it follows that if for $t = t_0$,

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \text{ but } h_t \notin \mathbb{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

the solution (g_t, h_t) corresponding to these initial conditions cannot belong to S -type (by virtue of what has been said above for the solution h_t of S -type when $t = t_0$, $h_t \in \mathbb{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)$; and consequently, according to the definition of S -type solution, h_t will not lie in the neighbourhood U_{σ_1} for $t > t_0$.

Thus, the first statement of Lemma 3 is proved.

Now we prove the second statement. As we have already noted, the solution of the integro-differential system (28.81) possessing the properties (a) and (b), existence of which has been proved above, is at the same time a solution of the differential equations (27.105).

Owing to the property (b) we have

$$h_0 = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon) \quad (28.95)$$

and, since the solution of the differential system (27.105) can be wholly determined by the initial conditions it becomes evident that if (g_t, h_t) is any solution of the differential equations (27.105), for which (28.95) is valid, then it is also a solution of the integro-differential system (28.81) and possesses the properties (a) and (b).

Thus, if for some solution of the equations (27.105) for $t = t_0$

$$h_t \in \mathbb{N}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED EQUATIONS

it follows that this solution belongs to the S -type and hence the inequality (28.94) is fulfilled for it. This proves the second statement of the Lemma.

Now we prove the third and fourth properties of the Lemma.

Let $s = 0$. Hence, from the definitions (28.5) of the matrix $J(t)$

$$J(t) = -U \begin{cases} e^{-H+t} & 0 \\ & 0 \quad 0 \end{cases} U^{-1} \text{ for } t > 0$$

$$J(t) = U \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H-t} \end{cases} U^{-1} \text{ for } t < 0$$

it follows that

$$J(t) = -e^{-Ht}, t > 0; J(t) = 0, t < 0 \quad (28.96)$$

in consequence of which the integral equation of the system (28.81),

$$h_i = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) A, t_0 < t$$

assumes the form

$$h_t = - \int_t^{\infty} e^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau, t > t_0 \quad (28.97)$$

(because, by virtue of (28.96) for $t_0 - t < 0$, $J(t_0 - t) = 0$); here the arbitrary vector A is absent. Hence, it follows that $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, composed of the initial values of h_t (28.97),

degenerates to a point and also since $f(t_0, g_0, \varepsilon) \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ we find that in the given case $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ contain only one point: $h_0 = f(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Conversely, let $s = n - 1$. Then, by the definition (28.5) of the matrix $J(t)$, we have

$$J(t) = 0, t > 0; J(t) = e^{-Ht}, t < 0$$

and the integral equation of the system takes the form

$$h_t = \int_{t_n}^t e^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + e^{H(t-t_0)} A, t > t_0 \quad (28.98)$$

whence follows the particular case that $A = h_0$.

However, it is easy to see that the equation (28.98) is an identity for any solution of the differential equations (27.105) for any value h_n . Thus, in the given case

$$\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon) = U_{\sigma_0}.$$

Finally, let $s \neq 0$ and $n - 1 - s \neq 0$. In this case the term $J(t - t_0) A$, by means of which the vector A enters into the integro. differential system (28.81), may be written in the form

$$U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{H-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} A = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} a, \quad (28.99)$$

where

$$a = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_s \end{vmatrix} U^{-1} A,$$

and 1_s is an s -dimensional unit matrix.

Hence, we can conclude that

$$\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, a, \varepsilon).$$

identically.

(28.101)

On the other hand, for an arbitrary A , the vector a defined by the identity (28.100) has in all s independent components: $a_1, \dots, a_s$, as a result of which the equations

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad (28.102)$$

characterising the manifold $\mathbb{M}(t_0, g_0, s)$ may be written in the form

$$h = h(a_1, \dots, a_s),$$

where $h(a_1, \dots, a_s)$ are functions of s parameters depending on t_0, g_0, ε and satisfying the Lipschitz conditions by virtue of (28.84).

Thus $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ is an s -dimensional manifold; this completes the proof of Lemma 3.

Remark. It follows from Lemma 3 that in the neighbourhood ΩU_{σ_n} , there may be one and only one integral manifold for the system (27.105) and this would be the manifold

$$h = f(t, g, \varepsilon)$$

In fact, this statement is obvious in the case $s = 0$. The case $s = n - 1$ becomes the first case if we change t by $-t$ in these equations.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF TRANSFORMED HEATINEI,

Now we shall prove the statement in the case when $0 - n - n$.
Let some integral manifold of the system (27.105) lie in the neighbourhood ΩU_{σ_0} ; we shall denote this by S_1 :

$$S_i \in \Omega U_{\sigma_0}, -\infty < t < \infty.$$

We shall show that this is unique for the system (27.105). It follows: from Lemma 3 that if $g_0, h_0 \in S_t$, then necessarily

$$h_0 \in \mathbb{M}(t_0, g_0, z)$$

We now take an arbitrary small positive r_i and choose a positive τ such that the following inequality is satisfied:

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma z} < \eta_1 \quad (28.103)$$

where γ is a positive constant. Thereafter we take any arbitrary real parameter t_1 and put $t_0 = t_1 - z$. Thus, instead of (28.103), we obtain

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma(t_1-t_0)} < \eta_0. \quad (28.104)$$

We now examine some other integral manifold of the system (27.105), S_1 , also belonging to the neighbourhood ΩU_{σ_0} . Let (g, h) be any arbitrary point of S_{t_1} .

According to the definition of the integral manifold S_i , the solution (g_t, h_t) of the system (27.105), which takes up the value (g, h) when $t = t_1$, lies in S_t for any t . In particular, $(g_{t_0}, h_{t_0}) \in S_{t_0}$, and hence

$$h_{t_0} \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)$$

However, according to Lemma 3 we have

$$|h - f(t_1, g, z)| = |h_{t_1} - f(t_1, g_{t_1}, z)| \leq C e^{-\gamma(t_1-t_0)} |h_{t_1} - f(t_0, z_t, z)|,$$

or, by virtue of (28.104)

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t, g_{t_1}, \varepsilon)| < 2\sigma_0 C e^{-\gamma(t_1-t_0)} < \tau_0$$

whence we have, as η_i is arbitrary,

$$h = f(t_1, g, \varepsilon) \quad (28.105)$$

Thus we see that (28.105) follows from the relation $(g, h) \in S_t$: this proves our statement on the uniqueness of the integral manifold for the system of equations (27.105).

Now we shall discuss certain corollaries following from this Lemma.

Corollary 1. According to the Lemma proved above, it is obvious that if the real part of at least one of the roots of the equation

$$\text{Det } |pI_{n-1} - H| = 0$$

is positive, the given integral manifold $h = f(t, g, \varepsilon)$ possesses the property of repelling all the solutions near to it, excluding those whose initial values lie in the singular point manifold $\sin^2(t_0, g_0, t)$. The dimension of $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ is less than the dimension of the entire phase space.

Thus, in this case any solution lying in the integral manifold

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

is found to be unstable.

If the real parts of all the roots of the equation (28.106) are negative, then the given manifold possesses the converse property of attracting approximate solutions :

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leq C |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)| e^{-\gamma(t-t_0)}. \quad (28.107)$$

Corollary 2. We now examine the first equation of the system

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) \quad (27.105)$$

and to its right-hand-side we add and then subtract the expression

$$F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Thus, we obtain

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g_t, \varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon),$$

or

$$\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Applying the usual maximising method to the right-hand-side of the equation thus obtained and taking into account the property (d) of the function $P(t, g, h, \varepsilon)$ (vide page 462), we derive $\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) = |P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) |h_t - f(t, g_t, \varepsilon)|$, where $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$. Hence, in view of the inequality (28.107), we finally obtain

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) \leq G\lambda(\varepsilon, \sigma)e^{-\gamma(t-t_0)} |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|. \quad (28.108)$$

CORRESPONDENCE BETWEEN EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS

29. Correspondence between exact and approximate solutions of the fundamental equation in an infinite interval

We now proceed to consider the applications of the Lemmas proved in the previous section.

These Lemmas were formulated in relation to the system of equations (27.105), to which the fundamental equations (27.1) reduce under certain conditions.

Now we shall formulate and prove a number of theorems, applying the properties of the solutions of the system of equations (27.105) to the solutions of the fundamental differential equations (27.1), remembering that during the process of reducing these to the form (27.105), we effected the change of variable $st \rightarrow t$. We shall start with the case of the quasi-static solution when the relation of dependence on the angular variable fails to apply. In this case, we can formulate the following theorem.

Theorem 1: Let the function $X(t, x)$ in the equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (29.1)$$

satisfy the following conditions.

(a) The equation of the first approximation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (29.2)$$

with

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, \quad (29.3)$$

has a quasi-static solution $\xi = \xi_0$.

(b) The real parts of all the n roots of the characteristic equation

$$\text{Det } |pI - X'_0(\xi_0)| = 0, \quad (29.4)$$

constructed for the variational equation,

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_{0x}(\xi_0) \delta\xi, \quad (29.5)$$

corresponding to the quasi-static solution $\xi = \xi_0$, are different from zero.

(c) We can find a p -neighbourhood D_p of the point ξ_0 such that in it $X(t, x)$ are almost periodic functions of t , even with respect to $x \in D_p$.

(d) The function $X(t, x)$ and its partial derivatives of the first order with respect to x are bounded and uniformly continuous in x in the domain

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_p.$$

Hence, we can find positive constants ε' , σ_0 and σ_1 (in this case $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \rho$), such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the following statements hold.

1. Equation (29.1) has a unique solution, $x = x^*(t)$, defined in the whole interval $(-\infty, \infty)$, for which

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty. \quad (29.6)$$

2. This solution is almost periodic, with a frequency base of the function $X(t, x)$.
3. We can find a function $\delta(\varepsilon)$, tending to zero along with ε , such that we have

$$|x^*(t) - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty.$$

4. Let $x(t)$ be any solution of the equation (29.1), different from $x^*(t)$, satisfying for some value $t = t_0$ the inequality

$$|x(t) - \xi_0| < \sigma_0. \quad (29.8)$$

Hence, if the real parts of all the roots of the characteristic equation (29.4) are negative, the distance $|x(t) - x^*(t)|$ tends to zero for $t \rightarrow \infty$, the inequality

$$|x(t) - x^*(t)| \leq C e^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)} \quad (29.9)$$

being satisfied in this case, with C and γ as positive constants.

If the real parts of all the roots of the characteristic equation (29.4) are positive, then we can find $t_1 > t_0$, such that

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \quad (29.10)$$

If the real parts of s roots are negative and of the remaining $n - s$

BETWEEN EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS

positive, then in the σ_0 -neighbourhood of the point ξ_n , there exists an s -dimensional point manifold $\mathfrak{W}_{t_0}$ such that it follows from the relation

$$x(t_0) \in \mathfrak{N}_{t_0}$$

that the difference $|x(t) - \xi_n|$ tends to zero exponentially (when $t \rightarrow \infty$). Also the validity of the inequality (29.10) follows from the relation

$$x(t_0) \bar{\epsilon} \mathfrak{R}_{t_0}.$$

We shall now make certain remarks about this theorem.

Note 1. We see, by virtue of the property (4), that the solution (t) will be stable and also asymptotic when the real parts of all the roots of the given characteristic equation (29.4) are negative. Further, if the real part of at least one of the roots of the characteristic equation (29.4) is positive, the solution $x^*(t)$ is found to be unstable.

Note 2. In addition to the conditions of theorem 1 we suppose that $X(t, x)$ is a periodic function of t , with a certain period = not depending on x . Hence we have, in particular,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\bar{\tau}} X(t, x) dt_t$$

and

$$X_0(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\bar{\tau}} X(t, \xi) d\tau$$

Since, in this case, the frequency base of the function $X(t, x)$ consists of a single number $\frac{2\pi}{\tau}$, we find, according to the property (2), that in the given case the solution $x^*(t)$ will be periodic with period τ .

Proof. The validity of theorem 1 follows directly from the Lemmas proved in the previous section.

Now, the equation (29.1) in the given quasi-static case is reduced by the transformation

$$x = \xi_0 + b, \quad (29.11)$$

$$b = h + \varepsilon v(t, h), \quad (29.12)$$

to the form

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (29.13)$$

in which, when the conditions of the present theorem are satisfied, $Q(t, h, \varepsilon)$ itself satisfies the conditions of page 462 and consequently, the solution of the system (29.13), $h = h(t)$, will possess properties stated in the Lemmas.

Hence, by examining the difference

$$|x^*(t) - \xi_0| = |h + \varepsilon v(t, h)|,$$

we derive the validity of the property (1) by the Lemma 1.

In Lemma 2 we have demonstrated the approximate periodicity of $h(t)$ in respect of t . From the expression (27.73) in which the functions $B'_{\eta_i}(t, \varphi', b')$ are almost periodic in t , with frequency base of the function $X(t, x)$ since they are expressed through $X(t, x)$, it follows that $v(t, p, b)$ also are almost periodic functions of t with the same frequency base. Hence, from (29.11) and (29.12) it follows that $x(t)$ is an almost periodic function of t with frequency base of the

function $X(t, x)$; this proves the validity of the second property of the theorem. The property (3) follows from the Lemma 1, because we can always put

$$\delta(\varepsilon) = D(\varepsilon) + \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta_1)}{\eta_1}, \quad (29.14)$$

choosing a and η_1 such that $\varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta} \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$ (vide (27.75)). Thus, since $D(\varepsilon)$ also tends to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta(\varepsilon)$ will tend to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$.

For proving the property (4) we use the inequality

$$|x(t) - x^*(t)| \leq |h(t) - f(t, \varepsilon)| + \varepsilon |v(t, h) - v(t, f)| \leq (1 + \varepsilon \lambda) |h(t) - f(t, \varepsilon)|, \quad (29.15)$$

where $h(t)$ is any solution of the system (29.13) belonging to the domain U_{σ_0} .

Comparing this inequality with the results of Lemma 3 we arrive at the validity of the property (4). Thus the theorem is fully proved.

Now we proceed to examine the solutions close to the periodic solution of the equations of the first approximation when the role of the angular variable is decisive.

In this case the following theorem may be proved.

Theorem 2. Let the following conditions be satisfied for the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \quad (29.16)$$

(a) Equation of the first approximation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (29.17)$$

where

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt,$$

has a periodic solution

$$\xi = \xi(\varepsilon \omega t); \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(?). \quad (29.18)$$

(b) The real parts of all the $(n-1)^*$ characteristic indices for the variational equations

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_0(\xi(\varepsilon \omega t)) \delta\xi, \quad (29.19)$$

corresponding to the periodic solution (29.18), are different from zero and $D(\varphi, 0) \neq 0$ (vide (27.46)).

(c) We can find a ρ -neighbourhood U_ρ of the orbit of this periodic solution such that the function $X(t, x)$ and its partial derivatives with respect to x , upto $(m+1)$ -th order inclusive, will be bounded and uniformly continuous in x , in the domain

$$-\infty < t < \infty, x \in U_\rho.$$

(d) $X(t, x)$ is an almost periodic function of t , even in $x \in U_\rho$.

Hence we can find positive numbers ε', σ_0 and σ_1 ($\sigma_0 < \sigma_1 < \rho$) such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the following statements hold.

(1) The equation (29.16) has a unique integral manifold S_t lying in the domain U_ρ for all real values of t .

^{0*)} A characteristic index, as it has already been noted in the given case, is always equal to zero.

(2) This manifold may be parametrically represented in the form

$$x = f(t, (1)).$$

2
(29.20)

Here*) $f(t, 0)$ is defined for all real values of t and t , possesses a period 2π in respect of 0 and is an almost periodic function of t and 0 with the frequency base of the function $X(t, x)$.

We can take a function $\delta(\varepsilon)$, tending to zero along with ε , such that

$$|f(t, 0) - \xi(0)| \leq \delta(\varepsilon)$$

Function $f(t, 0)$ also has continuous derivatives in respect of θ upto the m -th order inclusive.

(3) In the manifold S_i , equation (29.16) is equivalent to the equation

$$d\theta/dt = \varepsilon F(t, 0), \quad (29.21)$$

in which $F(t, 0)$ is defined for all real values of t and θ , is a periodic function of θ with a period 2π and is also an almost periodic function of t with the frequency base of the function $X(t, x)$; $F(t, 0)$ possesses bounded and uniformly continuous derivatives with respect to θ , upto the m -th order inclusive.

Moreover, we have the inequalities

$$|F(t, \theta) - \Omega(\varepsilon)| \leq \delta^*(\varepsilon) \quad (29.22)$$

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leq \eta^*(\varepsilon) |\theta' - \theta''|, \quad (29.23)$$

in which $\delta^*(\varepsilon), \eta^*(\varepsilon)$ tend to zero along with ε . Thus, any solution of equation (29.16) belonging to the manifold S_i can be represented in the form

$$x = f(t, \theta(t)), \quad (29.24)$$

where $0 = 0(t)$ is a solution of the equation (29.24). Conversely the expression (29.24) in which $0 = \theta(t)$ is a solution of the equation (29.21) is always a solution of the equation (29.16) belonging to the manifold S_i .

CORRESPONDENCE BETWEEN EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS

(4) If the real parts of all the given $(n - 1)$ characteristic indices are negative, the manifold S_i possesses the property of attracting all solutions near it.

Thus, let $x = x(t)$ be any solution of the equation (29.16) which passes through some point in the domain U_{π_0} for some value $t = t_0$:

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}.$$

Hence, when $t > t_0$ the following inequalities are satisfied:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leq C_1(\varepsilon) e^{-\tau} (t - t_0), \quad (29.25)$$

$$d\theta(t)/dt - sF(t, \theta(t)) \leq C_2(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}. \quad (29.26)$$

(5) If all the real parts are positive, we can take $t_1 > t_0$ such that

^{0*)} For the sake of simplicity, we shall neglect the explicit dependence on ε of the function $f(t, 0)$ and other functions analogous to it.

$$x(t_1) \in U_{\sigma_1} \quad (\sigma_1 > \sigma_0). \quad (29.27)$$

(6) If s of the given real parts are negative and the remaining $n - 1 - s$ positive, there exists an s -dimensional point manifold $\mathbb{Z}_{t_0}$ in the domain U_{σ_0} , such that it follows from the relation

$$n(t_0) \in \mathbb{M}_{t_0}$$

that the expression (29.25) tends to zero exponentially when $t \rightarrow \infty$. Further, from the fact that

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}, \text{ but } x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0} \quad (29.28)$$

the validity of the relation (29.27) follows for some $t_1 > t_0$.

Thus, if at least one of the real parts of the given characteristic indices is positive, the manifold S_t is unstable. Any solution of $x(t)$ not belonging to the manifold and for which $x(t_0)$ lies in the domain U_{σ_0} and does not belong to a singular point manifold $\mathfrak{N}_{t_0}$ of the lowest dimension, will leave the domain U_{σ_1} ($\sigma_1 > \sigma_0$) in the course of time.

In connection with this theorem we find it interesting to examine the particular case when $f(t, \theta)$ and $F(t, \theta)$ are periodic functions of t with some period T (not depending on θ) and the number of derivatives is taken to be two. This case will be specially examined in the following section.

Proof. The existence and the uniqueness of the integral manifold S_t , the parametric representation of which, taking into consideration the formulae for the change-over from x to g, h , viz.

$$x = \xi(\rho) + \frac{1}{2} \{A(\rho)b + A^*(\rho)b^*\},$$

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h), \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h),$$

is in the form

$$\begin{aligned} \xi(\theta + \varepsilon u) + \frac{1}{2} \{A(0 + \varepsilon u)(h + v\varepsilon) + \\ + A^*(\theta + \varepsilon u)(h^* + \varepsilon v^*)\} = f(t, \theta), \end{aligned}$$

follows from the fact that, in Lemmas 1 and 3, we have established the existence and the uniqueness of g, h (and consequently also of θ , defined by equation (29.21)). By virtue of the fact that ε and δ have been chosen to satisfy

$$\frac{1}{2} |A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*| < \rho, \quad b = h + \varepsilon v, \quad \text{where } |h + \varepsilon v| < \delta, \text{ it follows that}$$

$$\frac{1}{2} |A(\theta + \varepsilon u)(h + \varepsilon v) + A^*(\theta + \varepsilon u)(h^* + \varepsilon v^*)| < \rho \quad (29.32)$$

and hence

$$x \in U_p$$

According to (29.31), the manifold S_t can be parametrically represented as

$$x = f(t, \theta),$$

where

$$\begin{aligned} f(t, \theta) = \xi(\theta + \varepsilon u(t, 0, f(t, \theta, \varepsilon))) + \\ + \frac{1}{2} \{A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f(t, 0, \varepsilon)))(f(t, 0, \varepsilon) + \varepsilon v(t, \theta, f(t, 0, \varepsilon))) + \\ + A^*(0 + \varepsilon u(t, 0, f(t, 0, \varepsilon)))(f^*(t, 0, \varepsilon) + \varepsilon v^*(t, 0, f(t, \theta, \varepsilon)))\} \end{aligned}$$

Since $\xi(\varphi)$ and $A(\varphi)$ are periodic functions of φ with period 2π , with $h(t) = f(t, \theta(t))$, and further because $u(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))$ and $v(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))$ are, by definition (vide page 453), periodic in θ with period 2π , it follows that the function

$$x = f(t, \theta)$$

correspondence BETWEEN EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS will be periodic in θ with the same period 2π .

It has been proved in Lemma 1 that $h = f(t, g, z)$ has bounded and uniformly continuous derivatives upto the m -th order inclusive.

Since $\zeta(\rho)$ and $A(\rho)$ possess bounded and uniformly continuous derivatives of the m -th order, we find from (29.31) that $f(t, \theta)$ will also have bounded and uniformly continuous derivatives upto the m -th order inclusive.

Moreover, we can always have a $\delta(\varepsilon)$, tending to zero along with ε , such that the inequality

$$|f(t, \theta) - \zeta(\theta)| \leq \delta(\varepsilon) \quad (29.33)$$

is satisfied.

The statement (3) of the theorem directly follows from the corollary to Lemma 1 in which instead of the equation (28.51),

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g, \varepsilon),$$

we shall examine the equation

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$$

in the variable θ .

We will now show that the manifold S_t possesses the property of attracting all near solutions in the case when the real parts of the $(n-1)$ given characteristic indices are negative, i.e. we will show that the inequality

$$|x(t) - f(t, 0(t))| \leq C_1(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}$$

is satisfied. Here, $x(t)$ is any solution of the equation (29.16), which passes for some value $t = t_0$ through some point in the domain U_{σ_0} . On the basis of the formula for transformation from x to g, h , (29.31), and taking into consideration the relation (28.107), we have

$$\begin{aligned} |x(t) - f(t, 0(t))| &= |\xi(\theta + \varepsilon u(t, 0, h_t)) + \frac{1}{2}\{A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, h_t))(h_t + \\ &\quad + \varepsilon v(t, \theta, h_t)) + A^*(\theta + \varepsilon u(t, \theta, h_t))(h_t^* + \varepsilon v^*(t, \theta, h_t))\} - \\ &\quad - \xi(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f)) - \frac{1}{2}\{A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f))(f(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v(t, \theta, f)) + \\ &\quad + A^*(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f))(f^*(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v^*(t, \theta, f))\}| \leq \\ &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma_0) |h_t - f(t, \theta(t))| \leq C |h_{t_0} - f(t_0, \theta(t_0))| e^{-\gamma(t-t_0)} \end{aligned}$$

Now, taking into consideration that h_{t_0} and $f(t_{l,0}, \theta_{l,0})$ belong to the domain U_{σ_0} , we finally obtain

$$|x(t) - f(t, 0(t))| \leq C_1(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}$$

The inequality (28.96) follows directly from the inequality (28.108) established in the corollary 2 of Lemma 3 with θ substituted for g .

The statements (5) and (6) of the theorem directly follow from Lemma 3 and its corollary 2.

Thus our theorem is completely proved.

We note that all the results formulated above can also be directly extended to the case when the fundamental equation has a somewhat more general form

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon) \quad (29.34)$$

and the expression

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, 0) dt \quad (29.35)$$

is put into the equation of the first approximation, corresponding to the given equation (29.34). In this case it is sufficient that the conditions imposed on $X(t, x)$ are equally satisfied by the function $X(t, x, \varepsilon)$, for ε in some interval $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

In fact, in such a case the equation (29.34) is reduced, with the same changes in variables, to a system of the form (27.105) with all the above-mentioned properties.

10.7.3 30. Periodic and Almost Periodic Solutions

In the present section we shall examine the important particular case in which the functions (29.20), $f(t, \theta)$, and the right-hand sides $F(t, \theta)$ of the equations are periodic functions of time t with a certain period T (not depending on θ) and the number of derivatives m is taken to be two. According to the properties (2) and (3) of the theorem 2 29, such cases of periodicity will occur when the functions $X(t, x)$ possess the period T in respect of t .

In this case, instead of the system (27.105) we choose the system

$$\left. \begin{aligned} dg &= (1) + \Pi \left(\begin{array}{c} \tau \\ d\tau \end{array}, g, h, \varepsilon \right) \\ dh - Hh + \Gamma \left(\begin{array}{c} \tau \\ \varepsilon \end{array}, g, h, \varepsilon \right) \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

and thereby obtain, in the inequality (29.22) of theorem 2, the relation

We have the "periodic case" for the functions $f(t, {}^6)$ and $F(t, {}^6)$ if in the equation (27.47)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon(t) + \varepsilon W(t, \varphi, b) \\ db &= \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \varphi, b), \\ dt &= \varepsilon Hb \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

the function $W(t, \varphi, b)$ and $B(t, \varphi, b)$, as shown on page 461, have the form (27.103), i.e.

$$\left. \begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \bar{W}(t, \varphi, +vt, b) \\ B(t, \varphi, b) &= \bar{B}(t, \varphi + vt, b) \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

where $\bar{W}(t, \varphi, b)$ and $\bar{B}(t, \varphi, b)$ possess a period T in relation to t .

Hence, we take the system of equations (27.104):

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \omega + \frac{v}{\varepsilon} + \bar{\Gamma}(\bar{\varepsilon}, \theta, h, \varepsilon), \\ d \uparrow \\ dt &= Hh + \bar{\Gamma}(\bar{\varepsilon}, \theta, h, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

as the system (30.1). The right-hand-side in these are periodic functions independent of the variable ε .

In the given case, in the inequality (29.22) of theorem 2, we shall have

$$\Omega(\varepsilon) = \omega + \frac{\nu}{\varepsilon}. \quad (30.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon) \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned} \right\}$$

3

thereby obtain, in the inequality (29.22) of theorem 2, the relation

$$\Omega(\Sigma) = \omega.$$

and the $\Omega(\varepsilon) = \omega$



the equation (27.47)

and F

where $W(t, \varphi,$

Hence,



The "periodic case" of the functions $f(t, 0)$ and $F(t, 0)$ is of particular interest because here, with the help of the classical results of Poincaré', supplemented by those of Denjoy, we can analyse the structure of the solutions lying in the manifold S_t .

We shall deal with this case in the present section.

We take the equation

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$$

and examine its solution $\theta(t)$ as a function of the initial values $t_0, \theta_0 = \theta(t_0)$ and the difference $t - t_0$:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \Phi(t - t_0, t_0, \theta(t_0)) \quad (30.9)$$

We note that by virtue of the property of periodicity of the right-hand-side of equation (30.8), i.e. of the function $F(t, \theta)$, with periods T and 2π in t and θ respectively, the function $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$ will be periodic in t_0 and θ_0 with periods T and 2π respectively.

Now let

$$\theta_n = \theta(t_0 + nT)$$

Hence, putting $t_0 + (n+1)T$ and $t_0 + nT$ into (30.9) for t and t_0 respectively, we get

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(T, t_0 + nT, \theta_n)$$

or, introducing the notation

$$\Phi(\theta_n) = \Phi(T, t_0, \theta_n)$$

and considering that $\Phi(T, t_0, 0_n)$ is a function periodic in t with a period T , we have

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(\theta_n) \quad (30.10)$$

where $\Phi(0)$ is a periodic function of θ with period 2π . In view of the fact that we took $m = 2$ in the conditions of the theorem 2, §29, the function $\Phi(0)$ will have continuous derivatives of the first and second order.

Further it follows from equation (30.8), in view of the inequality (29.23)

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leq \eta^*(\varepsilon) |\theta' - \theta''|$$

that

$$\frac{d\theta_{n+1}}{dt} - \frac{d\theta_n}{dt} \leq \varepsilon r_1^*(\varepsilon) |\theta_{n+1} - \theta_n|,$$

whence, by virtue of (30.10), we directly obtain

$$|\Phi'(\theta)| \leq \varepsilon \rho(\varepsilon), \quad (35.11)$$

where $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

For the values of ε for which is sufficiently small, we have, according to (30.11).

$$1 + \Phi'(\theta) > 0 \quad (30.12)$$

Thus the function

$$F(\theta) = \theta + \Phi(\theta) \quad (30.13)$$

increases monotonically by virtue of the relation (30.12) and has the property of periodicity of the second kind :

$$F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi$$

Hence the transformation

$$\theta \rightarrow F(\theta) \quad (30.14)$$

may be regarded as a unique and continuous reflection of the circle on itself.

Because of (30.10) we find that the successive values of the solutions of the equation (30.8) at the points $t = t_0 + nT$ are obtained by iterating the transformation of (30.14), starting with the initial value θ_0 .

Thus, in future, instead of the equation (30.8) and its solution we will examine the iteration equation (30.10), being equivalent to it and its solution.

We note that the iterations of the transformation of the type examined above were the investigation tools used by Poincare' and Denjoy*). The following results were arrived at by them.

(1) For the solutions θ_n of the iteration equation (30.10), i.e. according to the notation (30.13) of the equation

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n), \quad (30.15)$$

*) A. Denjoy, Sur les courbes de'finies par les e'quations differentielles a' la surface du tore, Journ. de Math., 11 (1932).

510

there exists the limit

$$\bar{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0_n}{2\pi n} \quad (30.16)$$

not depending on θ_0 .

(2) If $\bar{v}$ is irrational, then the general solution of the iteration equation (30.15) has the form

$$\theta_n = 2\pi\bar{v}n + \psi + E(2\pi\bar{v}n + \psi) \quad (30.17)$$

where ψ is an arbitrary constant and $E(\varphi)$ is a continuous periodic function with period 2π . The expression $\varphi + E(\varphi)$ is a monotonically increasing function, not remaining constant in any interval howsoever small.

(3) If $\bar{v}$ is rational, i.e.

$$\bar{v} = \frac{r}{s},$$

where r and s are mutually prime numbers, the given iteration equation (13.15) has periodic solutions for which the relations

$$\theta_{n+s} - \theta_n = 2\pi r \quad (30.18)$$

hold and in this case all solutions θ_n , when n increases without limit, approach one of these periodic solutions.

Moreover, if θ_m is any solution of the given equation (30.15), originating from the initial value θ_0 , lying in the interval $(0, 2\pi)$, then we can find constants α_m and β_m satisfying the inequalities,

$$\alpha_m > 0, \beta_m > 0, \alpha_m + \beta_m < 2\pi, \quad (30.19)$$

such that

$$-\alpha_m \leq 0_{ms} - 2\pi mr \leq \beta_m. \quad (30.20)$$

Now we shall derive a number of corollaries from the above-mentioned results of Poincare' and Denjoy.

We shall at first examine the case when v is irrational. Changing t_0 by $t_0 + nT$ in (30.19) and considering the periodicity of the function $\Phi(\tau, t_0, 0_0)$, in t_0 , we obtain

$$\theta(t) = 0_n + \Phi(t - t_0 - nT, T_0, \theta_n),$$

and from this, by virtue of (30.17), we get

$$\theta(t) = 2\pi\bar{v}n + \psi + E(2\pi\bar{v}n + \psi) + \Phi(t - t_0 - nT, t_0, 2\pi n +$$

$$+4 - E'(2\pi n + 4). \quad (3).21)$$

Now, for the sake of brevity, we introduce the following notation

$$-\xi + E(\varphi) + \Phi \left(\begin{array}{c} T \\ 2\pi\nu, t_0, \rho + E(\omega) \\ \zeta \end{array} \right) = f(\xi, \omega).$$

Hence, putting into (30.21)

$$\bar{\xi} = 2\pi\bar{v} \frac{t - t_0 - nT}{T},$$

we have

$$\theta(t) = 2\pi \frac{\bar{v}(t - t_0)}{T} + \psi + f \left(\frac{2\pi\bar{v} \frac{t - t_0 - nT}{T}}{T}, 2\pi \cdot n - \frac{v}{4} \right), \quad (30.22)$$

because

$$2\pi\bar{v} \frac{t - t_0}{T} = \bar{\xi} + 2\pi\bar{v}n.$$

We note that the function $f(\xi, \rho)$ introduced above is continuous and has a period 2π in respect of φ , because $E(\varphi)$ and $\Phi(-, t_0, t_0)$ are periodic in φ and θ_0 with period 2π .

Further, because the relation (30.22) is valid for any value n , we can write the identity

$$\begin{aligned} f \left(2\pi\bar{v} \frac{t - t_0 - nT}{T} - 2\pi\bar{v}, 2\pi\bar{v}n + \psi + 2\pi\bar{v} \right) &= \\ &= f \left(2\pi\bar{v} \frac{t - t_0 - nT}{T}, 2\pi\bar{m} + \bar{v} \right) \end{aligned} \quad (30.23)$$

The quantity t is arbitrary here. We now introduce instead of t a new independent variable u by the formula

$$t - t_0 - nT = \frac{T}{2\pi\nu} u.$$

Hence the inequality (30.23) may obviously be written in the form

$$f(u - 2\pi\bar{v}, 2\pi\bar{v}n + \psi + 2\pi\bar{v}) = f(u, 2\pi\bar{v}n + \psi). \quad (30.24)$$

Since the numbers $2\pi\bar{v}n$ form a dense set everywhere in the neighbourhood, we can conclude from the continuity of (30.24) that for all values of φ we would have the relation

$$f(u - 2\pi\bar{v}, \varphi + 2\pi\bar{v}) = f(u, \varphi) \quad (30.25)$$

Keeping this in view, we construct the function

$$f \left(2\pi\bar{v}R \left(\frac{u}{2\pi} \right), \varphi - 2\pi\bar{v}R \left(\frac{u}{2\pi} \right) \right) = f(u, \varphi), \quad (30.26)$$

where $R(\alpha)$ is the fractional part of the real number α . Since $R(\frac{u}{2\pi})$ is a periodic function of u with period 2π and is at the same time continuous except at the points $u = 2\pi m$ (m -integral) where it has a jump equal to unity, the function $f(u, \varphi)$ thus constructed will be a periodic

function in φ and u having a period 2π . Further it would be continuous, because in view of the identity (30.25), the property of continuity is preserved also at the points of discontinuity of the function $R_{(2\pi)}^u$.

Now we put into the right-hand-side of the formula (30.22)

$$n = \frac{t - t_0}{T} - R\left(\frac{t - t_0}{T}\right).$$

Hence, considering the relation (30.26), we can write the formula (30.22) in the form

$$\theta(t) = 2\pi\bar{v}\frac{t - t_0}{T} + \psi + f\left(2\pi\frac{t - t_0}{T}, 2\pi\bar{v}\frac{t - t_0}{T} + \psi\right). \quad (30.27)$$

Putting this expression into (29.20),

$$x = f(t, 0(t)), \quad (30.28)$$

we find that the solutions of the given fundamental equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

lying in the integral manifold S_1 for the given case of the irrational value of $\bar{v}$, have the following form :

$$x(t) = \Phi(\alpha_c t, \alpha_p t + \psi) \left(\alpha_e = \frac{2\pi}{T}, \alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}, \psi = \text{const} \right), \quad (30.29)$$

where $\Phi(\varphi, \theta)$ is a continuous function of the angular variables φ and θ with period 2π .

Thus, the given solutions of the equation (29.15), lying in manifold S_t , are found to be quasi-periodic functions posited in the fundamental frequencies—the 'external' frequency $z, 2\pi$ and the "natural" frequency $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}$.

We also note that, by (30.27), we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

and hence, by virtue of the inequality (29.22) and the equation (30.5), we obtain

$$|\alpha_p - \Omega(\varepsilon)| \leq \varepsilon \gamma^*(\varepsilon). \quad (30.30)$$

Thus, when $\bar{v}$ is irrational, $\Omega(\varepsilon)$ becomes the asymptotic approximation for the natural frequency $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}$.

Now we proceed to examine the case when the number $\bar{v}$ is rational, i.e.

$$\bar{v} = \frac{r}{s},$$

where r and s are mutually prime numbers.

Hence, by the results of Poincaré-Denjoy given above, in the integral manifold S_t there exist periodic solutions of the equation (30.8) with a period sT and in this case any solution belonging to S_t approximates to one of these periodic solutions with period sT when $t \rightarrow \infty$.

We now note that since here, in the case of periodic solutions, the frequencies will be multiples of $\frac{2\pi}{sT}$, we can represent them by linear combinations of the frequencies

$$\alpha_e = \frac{2\pi}{T}; \alpha_p = \frac{2\pi}{sT}r = \frac{2\pi}{T}\bar{v}. \quad (30.31)$$

Thus, in the given case when the value of the number $\bar{v}$ is rational, the stationary solutions of the equation (29.16) (periodic solutions lying in the manifold S_t) can formally be represented as functions possessing the fundamental frequencies α_c and α_p .

We now examine solutions not lying in the manifold S_t , limiting ourselves to the case when all the $n - 1$ characteristic indices have negative real parts.

In this case we will show that any solution of the fundamental equation (29.16), passing through any point of the domain U_{σ_0} when $t = t_0$, approximates one of the stationary solutions as $t \rightarrow \infty$, i.e. to a quasi-periodic solution when $\bar{v}$ is irrational or to a periodic solution when $\bar{v}$ is rational.

For this purpose it is sufficient to prove, as we find from the inequalities (29.25) and (29.26)

$$\begin{aligned} |x(t) - f(t, 0(t))| &\leq C_1(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)} \\ \frac{d\theta(t) - \varepsilon F(t, 0(t))}{dt} &\leq C_2(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)} \end{aligned}$$

that if any continuous and differentiable function $\theta(t)$ in the interval (t_0, ∞) satisfies the inequality (26.26), then

$$\theta(t) - \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (30.32)$$

where $\varphi(t)$ is a solution of the equation

$$d\varphi/dt = sF(t, \varphi). \quad (30.33)$$

For proving the statement it is sufficient to establish that for any sequence θ_n for which

$$|\theta_{n+1} - F(\theta_n)| \leq Q(\approx)e^{-\varepsilon\gamma_0 n}, \gamma_0 = \gamma T, \quad (30.34)$$

we have the relation

$$\theta_n - \varphi_n \rightarrow 0 \quad (30.35)$$

where φ_n satisfies the iteration equation

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n). \quad (30.36)$$

Thus, for completing the proof of our statement on the tendency of any solution of the fundamental equation (29.16) passing, for $t = t_0$, through any point in the domain U_{σ_0} to one of the stationary solutions, it remains to examine the sequence of θ_n satisfying the inequality (30.34) and to find for it the validity of the limit (30.35).

We shall deal with this now.

We first examine the expressions

$$\begin{aligned} 0_{m+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_m(m+1)} - F(0_m + Ke^{-t\gamma_m}) &= \theta_{m+1} - F(\xi_m) - +Ke_{-q,m}(e - F_n, F_n, F_n, F_n \\ 0_{n+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} - F(0_m - Ke^{-\varepsilon(m)}) &= \theta_{m-1} - F(\xi_m) - -Ke^{-\tau}, m(e^{-\tau}, -F), \end{aligned}$$

where K is some constant, in general small, chosen in the manne: shown below.

By virtue of the inequality (30.11) and the equation (30.13). we have

$$\begin{aligned} F'_\theta(\theta) &= 1 + \Phi'(\theta), \\ |\Phi'(\theta)| &\leq \varepsilon\varphi(\xi), \end{aligned}$$

whence we derive

$$1 - \text{sp}(\varepsilon) \leq F'_\theta(\theta) \leq 1 + \text{sp}(\varepsilon). \quad (30.38)$$

Hence, considering the inequalities (30.38) and (30.34), we obtain from the relation (30.37) the following inequalities:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{m+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} &< F(\theta_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_m m}) + Q(\varepsilon)e^{-[\gamma_m m - \\ &\quad - Ke^{-\varepsilon\gamma_m m}(1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_m})}, \\ \theta_{m+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_m} &> F(\theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}) - Q(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma_m + \\ &\quad - e^{-\varepsilon\gamma_m}}. \end{aligned} \right\} \quad (30.39)$$

Now let the number ε_0 be chosen so small that for any positive value ε less than ε_0 the following inequality is satisfied:

$$1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0} > 0. \quad (30.40)$$

Hence, assuming that the constant K is defined by the expression

$$K = \frac{Q(\varepsilon)}{1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}}, \quad (30.41)$$

and introducing the notation

$$\psi'_m = 0_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \quad \psi''_m = \theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \quad (30.42)$$

we obtain from the inequalities (30.39):

and

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{m+1} &< F(\psi'_m) \\ \psi''_{m+1} &> F(\psi''_m) \end{aligned} \right\} \quad (30.43)$$

We now examine the system of numbers

$$\varphi'_{m,n}, \varphi''_{m,n} \quad (30.44)$$

which are solutions of the iteration equation (30.36) in relation to the index m , i.e.

$$\varphi_{m+1} = F(\varphi_m)$$

when the initial conditions are represented by

$$\begin{aligned} \varphi'_{m,n} &= 0_n + Ke^{-\varepsilon\gamma, n} = -\psi'_n, \\ \varphi''_{m,n} &= \theta_n - Ke^{-\varepsilon\gamma_n n} = \psi''_n \end{aligned} \quad (m = n). \quad (30.45)$$

In consequence of the inequalities (30.43) and taking into consideration the monotonic increase of the function $F(\theta)$, we conclude that

$$\left. \begin{aligned} \psi'_m &\leq \varphi'_{m,n}, \\ \psi''_m &\geq \varphi''_{m,n} \end{aligned} \quad (m = n, n+1, n+2, \dots) \right\}$$

According to (30.45), we have

$$\begin{aligned} \theta_m &= \psi'_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \\ \theta_m &= \psi''_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \end{aligned}$$

whence, considering (30.46), we obtain the inequality

$$\varphi''_{m,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leq \theta_m \leq \varphi'_{m,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}. \quad (30.47)$$

At first we examine the case when $\bar{v}$ is irrational. In this case, by the property (2) of Poincare'-Denjoy (page 510), $\varphi'_{m,n}$ and $\varphi''_{m,n}$, as solutions of the iteration equation (30.36), may be represented in the form

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{m,n} &= 2\pi\bar{v}m + \xi_n + E(2\pi\bar{v}m + \xi_n), \\ \varphi''_{m,n} &= 2\pi\bar{v}m + r_n + E(2\pi\bar{v}m + r_n), \end{aligned} \right\} \quad (30.48)$$

where ξ_n and r_n are arbitrary constants.

Taking into consideration (30.47) (whence $\varphi''_{m,n} < \varphi'_{m,n}$) and remembering that $\varphi + E(\varphi)$ is a monotonically increasing function not becoming constant in any interval howsoever small, we can state that the constants ξ_n and r_n appearing in the relation (30.48) satisfy the inequality:

$$\xi_n > r_n. \quad (30.49)$$

Assuming $m = n + 1$ in the inequalities (30.47) and taking into consideration (30.45), we have

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{n+1,n} &\geq \theta_{n+1} + Ke^{-\tau\gamma(n+1)} = \varphi'_{n+1,n+1} \\ \varphi''_{n+1,n} &\leq \theta_{n+1} + Ke^{-\tau\gamma(n+1)} = \varphi'_{n+1,n+1} \end{aligned} \right] \quad (30.50)$$

Comparing (30.50) and (30.48), we derive

$$\begin{aligned} \xi_n + E(2\pi(\bar{v}n + \bar{v}) + \xi_n) &\geq \xi_{n+1} + E(2\pi(\bar{v}n + \bar{v}) + \xi_{n+1}), \\ r_n + E(2\pi(\bar{v}n + \bar{v}) + r_n) &\leq r_{n+1} + E(2\pi(\bar{v}n + \bar{v}) + r_{n+1}), \end{aligned}$$

and hence, in view of the monotonic increase of the function $\cdot + E(\cdot)$, we find that

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n+1} &\leq \xi_n, \\ r_{n+1} &\geq r_n. \end{aligned} \right\} \quad (30.51)$$

On the other hand, it follows from equations (30.48) and (30.45) that

$$\xi_n + E(2\pi\bar{v}n + \xi_n) - r_n - E(2\pi\bar{v}n + r_n) = 2Ke^{-\tau\eta_n} \rightarrow 0,$$

whence

$$\xi_n - r_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (30.52)$$

The relations (30.49), (30.51) and (30.52) show that the sequences ξ_n and r_n tend to some general limit ψ , first by decreasing and then by increasing.

On the other hand, neglecting the term $Ke^{-s\gamma/m}$ in the inequalities (30.47) and considering (30.48), we have

$$2\pi\bar{v}m + \xi_m + E(2\pi\bar{v}m + \xi_m) > \theta_m > 2\pi\bar{v}m + r_m + E(2\pi\bar{v}m + r_m), \quad (30.53)$$

whence, for $m \rightarrow \infty$, we derive

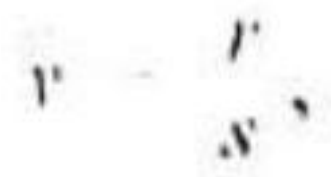
$$\theta_m - \{(2\pi\bar{v}m + \bar{\psi}) + E(2\pi\bar{v}m + \bar{\psi})\} \rightarrow 0,$$

or

$$\theta_m - \varphi_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

which was to be proved.

Now we examine the case when r is rational



where r and s are mutually prime numbers. We introduce the function obtained by applying the transformation F s times viz

$$\Phi_1(\varphi) = F(\dots F(\varphi) \dots) - 2\pi r,$$

and note that it will be a continuous and monotonically increasing function of φ

Since $F(\varphi)$ has the property of periodicity of the second kind with period 2π it follows that the difference

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi \quad (30.57)$$

will also be periodic in φ with period 2π

Since in the case of the rational value of $\bar{v}$ ($\bar{v} = \frac{r}{s}$) by virtue of the property established by Poincaré-Denjoy the periodic solutions of the iteration equation

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$$

satisfy the relation

$$\varphi_{n+s} - \varphi_n = 2\pi r, \quad (30.58)$$

so for them

$$\varphi_{n+s} = F(\dots F(F(\varphi)) \dots),$$

or by virtue of

$$\varphi_{n+s} - 2\pi r = \Phi_1(\varphi_n); \quad (30.59)$$

further considering and assuming $n = ms$ we obtain

$$\varphi_{mx} = \Phi_1(\varphi_{mx}).$$

Thus taking one of the roots of the equation

$$\varphi = \Phi_1(\varphi) \quad (30.60)$$

as the initial value φ_0 we obtain a solution of the iteration equation φ_{ms} from the initial value φ_0 this solution according to (30.58) may be written in the form

$$\varphi_{ms} = \varphi_0 + 2\pi rm. \quad (30.61)$$

However we have

By the relation (30.34) we also have

$$\theta_{mn+1} - F(0_m) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (30.63)$$

Hence in the given case when v is rational in order to prove the relation

$$\theta_n - \varphi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

we have to show that

$$\theta_{ms} - \varphi_{ms} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

or what follows directly from 3062 and 3063

$$\theta_{ms+1} - \varphi_{ms+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

or finally

$$\theta_{ms+k} - \varphi_{ms+k} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

in general where $k = 0, 1, 2, \dots, s-1$

Considering 3061 the relation 3064 may be written in the form

$$\theta_{ms} - 2\pi r m \rightarrow \varphi_0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (30.65)$$

where φ_0 is one of the roots of the equation 3060. Hence for proving the statement on the tendency of any solution of the fundamental equation 2916 to pass through any point of the domain U_{σ_0} to one of the stationary values when $t = t_0$ and $\bar{v}$ is rational the validity of the passage to the limit 3065 remains to be established.

Therefore we prove the limit 3065. We take any solution p_m of the iteration equation 3036 starting from the initial value ρ_0 arbitrarily fixed in the interval $(0, 2\pi)$.

Considering that by virtue of 3061 we put by way of brevity

$$\varphi_0 = \varphi_{ms} - 2\pi r m,$$

$$\bar{\varphi}_m = \varphi_{ms} - 2\pi r m.$$

Hence, according to the property (3) of Poincaré-Denjoy (page 510), we have

$$-\alpha_m \leq \bar{\varphi}_m \leq \beta_m,$$

where

(30.66)

$$\alpha_m > 0, \beta_m > 0, \alpha_m + \beta_m < 2\pi$$

On the other hand, according to (30.19) and (30.59), we can write

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \varphi_{ms+s} - 2\pi r - 2\pi m r = \Phi_1(\varphi_{ms}) - 2\pi m r.$$

But since we have

$$\varphi_{ms} = \bar{\varphi}_m + 2\pi m r$$

and that $\Phi_1(\varphi)$ possesses the property of periodicity of the 'second kind', we have

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \Phi_1(\bar{\varphi}_m) \quad (30.67)$$

Further, because of the monotonic increase of $\Phi_1(\varphi)$ when the given solution of the iteration equation (30.36), φ_m , is not periodic, i.e. if the numbers φ_m are not constant in relation to the index m , the sequence

$$\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m, \dots$$

will tend, either by increasing or by decreasing, to some limit which is a root of the equation (30.60).

We now prove the following Lemma.

Lemma (a). The sequence

$$\bar{\varphi}_m (m = 0, 1, 2, \dots)$$

can never 'skip' through any root of the equation (30.60),

$$\varphi = \Phi_1(\varphi),$$

i.e. there does not exist a whole number m_0 such that

$$\bar{\varphi}_{m_0} < \varphi_0 < \bar{\varphi}_{m_0+1} \quad (30.68)$$

or

$$\bar{\varphi}_{m_0} > \varphi_0 > \bar{\varphi}_{m_0+1}. \quad (30.69)$$

Proof. Suppose that the inequality (30.68) holds. Then, because of the monotonic increase of the function $\Phi_1(\varphi)$, we have

$$\Phi_1(\bar{\varphi}_{m_0}) < \Phi_1(\varphi_0)$$

and from this, considering the relation (30.67), we obtain which contradicts (30.68). $\varphi_{m_0+1} < \varphi_u$,

Similarly the impossibility of the inequality (30.69) can be proved.

Lemma (b). If the sequences

$$\varphi'_m, \bar{\varphi}''_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (30.70)$$

corresponding to the solutions of the iteration equation (30.36), tend to different roots of the equation (30.60), then there always lies among the quantities

$$\bar{P}'_m, \bar{\varphi}''_m$$

at least one root of the equation (30.60).

Proof. Before we proceed on to the proof, we note that two cases may arise here : (1) when both the sequences under examination increase or decrease simultaneously and (2) when one increases and the other decreases.

We first examine the case of the simultaneous increase. Let, for the sake of definition,

$$\bar{\varphi}'_0 > \bar{\varphi}^u_0.$$

Then, since both the sequences increase and tend to different roots of the equation (30.60), it is obvious that for all values of m

$$\bar{\varphi}'_m > \bar{\varphi}^u_m$$

Going over to the limit, we have

$$\varphi' > \varphi'',$$

where φ' and φ'' are roots of the equation (30.60), which are limits of the sequences $\bar{\varphi}'_m$ and $\bar{\varphi}''_m$ respectively.

Owing to the monotonic increase of the sequence $\bar{\rho}_m^-$, we obtain

$$\bar{\varphi}''_m < \varphi''. \quad (30.71)$$

Since the sequence $\bar{\varphi}'_m$ cannot, by virtue of Lemma (a), jump over φ'' , we have for all values of m

$$\varphi'_m > \varphi''. \quad (30.72)$$

We obtain from inequalities (30.71) and (30.72):

$$\bar{\varphi}''_m < \varphi'' < \bar{\varphi}'_m$$

this proves the validity of the Lemma in the present case.

Similar arguments may also be advanced when the sequences (30.70) decrease simultaneously.

Now suppose that one of the sequences (30.70) decreases while the other increases. In this case the signs of the following two expressions

$$\bar{\varphi}'_{m+1} - \bar{\varphi}'_m = \Phi_1(\bar{\varphi}'_m) - \bar{\varphi}'_m$$

and

$$\bar{\varphi}''_{m+1} - \bar{\varphi}''_m = \Phi_1(\bar{\varphi}''_m) - \bar{\varphi}''_m$$

are different.

Hence, as the equation (30.60)

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi = 0$$

is continuous, we have at least one root in the interval

$$[\bar{\varphi}'_m, \bar{\varphi}''_m]$$

Thus, Lemma (b) is fully proved.

We now turn to examine the inequality (30.47):

$$\varphi''_{m,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leq 0_m \leq \varphi'_{n,m} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \quad (m = n, n+1, n+2, \dots).$$

Introducing, for the sake of brevity,

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{ms,ns} - 2\pi rm &= \bar{\varphi}'_{m,n} \\ \varphi''_{ms,ns} - 2\pi rm &= \bar{\varphi}''_{m,n} \\ \theta_{ms} - 2\pi rm &= \bar{\theta}_m \end{aligned} \right\} \quad (30.73)$$

changing m and n in (30.47) by ms and ns respectively and subtracting $2\pi/m$ from both the sides of the inequality, we obtain

assuming $m = n$ in (30.45) and considering (30.73), we obtain

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}'_{n,n} &= \bar{\theta}_n + Ke^{-\tau\gamma_0^{nx}} \\ \bar{\varphi}''_{n,n} &= \theta_n - Ke^{-\tau\gamma_0^{nx}} \end{aligned} \right\} \quad (30.75)$$

If now the sequences

$$\bar{Q}'_{m,n}, \bar{Q}''_{m,n} \quad (30.76)$$

tend, for any fixed value n when $m \rightarrow \infty$, to one and the same root φ_0 of the equation (30.60), it follows from (30.74) that

$$\bar{\theta}_m \rightarrow \varphi_0 \quad \text{when} \quad m \rightarrow \infty,$$

or, taking into consideration the third equation in (30.73), we have

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \rightarrow \varphi_0, \quad m \rightarrow \infty$$

which proves our statement.

If, on the other hand, for any value of n the sequences (30.76) tend to different roots of the equation (30.60), when $m \rightarrow \infty$, then, by virtue of the Lemma (b), there lies in the interval

$$l_n = [\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}''_{n,n}]$$

at least one root of the equation (30.60).

It is easy to prove, however, that for any arbitrary positive k the intervals

$$l_{n+k} = [\bar{\varphi}'_{n+k,n+k}, \bar{\varphi}''_{n+k,n+k}] \quad \text{and} \quad l_n = [\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}''_{n,n}]$$

have a common part.

Now, if these intervals have no common part, then one of the following two relations

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}^*_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}'_{n,n} > \bar{\varphi}^*_{n,n} \quad (30.77)$$

or

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n+k} < \bar{\varphi}''_{n+k,n+k} < \bar{\varphi}'_{n,n} < \bar{\varphi}''_{n,n} \quad (30.78)$$

will be satisfied. We first assume that the relation (30.77) is satisfied. Then, assuming $m = n + k$ in (30.74), we have

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s} \geq \bar{\theta}_{n+k} \geq \bar{\varphi}''_{n+k,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s}.$$

Considering (30.75), we can write

$$\bar{\theta}_{n+k} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s} = \bar{\varphi}'_{n+k,n+k}$$

and hence, from (30.77) and (30.78), we obtain

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n} \geq \bar{\varphi}'_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}''_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}''_{n,n} \quad (30.80)$$

We denote by α^*_{n+k} a root of the equation (30.60) that lies in the interval $l_{n+k} = [\bar{\varphi}'_{n+k,n+k}, \bar{\varphi}''_{n+k,n+k}]$. On the basis of (30.80) this root also satisfies the relation

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n} > \alpha^*_{n+k} > \bar{\varphi}'_{n,n}.$$

Thus we see that the sequence

$$\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}'_{n+1,n}, \bar{\varphi}'_{n+2,n}, \dots, \bar{\varphi}'_{n+k,n}$$

'jumps' over a root of the equation (30.60) which contradicts the Lemma (a).

Similarly, the impossibility of the inequality (30.78) can be proved.

Thus, the intervals

$$l_{n+k} \quad \text{and} \quad l_n$$

have common parts.

Since, on the other hand, by virtue of (30.75), the length of the interval l_n is equal to $2Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}$ and we find, in each of these intervals, $\bar{\theta}_n$ and the roots of the equation (30.60), we have for $n \rightarrow \infty$

$$\bar{\theta}_n \rightarrow \varphi_0$$

where φ_0 is a root of the equation (30.60); or, according to notation (30.73),

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \rightarrow \varphi_0, \quad m \rightarrow \infty.$$

This proves the case when $\bar{v}$ is rational.

We now sum up the results obtained above in the form of the following theorem.

Theorem 3.

Suppose the conditions (a) and (b) of theorem 2129 (page 501) and the condition (c) when $m = 2$ is satisfied for the equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)$$

(30.81)

Moreover, let one of the following two conditions be satisfied:

a.) $X(t, x)$ is a periodic function in t with a period T , also in respect of $x \in U_p$, and β) in the equation (30.4) the functions $W(t, \cdot, b)$ and $B(t, \bar{z}, b)$ have the form

$$\begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \bar{W}(t, \varphi + vt, b) \\ B(t, \varphi, b) &= \bar{B}(t, \varphi + vt, b) \end{aligned}$$

the functions $\bar{W}(t, \rho, b)$ and $\bar{B}(t, \rho, b)$ having a period T in t and also in respect of φ, b .

Hence, we can find a sufficiently small positive number ε and a positive number σ_0 ($\sigma_0 < \rho$), such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the equation (30.81) is a unique integral manifold S_t , lying for all real values of t in the domain U_σ satisfying the results of (2) and (3) of theorem 2. in which we have to put $m = 2$.

The behaviour of the solutions,

$$x = f(t, \theta),$$

when θ is determined from the equation

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta),$$

$f(t, 0)$ and $F(t, 0)$ being periodic functions of t with a period T not depending on θ , is characterised by the number $\bar{r}$ and may be represented as

$$x(t) = \Phi(\alpha_e t, \alpha_p t + \psi), \quad \psi = \text{const}$$

where $\alpha_o = \frac{2\pi}{T}$ (external frequency), $\alpha_p = \frac{2\pi}{T} \bar{v}$ (natural frequency) and $\Phi(\varphi, \psi)$ is a continuous function in the angular variables φ and ψ with period 2π .

Thus if $\bar{v}$ is irrational, each of the solutions $x(t)$ lying in the integ. ral manifold S_t is a quasi-periodic function of t with two fundamental frequencies α_0 and α_p . If $\bar{v}$ is rational, then in the integral manifold S_t , there exist periodic solutions with this fundamental frequency and any non-periodic solution lying in the integral manifold S_t approximates to one of these periodic solutions when $t \rightarrow \infty$.

When the condition α) is fulfilled we have the inequality

$$|\alpha_p - \varepsilon\omega| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

and when the condition β) is satisfied we have the inequality

$$|\alpha_p - \nu - \varepsilon\omega| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Suppose that, in addition to the conditions laid down above, all the $n - 1$ characteristic indices have negative real parts. Then, any solution of the equation (30.81) passing through any point of the domain U_σ , where $t = t_0$, approximates to one of the stationary solutions when $t \rightarrow \infty$ (to quasi-periodic solution when $\bar{\nu}$ is rational while to a periodic solution when $\bar{\nu}$ is rational).

Finally we give a number of applications of theorems 1,2 and 3 to the theory of non-linear oscillations in systems with one degree of freedom.

We begin with an examination of the free oscillations characterised by a differential equation of the form (1.1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

with a small positive parameter ε .

Thus, the equation of the first approximation for the amplitude of the oscillations will be (1.24) :

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a)$$

and in this case, by virtue of (1.27), we have

$$A_1(a) = -2\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos t, -a_0 \sin t) \sin \nu t dt.$$

We now show that with the help of theorem I and the remarks made in connection with it, we can directly find the relations, obtained in Chapter 1, relating to the properties of periodicity and stability for the approximate solutions.

For this, we make the following change of variables in equation (1.1) :

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ dx & \\ dt &= -a(\omega) \sin t. \end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \zeta) \sin \zeta, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a} f(a \cos \psi, -a(\omega \sin \zeta) \cos \psi, \end{aligned} \right\}$$

whence

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} \frac{f(a \cos \psi, -a\omega \sin \zeta) \sin \zeta}{1 - \frac{\varepsilon}{a\omega^2} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \zeta) \cos \psi} \quad (30.83)$$

Thus, we pass on to an equation of the form (26.1).

The corresponding equation of the first approximation, (26.2), will be :

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \varphi') \sin \varphi' d'$$

i.e.

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{\omega} A_1(a)$$

Let the equation

$$A_1(a) = 0$$

have a non-trivial solution

$$a = a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

for which

$$A'_1(a_0) \neq 0$$

We also assume that the function $f(x, x')$ in the plane (x, x') is continuous, with its partial derivatives of the first order in the neighbourhood of the ellipse

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2 \quad (30.84)$$

Hence, from the above-mentioned theorem, we can see that for sufficiently small values of ε the exact equation (30.83) has a periodic solution

$$a = a_0(\psi)$$

with period 2π , nearly equal to a_0 . This solution will be stable when

$$A'_1(a_0) < 0 \quad (30.85)$$

and will have the property of attracting solutions nearly equal to it. When

$$A'_1(a_0) > 0 \quad (30.86)$$

it is unstable and possesses the property of repelling a similar solution.

Taking into consideration the change of variables effected above and the second of the equations (30.82) we find that the equation (1.1) under examination possesses, for sufficiently small values of ε , a limit cycle corresponding to the periodic solution close to the ellipse (30.84). Under the condition (30.85), this limit cycle will be stable and for the condition (30.86), it will be unstable.

These are the same conclusions which were arrived at during the discussion of the approximation theory.

We now proceed to investigate oscillating systems described by a more general equation, (13.1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

in which $f\left(0, x, \frac{dx}{dt}\right)$ is a periodic function of v with period 2π .

We first examine the case of resonance when

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 21$$

here p and q are mutually prime numbers.

The corresponding equations of the first approximation will be

$$da = \varepsilon A_1(a, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \theta) \quad (30.8)$$

where, by virtue of (13.14) and (14.23), we have

$$A_1(a, \theta) = -\frac{1}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi q}{v}} f_0 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) \sin \left(\frac{p}{q}vt - \theta \right) dt, \\ B_1(a, \theta) = \frac{\Delta q}{2pv} - \frac{1}{2\pi pa} \int_0^{2\pi q} f_0 \left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \theta \right) \cos \left(\frac{p}{q}vt + \theta \right) dt. \quad (30.88)$$

In order that we may make use of our theorems, we effect the following change of variables in the equation (13.1):

$$x = \xi \cos \frac{p}{q}vt + \eta \sin \frac{p}{q}vt, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{p}{q}v \sin \frac{p}{q}vt + \frac{p}{q}v \cos \frac{p}{q}vt,$$

thus reducing it to a system in the standard form:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi, \tau_1), \quad dr_i/dt = \varepsilon Y(t, \Sigma_i, r_i), \quad (30.90)$$

where

$$X(t, \xi_i, \tau_i) = -\frac{F(t, \xi_i, \eta_i) \sin \frac{p}{q}vt}{\frac{p}{q}v}, \quad Y(t, \zeta_i, \tau_i) = \frac{F(t, \zeta_i) \cos \frac{p}{q}vt}{\frac{p_i}{q}} \\ F(t, \zeta, \tau_1) = f \left(vt, \zeta_c \cos \frac{p}{q}vt + \tau_i \sin \frac{p}{q}vt, -\zeta_q^p v \sin \frac{p}{q}vt + \right. \\ \left. + r_1 \frac{p}{q}v \cos \frac{p}{q}vt \right) - \Delta \left(\xi \cos \frac{p}{q}vt + r_1 \sin \frac{p}{q}vt \right).$$

We find that the right-hand-sides of the equations (30.87) are periodic functions of t with period $\frac{2\pi q}{v}$.

We also find that the equations of the first approximation corresponding to the system (30.90)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon 2\pi q \int_0^{2\pi q} X(t, \bar{v}, \eta') dt \\ \frac{dr_1}{dt} = \varepsilon \sum_{2\pi q}^v \int_0^{2\pi q} Y(t, \bar{v}, \eta_1) dt$$

are equivalent to the equations (30.87) and pass over to them by the change of variables

$$\xi = a \cos \theta, \quad \eta = -a \sin \theta.$$

We assume that the equations (30.87) have a constant solution

$$a = a_0, \quad \theta = \theta_0 \quad (30.91)$$

and that in the neighbourhood of the ellipse

$$x^2 + \frac{x^{x_2}}{\left(\frac{p}{q}v\right)^2} = a_0^2 \quad (30.92)$$

the function $f(t, x, x')$ is continuous, along with its partial derivatives of the first order with respect to x and x' .

Further, let both the roots of the characteristic equation, corresponding to the variational equation for the solution (30.81), have negative real parts. Thus, evidently, the conditions of theorem 1 are fulfilled.

Taking into consideration the properties established for it we can state that in the given case, for sufficiently small values of ε , equation (13.1) has a periodic solution with period $\frac{2\pi q}{v}$, very close to the harmonic solution

$$a_0 \cos \left(\frac{p}{q} vt + \varphi_0 \right).$$

Any solution passing through a point of neighbourhood of the ellipse (30.92) will approach asymptotically a $t \rightarrow +\infty$.

Now let the equations of the first approximation have a periodic solution with a characteristic index, the real part of which is different from zero and let the function $f(t, x, x')$ in some neighbourhood of the orbit of this solution possess continuous partial derivatives with respect to x and x' upto the second order inclusive.

In this case conditions of theorems 2 and 3 (with condition (a)) are fulfilled.

Hence, we can state, for instance, that for sufficiently small values of ε , in some neighbourhood of the above orbit, there are stationary solutions having two fundamental frequencies - natural and forced. When the ratio of these frequencies is irrational, the stationary solutions are quasi-periodic and when this ratio is rational these are periodic.

For the case when the real part of the characteristic index is positive, these stationary solutions are unstable. If, on the other hand, this real part is negative, any solution of the equation (13.1), for which, at some value of t_0 , the point

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) \cos \frac{p}{q't - \frac{x'(t)}{\frac{p}{q}} \sin \frac{p}{q} vt} \\ \eta(t) &= x(t) \sin \frac{p}{q} vt + \frac{y'(t)}{\frac{p}{q}} \cos \frac{p}{q} vt \end{aligned}$$

lies sufficiently close to the above-mentioned orbit, approaches asymptotically the stationary solution, as $t \rightarrow +\infty$.

We now proceed to examine the non-resonance case when the equations of the first approximation have the form

$$\begin{aligned} da & \\ dt = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a), \end{aligned} \tag{30.93}$$

in which $A_1(a), B_1(a)$ are determined by the formulae (13.15) and (13.35) :

$$\begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi d\theta \\ B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi d\theta \end{aligned}$$

For convenience in applying the theorems 2 and 3, we effect the following change of variables in the equations (13.1):

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

We now obtain the equations in the standard form:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(\nu t, \omega t + \varphi, a), & \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon B(\nu t, \omega t + \varphi, a), \end{aligned} \quad (30.94)$$

in which

$$\begin{aligned} A(\theta, \psi, a) &= -\frac{1}{\omega} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi, \\ B(\theta, \psi, a) &= -\frac{1}{\omega a} f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi. \end{aligned}$$

The right-hand-sides of these equations are, as we find, quasiperiodic functions with two fundamental frequencies, ω and ν .

$$\left. \begin{aligned} \text{If the ratio of these frequencies is rational, we have} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(\nu t, \omega t + \varphi, a) dt &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta, \psi, a) d\theta d\psi = A_1(a) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(\nu t, \omega t + \varphi, a) dt &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta, \psi, a) d\theta d\psi = B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (30.95)$$

We now note that these identities may be fulfilled not only for the irrational values of the ratio $\frac{\omega}{\nu}$.

We take, for instance, the case examined in Chapter 3 where $f(\nu t, x, x')$ is represented in the form of a finite sum

$$\sum_{-N}^N e^{i\nu t} f_n(x, x'),$$

in which $f_n(x, x')$ are polynomials in x and x' .

It is easy to see that in this case we can find a finite set of rational numbers such that if $\frac{\omega}{\nu}$ is not equal to one of the numbers of this set, the identities (30.95) are satisfied.

Suppose that these identities are anyhow valid.

Then, the equations (30.93) are found to be equations of the first approximation (averaged equations) for the system (30.94).

We assume that the equation

$$A_1(a) = 0$$

has a non-trivial solution :

$$a = a_0 \neq 0,$$

for which

$$A'_1(a) \neq 0.$$

We also assume that the function $f(\theta, x, x')$ possesses continuous partial derivatives with respect to x and x' upto the second order inclusive, in some neighbourhood of the ellipse

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2$$

In this case, evidently, the conditions for theorems 2 and 3 (condition (b)) are fulfilled.

Hence, we may state that for sufficiently small values of ε the equation (13.1) really has stationary solutions with an amplitude very close to a_0 and that these solutions, as functions of t , possess two fundamental frequencies, the natural one and the forced one.

When

$$A'_1(a_0) > 0$$

the family of stationary solutions possesses the property of repelling and when

$$A'_1(a_0) < 0$$

it has the property of attracting the near solutions.

It is interesting to note that the conditions laid down above ensuring the application of theorems 2 and 3, are somewhat generalised and that when they are fulfilled, even the series (13.46) entering into the improved first approximation may be found to be divergent*).

We have examined the problem of finding the properties of the exact solutions from the properties of the solutions in the first approximation.

In a number of cases, however, it is interesting to use, for this purpose, equations of higher approximation. Thus, for example, the real parts of the characteristic indices may become zero for equations of the first approximation.

There may also arise the question of theoretical estimation of the errors in the asymptotic approximations of higher order.

For such cases it is not difficult to generalise the method discussed in 29 with the help of the expression for the improved m -th approximation as formula for change of variables. In this case we arrive at a system of equations of the type (27.105) in which the "additional terms" P and Q will also be of the order ε^{m+1} ; this, of course, would raise the order of the estimates obtained.

It is natural to expect that such systems require an imposition of stricter conditions on the character of the regularity of the functions entering into the differential equations under study.

10.7.4 Bibliography

1. Andronov, A. A. Collected Works; Acad. Sci. USSR, Publishing House, 1956.
2. Andronov, A. A. and Khaikin, S. E. Theory of Oscillations; Scientific and Technical Publishing House, Moscow, 1937.
3. Aseev, B. P. Fundamentals of Non-Linear Radio-Technics ; Moscov, 1953.
4. Van-der-Pol, B. Non-Linear Theory of Electrical Oscillations; Communications Publishing House, Moscow. 1935.
5. Berg, A. I. Theory and Calculations for Tube Oscillators : State-Energetics Publishing House, Moscow, 1932.
6. Bogoliubov, N.N. Oscillation Mechanics in USSR during 30 years; State Technical Publishing House, Moscow, 1950.
7. Bogoliubov, N.N. On certain Statistical Methods in Mathematical Physics : Acad. Sci. USSR Publishing House, Moscow, 1945.
8. Bogoliubov, M. M. Synchronisation of Relaxation Oscillations; Scientific Works of Kiev University-I, issue IX, Math. coll. No. 6 (1950).
9. Bogoliubov, N.N. Theory of Perturbations in Non-Linear Mechanics: Collection of papers of the Institute of Construction Mechanics, Acad. Sci. Ukr. SSR, No. 14, (1950).

^{0*)} Owing to the existence of small divisors of the form $\omega^2 - (n\alpha + m\omega)^2$.

10. Bogoliubov, N.N. and Zubarev, D. N. Method of Asymptotic Approximation for Systems with Rotating Phase and its Application in the Study of Motion of Charged Particles in a Magnetic Field ; U.M.Z. VII, 1955.
11. Bulgakov; B. V. Oscillations; State Technical Publishing House, Mosoow, 19 : 4.
12. The First All Union Conference on Oscillations Reports, Resolutions and Minutes of the Conference) ; GTTI, Moscow, 1933.
13. Den-Hartog. Theory of Oscillations: State Technical Publishing House, Mescow, 1942.
14. Duffing, G. Forced Oscillations with Changing Eigen-Frequency; Braunschueig, 1918.
15. Dorodnitsin, A. A. Asymptotic Solution of the Van-der-Pol Equation: Applied Mathematics and Mechanics, XI (1947).
16. Journal of Technical Physics, vol. IV, no. 1 (1934); (the entire number is devoted to the Problems of Non-Linear Radio-Technics).
17. Krylov, M. M. and Bogoliubov, M. M. On Non-Linear Mechanics; Publication of A. N. Ukr. SSR.

10.7.5 Bibliography

- 18KrylovNMand BogoliubovNNNew Methods of NonLinear Mecha nics Applied to the Study of the Operations of Electrical OscillatorsPart IONTI 1934.
- 19KrylovNMand B og olium of Resonance in an Electrical OscillatorAcad Mechanics as Applied to the
Sci UkrSSR Pouse 1934.
- 20KrylovMM BogoliubovNNFundamentals of the Problems of NonLinear Mechanics
Publication of ANUkrSSR 1934.
- 21KrylovNMand BogoliubovNNApplication of the Methods of Non Linear Mechanics to the
Theory of Stationary OscillationsPublication of the AcadSci
- 22KrylovNand BogoliubovNNIntroduction to NonLinear Mecha nicsPubof the
AcadSciUkrSSR 1937.
- 23KrylovNMand BogoliubovNNMethods of NonLinear Mechanics as Applied to the Study of
Perturbations of the Periodic Movement and Diverse Phenomena of Resonance Relating to it
Monograph in FrenchKiev 1935.
- 24LefschetzSLectures on Differential EquationsPrinceton UnivPub 1946.
- 25LefschetzSDifferential EquationsGeometric TheoryLondon 1957.
- 26LienardAStudy of the SteadyState OscillationsRevgendElectrParis 1928.
- 27LiapunovAMThe General Problem of Stability in MotionONTI 1935.
- 28MalkinlGSome Problems in the Theory of NonLinear OscillationsState Technical
Publishing HouseMoscow 1956.
- 29MandelstamLTComplete Collected WorksAcadSciUSSR Pub19481952
- 30MinotskyNIntroduction to NonLinear MechanicsAnnArborMich 1947.
- 31MitropolskyYANonStationary Processes in NonLinear Oscillating Systems AcadSci
UkrSSRPub 1955.
- 32NonLinear Systems Collection of articles edited by AcadMVShulcikinCommuni cation
Publishing House 1939.
- 33NemtskyVVand StepanovVVQualitative Theory of Differential Equations State Technical
Publishing House 1950.
- 34Fundamentals of Automatic Regulation Theory edited by VVSolodovnikovState Technical

- PubHouseMoscow 1954.
- 35PapalexiNDCollected WorksAcadSciUSSR 1948.
- 36PisarenkoGSOscillations of Elastic Systems with Scattering of Energy in the Material AcadSciUkrSSR 1955.
- 37PoincareAOn Curves Defined by Differential EquationsState Technical Publishing House 1947.
- 38PoincareHNew Methods in Celestial Mechanics volI1892volII1893 volIII1899ParisGautheirVillars
- 39SansoneGand ContiRNonLinear Differential EquationsRome 1956.
- 40StokerJNonLinear Oscillations in Mechanical and Electrical SystemsForeign Publishing House 1953.
- 41SuzantAEIntroduction to NonLinear RadioTechnics 1934.
- 42TeodorchikKFSelfOscillating SystemsState Technical Publishing House 1952.
- 43TikhonovANDependence of the Solutions of Differential Equations on a Small Parameter Mathematical Anthology 2264, 193 – 204 1948
- 44KharkevichAAAAutonomous OscillationsState Technical Publishing House 1954.
- 45 ChetayevNGStability of Motion State Technical Publishing House IASK
- 46ChelomeiVNon oscillations of Rods under the Action of Periodically Changing Longitudinal Forces Works of KAINoVIII 1937.
- 47ChelomeiVNon the Dynamical Stability of the Elements of Aviation Parts structuralJournal of Civil AviationNoXII 1940.
- 48ShtokaloIZCriteria of Stability and Instability of the Solutions of Linear Equations with Quasiperiodic CoefficientsMathematical AnthologyNew series vol19No 2 1946
- 49Khayasi TikhonovForced Oscillations in Nonlinear SystemsForeign Lit Publishing House 1957.

Part VI

Appendix

A Introduction and Overview

Приведу общие важные соображения о том, как я вижу предмет.

(все это уже проявлено выше, тут лишь четкие указания для полноты и для тех, у кого вопросы в том, что мне итак очевидно.)

A.1 Some General Ideas

(потом раскрою)

A.1.1 Extra Motivation

(??? I'll write it later)

A.1.2 Ways to Earn Money

(???? I think, there should be an answer about it)

A.1.3 Usage in Everyday Life (!)

A.2 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.3 Literature

A.3.1 Main Literature

Основная обучающая литература по колебания

[1] Пухов, А.А. Лекции по колебаниям и волнам: учеб. пособие. Ч. 1. Колебания

Прекрасные лекции от профессионала в теории колебаний. БОльшая часть этой записи пока что на них основана.

[2] Nayfeh, A.H. Perturbation Methods

Прекрасная книга с отличным изложением. Есть на русском бесплатная, её я и читал и по ней много разделов и написал.

Books With Many Solved Problems

[3] Пухов, А. А. Колебания и волны в задачах и упражнениях: учеб. пособие https://mipt.ru/dppe/files/kiv_tasks.pdf

Просто куча задач, многие очень стоящие. Решений нет, ответов тоже, но что задачи есть, уже хорошо, можно искать ответы.

Литература крепкого минимума

A.3.2 Extra Literature

Профессиональная по колебаниям

[4] Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний

Большая книга с очень профессиональной теорией, выгрузил, после основной теории может быть почитаю их, может, не так и сложно, если 1 неделю только развиваться в этом.

[5] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560 стр.

Большая скорее всего очень хорошая книга с много чем, давно часто смотрел, отдельные пару недель нужно просидеть в теории колебаний, чтобы понять ее. Пока абсолютно всегда чем читать ее, следует простые книги посмотреть, в них всегда и находился ответ.

Литературные указания и ссылки от Найфе

Обзор работ и библиографию по методу Вишика-Люстерника и его приложениям см. в обзорной статье В. А. Треногина [1970], а по асимптотическим методам в теории обыкновенных дифференциальных уравнений - в обзорной статье В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой и М. В. Федорюка [1969]

В работе Ф. Л. Черноусько [1961] при помощи метода Пуанкаре-Лайтхилла-Го было исследовано отражение от центра, оси или плоскости симметрии сходящихся ударных волн, распространяющихся в газе переменной плотности.

Более полное и строгое изложение асимптотических методов, связанных с усреднением, содержится в монографиях: Боголюбов, Митропольский [1974], Митропольский [1964], Моисеев [1969], Волосов, Моргунов [1971]. Обзор и библиографию работ по асимптотическим методам типа усреднения и их приложениям можно найти в упомянутых книгах, а также в обзорных статьях: Волосов, Моисеев, Моргунов, Черноусько [1965], Волосов [1968].

В помощь

Статьи о теоретических методах

О приложениях

A.4 History of Oscillations

Обсудим вкратце историю развития...

A.5 Puzzles for Different Cases

(??? I'll write it later)

B Bibliography

References

- [1] Пухов, А.А.: *Лекции по колебаниям и волнам: учеб. пособие. В двух частях. Ч. 1. Колебания*. МФТИ, 2019, ISBN ISBN 978-5-7417-0697-8.
- [2] Nayfeh, A.H.: *Perturbation Methods*. Physics textbook. Wiley, 2008, ISBN 9783527617616. <https://books.google.bg/books?id=eh6RmWZ51NIC>.
- [3] Пухов, А.А.: *Колебания и волны в задачах и упражнениях: учеб. пособие*. МФТИ, 2017, ISBN 978-5-7417-0622-0. https://mipt.ru/dppe/files/kiv_tasks.pdf.
- [4] Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А.: *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*.
- [5] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.: *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.